

فصل نخست

مقدمه‌ای بر کاربرد روش‌های عناصر محدود

۱.۱ مقدمه

امروزه روش‌های عناصر محدود به طور وسیعی در تحلیل مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرند و انتظار می‌رود که این استفاده در سالهای آینده به طور قابل توجهی افزایش یابد. این روش‌ها به گستردگی در تحلیل جامدات و سازه‌ها و انتقال حرارت و سیالات مورد استفاده قرار می‌گیرند و در حقیقت روش‌های عناصر محدود، تقریباً در تمام زمینه‌های تحلیل مهندسی قابل استفاده می‌باشند.

گسترش روش‌های عناصر محدود برای حل مسائل عملی مهندسی با ورود کامپیوتر آغاز گشت. در واقع اساس حل عناصر محدود یک مسئله مهندسی این است که مجموعه‌ای از معادلات جبری حاکم، ایجاد شده و حل می‌شود؛ و تنها با استفاده از کامپیوتر بود که این فرایند توانست مؤثر بودن خود را نشان دهد و قابلیت کاربرد عمومی پیدا کند. این دو خاصیت - مؤثر بودن و کاربرد عمومی در تحلیل مهندسی - لازمه ذاتی در تئوری به کار رفته می‌باشند و برای محاسبات عملی به درجه بالایی توسعه یافته‌اند، بگونه‌ای که روش‌های عناصر محدود در عرصه مهندسی خواهان زیادی پیدا کرده است.

مانند تمام نوآوری‌ها، تعیین تاریخ دقیق ابداع روش‌های عناصر محدود دشوار است، ولی ریشه‌های این روش را در کار سه گروه از پژوهشگران می‌توان پیدا کرد: ریاضی‌دان‌های کاربردی (ر.ک. به: [A] Courant، R.)، فیزیکدان‌ها (ر.ک. به: [A] Syngé، J. L.)، و

مهندسين (ر.ک. به: [A] J.H. Argyris and S. Kelsey). اگرچه مبانی روش‌های عناصر محدود سالها پیش انتشار یافته است، با وجود این، محرک اصلی و عامل گسترش دهنده میزان عمل روش عناصر محدود، کارهای مهندسين بود. نخستین آثار مهم، در پرتو مقالات [A] J. H. Argyris and S. Kelsey؛ [A] R. W. Clough؛ [A] M.J. Turner, R.W. Clough, H.C. Martin and L.J. topp و [A] R. W. Clough ظاهر گشت. اصطلاح «عناصر محدود» برای نخستین بار از سوی [A] R. W. Clough مورد استفاده قرار گرفت. آثار اولیه مهم متعلق به [A] J. H. Argyris و [A] O. C. Zienkiewics؛ [A] Y. K. Cheung بنودند. از اوایل سال‌های ۱۹۶۰، تحقیقات وسیعی به این تکنیک اختصاص داده شد و آثار فراوانی در مورد روش عناصر محدود انتشار یافت (به عنوان مثال به مراجع گردآوری شده از سوی [A] A. K. Noor و کتاب راهنمای عناصر محدود (*Finite Element Hand book*) تنظیم شده به وسیله [A] H. Kardestuncer and D. H. Norrie مراجعه شود).

روش عناصر محدود در مهندسی، نخست بر اساس یک مبنای فیزیکی برای تحلیل مسائل در مکانیک سازه‌ای مورد استفاده قرار گرفت و گسترش یافت، و در اندک زمانی به عنوان روشی شناخته شد که می‌تواند هم‌عرض و به بهترین نحو برای حل انواع مسائل دیگر به کار رود. هدف این کتاب ارائه روش‌های عناصر محدود به طور جامع و در زمینه‌ای وسیع برای جامدات، سازه‌ها، مسائل میدانی (بویژه انتقال حرارت) و جریان سیالات است.

برای ارائه موضوعات این کتاب، سه عامل مهم را در بخش‌های بعدی این فصل در نظر می‌گیریم. نخست به این نکته می‌پردازیم که در هر تحلیلی همیشه یک مدل ریاضی از یک مسئله فیزیکی را انتخاب نموده، سپس آن مدل را حل می‌نمائیم. روش عناصر محدود برای حل مدل‌های ریاضی پیچیده مورد استفاده قرار می‌گیرد، ولی ملاحظه این نکته حائز اهمیت است که حل عناصر محدود هرگز اطلاعاتی بیش از آنچه در مدل ریاضی نهفته است به دست نخواهد داد.

سپس در مورد اهمیت تحلیل عناصر محدود در فرایند کامل طراحی کامپیوتری (CAD) بحث می‌کنیم. این بخش، زمینه‌ای است که روش‌های عناصر محدود مهمترین سودمندی خود را بروز می‌دهد و احتمالاً یک مهندس برای نخستین بار با کاربرد روش‌های عناصر محدود مواجه می‌شود.

در بخش پایانی این فصل به شرح چگونگی مطالعه روش‌های عناصر محدود می‌پردازیم. از آنجا که حجم وسیعی از اطلاعات در مورد این روشها انتشار یافته است، برای یک مهندس شناسایی و تمرکز روی مهمترین مبانی و روش‌های اساسی نسبتاً دشوار است.

هدف ما در این بخش ارائه یک سلسله راهنمایی برای خواننده درباره نحوه مطالعه روش‌های تحلیل عناصر محدود و چگونگی مطالعه موضوعات متنوع مورد بحث در این کتاب می‌باشد.

۱.۲ مسائل فیزیکی، مدل‌های ریاضی و روش حل عناصر محدود

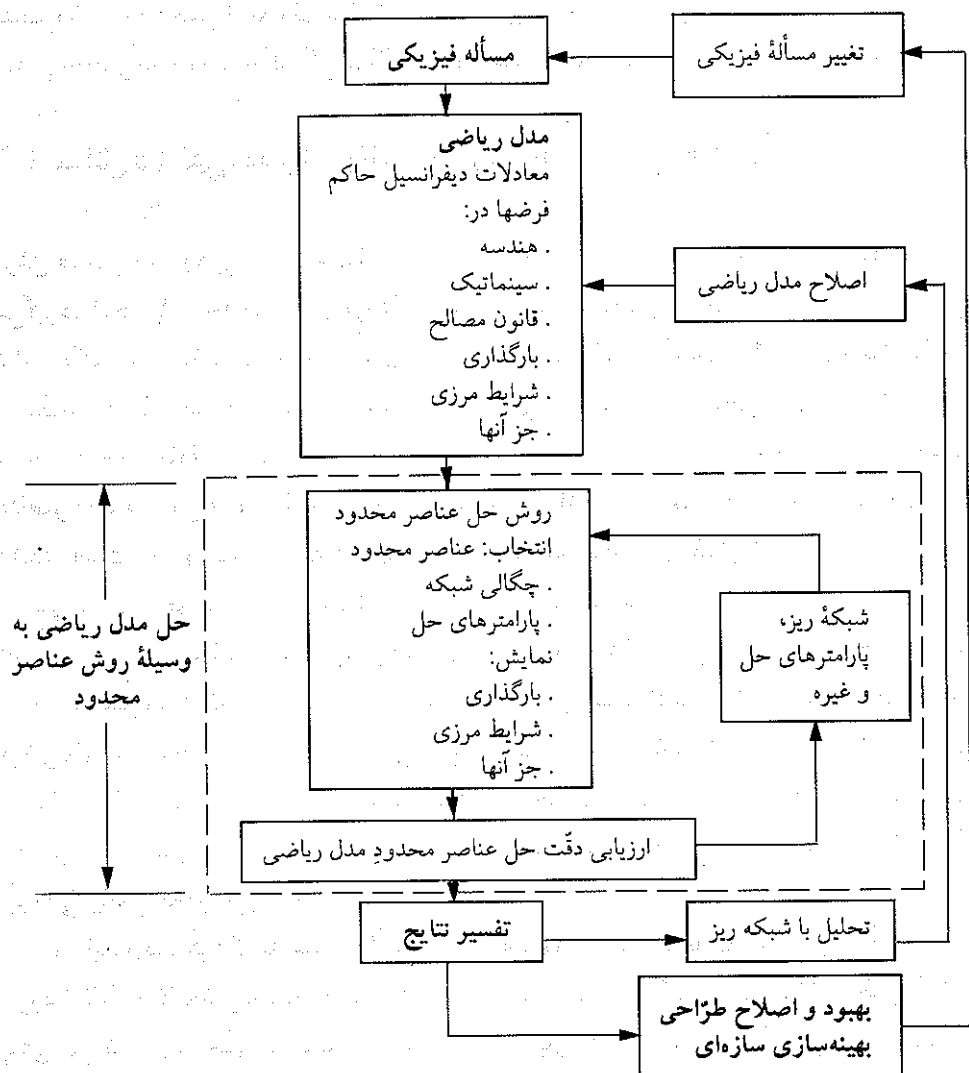
روش عناصر محدود برای حل مسائل فیزیکی در تحلیل و طراحی مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرد. شکل ۱.۱ خلاصه‌ای از فرایند تحلیل عناصر محدود را نشان می‌دهد. مسأله فیزیکی شامل یک سازه واقعی یا جزء سازه‌ای است که تحت اثر بارهای معینی می‌باشد. لازمه ایده‌آل‌سازی یک مسأله فیزیکی به یک مدل ریاضی در نظر گرفتن فرض‌هایی است که توأمًا موجب ایجاد معادلات دیفرانسیل حاکم مدل ریاضی می‌گردد. (ر.ک. به فصل سوم)، تحلیل عناصر محدود این مدل ریاضی را حل می‌نماید. از آنجا که روش عناصر محدود یک روش عددی است، ضرورت دارد که درستی و دقت حل مورد ارزیابی قرار گیرد. اگر معیارهای درستی و دقت جواب‌ها ارضا نشوند، تحلیل عددی عناصر محدود لازم است که با پارامترهای نظریف شده (مانند شبکه‌بندی ریزتر) تکرار شود تا اینکه دقت کافی در جوابها فراهم گردد.

روشن است که روش عناصر محدود فقط مدل ریاضی انتخابی را حل خواهد کرد و کلیه فرض‌های مورد نظر در این مدل در جواب پیش‌بینی شده انعکاس خواهد یافت. در پیش‌بینی پدیده فیزیکی نمی‌توان انتظار اطلاعاتی بیشتر از آنچه که در مدل ریاضی نهفته است، داشت. بنابراین، انتخاب یک مدل ریاضی مناسب بسیار مهم است و نقشی تعیین‌کننده در درک مسأله فیزیکی واقعی که از طریق تحلیل حاصل می‌گردد، دارد.

باید تأکید کرد که با استفاده از تحلیل عناصر محدود، فقط یافتن درکی از مسأله فیزیکی مورد لحاظ امکان‌پذیر است. به عبارت دیگر پاسخ مسأله فیزیکی را نمی‌توان به طور کامل پیش‌بینی کرد؛ زیرا حتی در تحلیل مدل ریاضی بسیار نظریف شده نیز در نظر گرفتن تمامی اطلاعات موجود در طبیعت مسأله فیزیکی امکان‌ناپذیر است.

بعد از حل دقیق مدل ریاضی و تفسیر نتایج امکان دارد یک مدل ریاضی نظریف شده‌ای را برای افزایش اطلاعاتمان از پاسخ مسأله فیزیکی در نظر بگیریم؛ به علاوه، شاید تغییراتی در مدل ریاضی ضرورت داشته باشد و این به نوبه خود موجب ایجاد مدل‌های ریاضی و حل‌های عناصر محدود دیگری گردد (ر.ک. به: شکل ۱.۱).

بنابراین گام اصلی در تحلیل مهندسی انتخاب مدل ریاضی مناسب می‌باشد. برحسب نوع پدیده مورد تحلیل، این مدل‌های ریاضی انتخاب می‌شوند؛ و ضروری است که برای پیش‌بینی کمیتهای مورد نظر، مدل‌های ریاضی قابل اطمینان و مؤثری برگزیده شوند.



شکل ۱.۱ فرایند تحلیل عناصر محدود

برای روشن شدن مفهوم قابلیت اطمینان و مؤثر بودن مدل انتخابی، یک مدل ریاضی کاملاً جامع در نظر گرفته می‌شود و پاسخ مدل انتخاب شده در مقابل پاسخ مدل جامع ارزیابی و سنجیده می‌شود. عموماً مدل ریاضی کاملاً جامع یک توصیف سه‌بعدی کامل است که اثرات غیرخطی را نیز دربردارد.

مؤثر بودن یک مدل ریاضی:

مدل ریاضی مؤثر مدلی است که حتماً منجر به پاسخ مورد نیاز با دقت کافی و با حداقل هزینه گردد.

قابلیت اطمینان یک مدل ریاضی:

مدل ریاضی قابل اطمینان مدلی است که پاسخ ناشی از آن از دقت قابل قبولی در مقایسه با پاسخ مدل ریاضی کاملاً جامع برخوردار باشد.

بنابراین برای ارزیابی نتایج حاصله از حل یک مدل ریاضی انتخاب شده، ممکن است که حل مدل‌های ریاضی با مرتبه بالاتر نیز ضروری باشد و همچنین امکان دارد که دنباله‌ای از مدل‌های ریاضی در نظر گرفته شوند (البته نه ضرورتاً حل همه آنها) که هر مدل نسبت به مدل پیشین از پیچیدگی بیشتری برخوردار باشد. به عنوان مثال یک سازه تیری (در اصطلاح مهندسی) ممکن است ابتدا با استفاده از تئوری تیر Bernoulli و سپس با استفاده از تئوری تیر Timashenko حل شود و سپس برای حل آن از تئوری تنش مسطح دوبعدی استفاده گردد و در نهایت یک مدل پیوسته سه بعدی کامل در نظر گرفته شود؛ البته در هر حالتی امکان دارد که اثرات غیرخطی نیز ملحوظ گردد. به چنین دنباله مدل‌ها، «سلسله مراتب مدل‌ها» اطلاق می‌گردد (ر.ک. به: [K. J. Bathe, N. S. Lee, M. L. Buechem A]). روشن است که با مدل‌های دارای سلسله مراتب، هر مرحله تحلیل شامل اثرات پیچیده‌تری خواهد بود، که این به نوبه خود موجب افزایش هزینه تحلیل خواهد گردید. این یک امر شناخته شده است که هزینه تحلیل کامل یک مدل سه بعدی (با احتساب هزینه امکانات کامپیوتری و زمان مهندسی مورد استفاده) حدوداً دو برابر هزینه تحلیل مدل دوبعدی است.

اکنون برای توضیح ایده‌های مذکور مثالی ساده را در نظر می‌گیریم.

شکل (الف) ۱.۲ یک لچکی را نشان می‌دهد که برای تحمل یک بار عمودی مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای تحلیل ضرورت دارد که یک مدل ریاضی انتخاب شود. روشن است که گزینش چنین مدلی بستگی به نوع پدیده مورد تحلیل، خواص مهندسی، خواص مصالح، شرایط بارگذاری و شرایط تکیه‌گاهی لچکی دارد.

در شکل (الف) ۱.۲ نشان داده شده است که لچکی به یک ستون فولادی بسیار کلفت اتصال یافته است. توصیف «بسیار کلفت» نسبت به ضمانت t و ارتفاع h لچکی در نظر گرفته شده است. اینچنین «توصیفی» منجر به استفاده از این فرض می‌گردد که لچکی به یک ستون (عملاً) صلب اتصال یافته است. بنابراین ما می‌توانیم توجه خود را در روی لچکی با اعمال «شرط مرزی ستون صلب» معطوف نماییم. (البته در مرحله بعدی امکان دارد که تحلیلی از ستون مورد نیاز باشد، بنابراین بارهای تحمل شده به وسیله پیچها که ناشی از بار W می‌باشند باید به ستون اعمال گردند.)

همچنین فرض می کنیم که بار W به طور بسیار آهسته اعمال می گردد. شرط زمانی «بسیار آهسته» نسبت به بزرگ ترین زمان تناوب طبیعی لچکی در نظر گرفته می شود، به عبارت دیگر مدت زمانی که بار اعمال شده از صفر به مقدار کامل W می رسد از زمان تناوب اصلی لچکی بسیار طولانی تر است. چنین «توصیفی» استفاده از تحلیل ایستایی (و نه تحلیل دینامیک) را ضروری می سازد. اینک با این ملاحظات اولیه می توان یک مدل ریاضی مناسبی برای تحلیل لچکی - برحسب نوع پدیده مورد پیش بینی - انتخاب کرد. ابتدا فرض می کنیم که تنها کل لنگر خمشی در مقطع AA لچکی و تغییر مکان در محل بار وارده مورد نیاز می باشد. برای تعیین کمیت های مذکور یک مدل ریاضی را در نظر می گیریم که شامل تغییر شکل برشی نیز می باشد [ر.ک. به: شکل (ب) ۱.۲] و مسأله را به صورت زیر حل می کنیم:

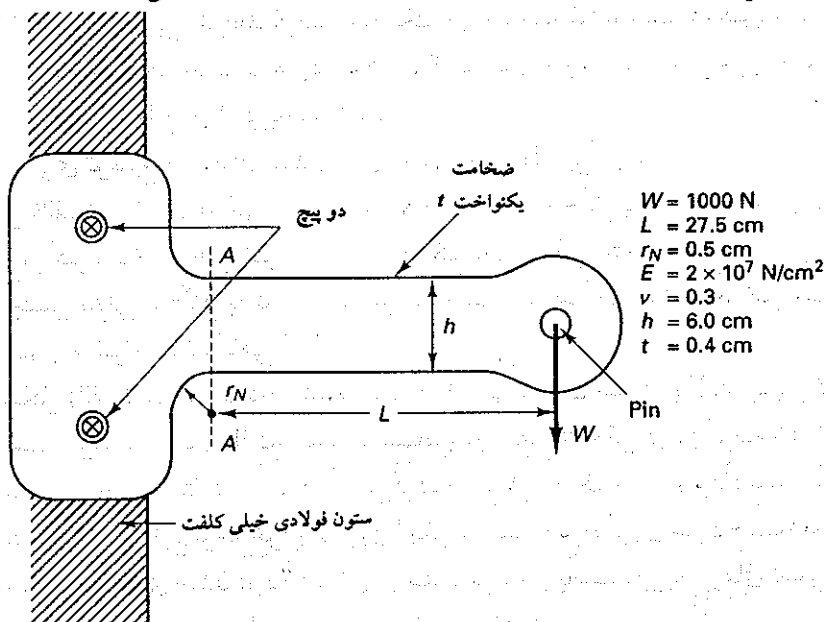
$$M = WL$$

$$= 27,500 \text{ N cm} \quad (1.1)$$

$$\delta_{\text{at load } W} = \frac{1}{3} \frac{W(L + r_N)^3}{EI} + \frac{W(L + r_N)}{\frac{5}{6}AG}$$

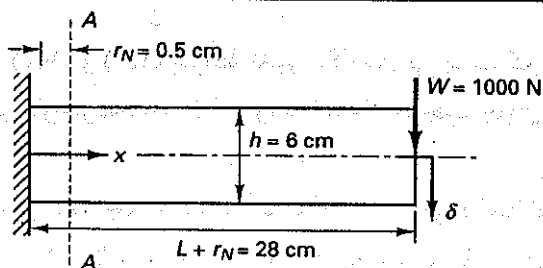
$$= 0.053 \text{ cm} \quad (1.2)$$

که در آن L و r_N در شکل (الف) ۱.۲ نشان داده شده اند و E ضریب ارتجاعی فولاد مورد استفاده، t ضریب برشی و I ممان اینرسی بازوی لچکی ($I = \frac{1}{12} h^3 t$)، A سطح مقطع ($A = ht$) و ضریب $\frac{5}{6}$ یک ضریب اصلاحی برشی (ر.ک. به: بخش ۵.۴.۱) می باشد.



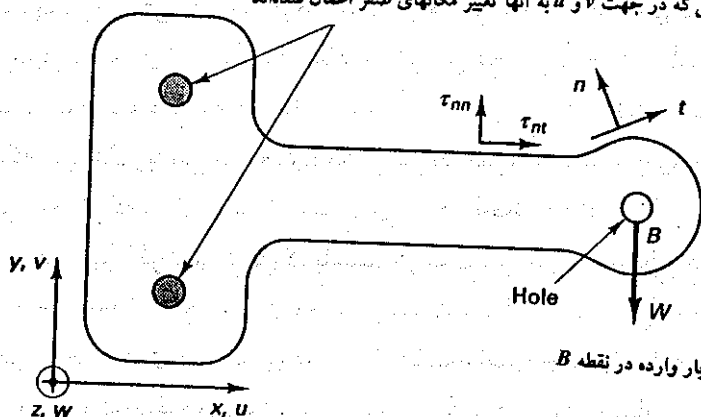
$$\begin{aligned} W &= 1000 \text{ N} \\ L &= 27.5 \text{ cm} \\ r_N &= 0.5 \text{ cm} \\ E &= 2 \times 10^7 \text{ N/cm}^2 \\ \nu &= 0.3 \\ h &= 6.0 \text{ cm} \\ t &= 0.4 \text{ cm} \end{aligned}$$

(الف) مسئله فیزیکی لچکی فولادی



(ب) مدل تیر

سطوحی که در جهت v و u به آنها تغییر مکانهای صفر اعمال شده‌اند



بار وارده در نقطه B

معادلات تعادل (ر.ک. به: مثال ۴.۲)

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{در محدوده لچکی}$$

در سطوح به جز نقطه B و در محل $\tau_{nn} = 0, \tau_{nt} = 0$

تغییر مکان‌های صفر اعمال شده

روابط تنش - کرنش (ر.ک. به: جدول ۴.۳)

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

E = ضریب ارتجاعی ، ν = ضریب پواسون

روابط تنش - تغییر مکان (ر.ک. به: بخش ۴.۲)

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

(ب) مدل تنش سطح

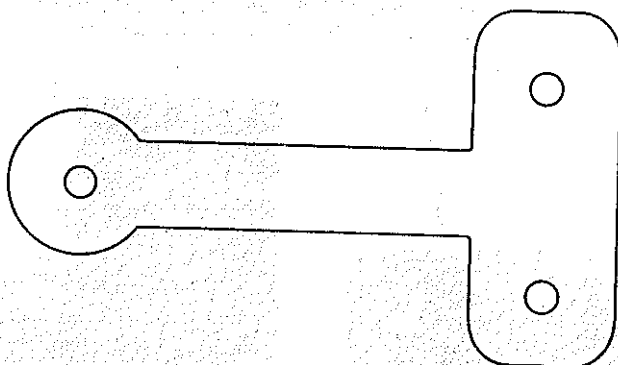
شکل ۱.۲ لچکی مورد تحلیل و دو مدل ریاضی

البته در روابط (۱.۱) و (۱.۲) شرایط تغییر مکانهای بی‌نهایت کوچک ارتجاعی خطی فرض می‌شود، بنابراین بار وارده نباید آن‌قدر زیاد باشد که موجب جاری شدن مصالح یا تغییر مکانهای بزرگ گردد.

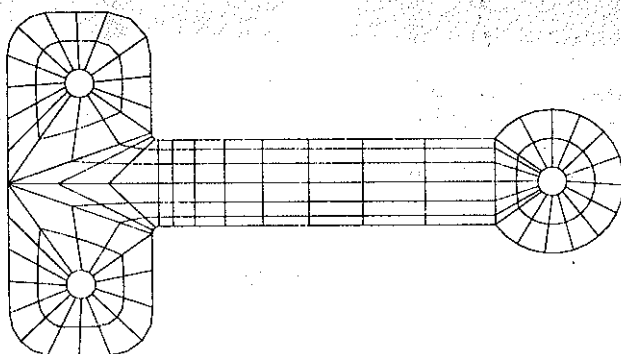
حال به این پرسش باید جواب داد که آیا مدل ریاضی مورد استفاده در شکل (ب) ۱.۲ قابل اطمینان و مؤثر می‌باشد؟ برای جواب دادن به این پرسش باید یک مدل ریاضی کاملاً جامعی را در نظر بگیریم که نمایش سه‌بعدی کاملی از کل لچکی باشد. این مدل باید شامل دو پیچ اتصال دهنده لچکی به ستون (صلب فرض شده) و مفصل که بار W از طریق آن اعمال می‌شود، باشد. تحلیل سه‌بعدی این مدل با استفاده از خواص هندسی و خواص مصالح مناسب اعدادی را به دست خواهد داد که مقادیر داده شده در (۱.۱) و (۱.۲) با آنها مقایسه خواهند شد. باید دانست که این مدل ریاضی سه‌بعدی، شامل شرایط تماس (تماس بین پیچ‌ها، لچکی و ستون و تماس بین مفصلی که بار از طریق آن اعمال می‌شود و لچکی) و تمرکز تنش در مغزی و سوراخها می‌باشد. همچنین اگر تنش‌ها بزرگ باشند، در مدل باید شرایط مصالح غیرخطی نیز ملحوظ گردد. البته حل تحلیلی این مدل در دسترس نیست و تمامی جوابهایی که می‌توانیم به دست آوریم از طریق حل عددی امکان‌پذیر است. در کتاب حاضر، چنین راه‌حلی به کمک روش‌های عناصر محدود توصیف می‌شوند، ولی چنان‌که پیشتر ذکر شد دستیابی به آن راه‌حلیا بر حسب امکانات کامپیوتری و زمان مهندسی مورد استفاده نسبتاً پرهزینه و گران خواهد بود.

از آنجا که به نظر می‌رسد مدل ریاضی جامع سه‌بعدی احتمالاً از جامعیت بیش از حدی برخوردار باشد (برای تحلیل مسأله مورد نظر)، به جای آن می‌توانیم یک مدل تنش مسطح دوبعدی ارتجاعی خطی را آنگونه که در شکل (پ) ۱.۲ نشان داده شده است در نظر بگیریم. این مدل ریاضی با دقت بیشتری نسبت به مدل تیر، هندسه لچکی را نمایش داده و یک وضعیت تنش دوبعدی را در لچکی فرض می‌کند (ر.ک. به: بخش ۴.۲). انتظار می‌رود که لنگر خمشی در مقطع AA و تغییر مکان زیر بار که با استفاده از این مدل محاسبه می‌گردند، کاملاً نزدیک به مقادیری باشد که از طریق حل مدل سه‌بعدی کاملاً جامع به دست آمده‌اند و مطمئناً این مدل دوبعدی یک مدل از مرتبه بالاتری را نمایش می‌دهد که نتایج بدست آمده از آن می‌توانند به عنوان محکمی برای سنجش مقادیر داده شده در (۱.۱) و (۱.۲) مورد استفاده قرار گیرند. البته حل تحلیلی این مدل در دسترس نمی‌باشد و یک حل عددی باید مطلوب نظر باشد.

اشکال (الف) ۱.۳ تا (ث) ۱.۳ هندسه و گسسته‌سازی عناصر محدود مورد استفاده برای حل مدل ریاضی تنش مسطح و نیز برخی نتایج تنش و تغییر مکان حاصل از این ایده‌آل‌سازی را نشان می‌دهند. اینک لازم است فرضهای مورد استفاده در این مدل ریاضی با فرض‌هایی که در مدل سه‌بعدی جامع در نظر گرفته شده‌اند مقایسه گردند. از آنجا که شرط تنش مسطح فرض می‌شود، از اینرو تنها تنش‌های τ_{xy} و τ_{yx} ، τ_{xx} غیر صفر می‌باشند. بنابراین فرض می‌شود که تنشهای τ_{yz} و τ_{zy} صفراند. همچنین اتصال واقعی پیچی و شرایط تماس بین ستون فولادی و لچکی در مدل ملحوظ نگردیده و مفصلی که بار را به لچکی انتقال می‌دهد در مدل در نظر گرفته نمی‌شود. با این حال از آنجا که هدف ما تنها یافتن لنگر خمشی در مقطع AA و تغییر مکان در نقطه B می‌باشد، چنین فرض‌هایی معقول به نظر رسیده و نسبتاً اثر کمتری را دارند.

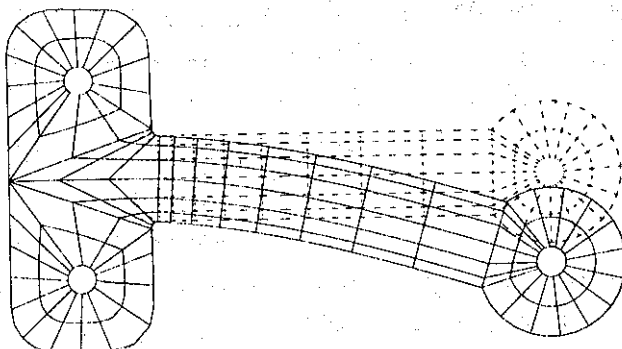


(الف) هندسه لچکی که از طریق برنامه CAD به دست آمده است

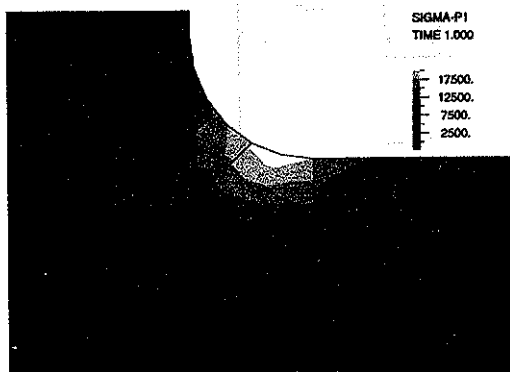


(ب) شبکه‌ای متشکل از عناصر نه گرهی که در گسسته‌سازی عناصر محدود مورد استفاده قرار گرفته است

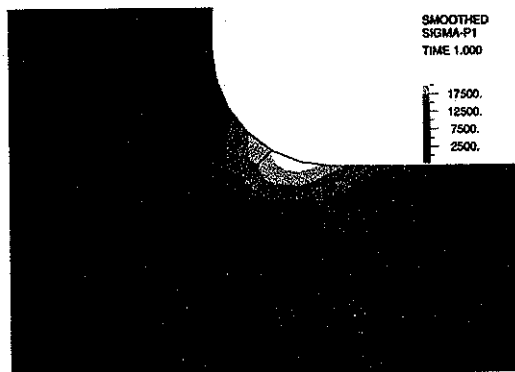
شکل ۱.۳ تحلیل تنش مسطح لچکی نمایش داده شده در شکل ۱.۲: از برنامه Auto CAD برای ایجاد هندسه و از برنامه ADINA برای تحلیل عناصر محدود استفاده شده است.



(پ) شکل تغییر شکل یافته. تغییر مکانها با ضریب بزرگنمایی ۱۰۰ به همراه بافتار اولیه در شکل بالا نشان داده شده‌اند.



(ت) تنش اصلی ماکزیمم در نزدیکی بریدگی:
در شکل بالا نتایج تنش هموار نشده نمایش داده شده‌اند.
شکستگی جزئی در نوارهای تنش نشان می‌دهد که جواب
مدل ریاضی با دقت معقولی حاصل شده است (ر.ک. به:
بخش ۴.۳.۶)



(ث) تنش اصلی، ماکزیمم در نزدیکی بریدگی:
در شکل بالا نتایج تنش هموار شده نمایش داده شده‌اند.
(متوسط تنش‌های نقطه‌ای محاسبه شده و در روی عناصر
درون‌یابی می‌شوند)

شکل ۱.۳ (ادامه)

فرض می‌کنیم که نتایج حاصله از تحلیل عناصر محدود مدل ریاضی به طور کافی دقیق بوده و می‌توان نتایج داده شده در شکل ۱.۳ را به عنوان حل مدل ریاضی تنش مسطح در نظر گرفت. شکل (پ) ۱.۳ بافتار تغییر شکل یافته محاسبه شده را نشان می‌دهد. تغییر مکان در محل اعمال بار (نقطه B) با استفاده از حل مدل تنش سطح عبارت است از:

$$\delta|_{\text{at load } W} = 0.064 \text{ cm} \quad (۱.۳)$$

همچنین کل لنگر خمشی محاسبه شده در مقطع AA عبارت است از:

$$M|_{x=0} = 27,500 \text{ N cm} \quad (۱.۴)$$

در حالی که مقدار یکسانی برای لنگر خمشی در مقطع AA به وسیله مدل‌های تیر و تنش مسطح^(۱) برآورد می‌شود، تغییر مکان محاسبه شده به وسیله مدل تیر به میزان قابل توجهی کمتر از مقدار تعیین شده با استفاده از مدل تنش مسطح می‌باشد (که ناشی از این فرض است که تیر شکل (ب) ۱.۲ در انتهای سمت چپ خود گیردار بوده که در نتیجه از تغییر شکل بین انتهای تیر و پیچها صرف‌نظر می‌شود).

با توجه به این نتایج می‌توان گفت که مدل ریاضی تیر در شکل (ب) ۱.۲ در صورتی قابل اطمینان است که لنگر خمشی مورد نظر با دقت یک درصد و تغییر مکان با دقت بیست درصد برآورد گردد. البته مدل تیر مدل مؤثری نیز می‌باشد زیرا که محاسبات، با کوشش بسیار اندکی انجام شدند.

از سوی دیگر، در مرحله بعدی اگر تعیین حداکثر تنش در لچکی مورد نظر باشد، مدل ریاضی ساده تیری شکل (ب) ۱.۲، جواب مورد نظر را با دقت کافی به دست نخواهد داد. بویژه که مدل تیری افزایش تنش ناشی از مغزی‌ها را کاملاً نادیده می‌گیرد.^(۲) بنابراین یک مدل تنش مسطح که اثر مغزی‌ها را نیز در نظر بگیرد ضروری است. در اینجا چند نکته مهم به شرح زیر ذکر می‌گردند:

۱. گزینش مدل ریاضی باید بستگی به نوع پاسخی داشته باشد که می‌خواهد برآورد گردد (به عبارت دیگر به سوالات پرسیده شده از طبیعت بستگی دارد).

۲. یک مدل ریاضی مؤثر مدلی است که به طریقه‌ای قابل اطمینان (با خطای قابل قبول) و با کمترین کوشش جوابهای مناسبی را به سوالات مورد نظر بدهد.

۳. یک روش عناصر محدود تنها مدل ریاضی انتخابی را دقیقاً می‌تواند حل کند (به عنوان مثال مدل تیری یا مدل تنش مسطح در شکل ۱.۲) و نمی‌تواند اطلاعاتی بیشتر از آنچه را که در مدل نهفته است پیش‌بینی نماید.

۴. مفهوم قابلیت اطمینان مدل ریاضی بستگی به ارزیابی دقت نتایج حاصل از مدل ریاضی انتخابی دارد (در پاسخ پرسش‌های مورد نظر) که در مقایسه با نتایج حاصل از مدل ریاضی کاملاً جامع انجام می‌گیرد. با این حال جهت بررسی کفایت قابلیت اطمینان مدل ریاضی انتخابی معمولاً در عمل مدل ریاضی کاملاً جامع حل نمی‌شود و به جای آن از تجربه مهندسی استفاده می‌شود و یا یک مدل ریاضی تعریف شده‌ای حل می‌گردد.

(۱) لنگر خمشی در مقطع AA در مدل تنش مسطح از نیروهای نقاط گرهی عناصر محدود محاسبه می‌شود و برای این مسأله تحلیلی که از نظر ایستایی معین است، لنگر مقاوم داخلی باید با لنگر وارد خارجی برابر باشد.

(۲) البته اثر مغزی را می‌توان با استفاده از فاکتورهای تمرکز تنش که از جواب‌های مدل تنش مسطح به دست آمده‌اند، تخمین زد.

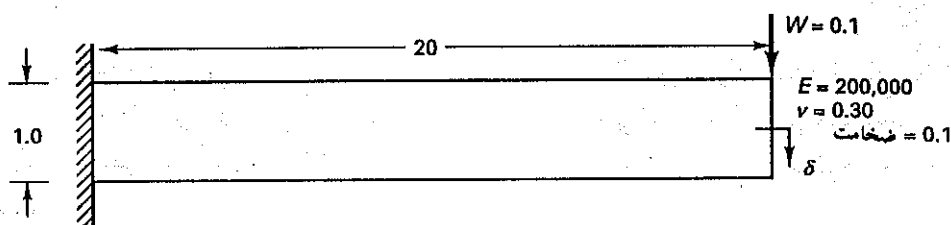
سرانجام به یک نکته عمومی مهم دیگر باید اشاره شود. مدل ریاضی انتخابی ممکن است شامل تنش‌های بسیار زیاد ناشی از وجود گوشه‌های تیز، بارهای متمرکز و سایر اثرات باشد. این تنش‌های بالا صرفاً ممکن است که در نتیجه ساده‌سازی‌های مورد استفاده در مدل ریاضی در مقایسه با مدل ریاضی بسیار جامع (یا با طبیعت) پیش آیند. به عنوان مثال بار متمرکز در مدل تنش مسطح در شکل (پ) ۱.۲ یک ایده‌آل‌سازی از بار فشاری روی یک سطح کوچک است. (این فشار در عمل به وسیله مفصلی که بار را به لچکی حمل می‌کند، منتقل می‌گردد.) حل کامل مدل ریاضی شکل (پ) ۱.۲، تنش بی‌نهایت را در نقطه اعمال بار به دست می‌دهد و در صورتی که شبکه عناصر محدود ریزتر شود، باید تنش بسیار بزرگی را در نقطه B انتظار داشته باشیم. البته این تنش بسیار بزرگ ناشی از مدل انتخابی می‌باشد و هنگامی که یک شبکه ریزتر عناصر محدود مورد استفاده قرار می‌گیرد بار متمرکز باید با یک بار فشاری که روی یک سطح کوچک اعمال می‌شود جایگزین گردد. به علاوه اگر باز هم مدل مزبور تنش بسیار بزرگی را پیش‌بینی کند، استفاده از یک مدل ریاضی غیرخطی مناسب خواهد بود.

باید توجه داشت که بار متمرکز در مدل تیر شکل (ب) ۱.۲ موجب ایجاد هیچ‌گونه دشواری در حل مدل نمی‌گردد. همچنین گوشه‌های تیز با زاویه 90° درجه در محل تکیه‌گاه مدل تیری مشکلی را در حل مدل ایجاد نمی‌نمایند، در صورتی که چنین گوشه‌هایی در مدل تنش مسطح تنش‌های بی‌نهایت را به دست می‌دهد. بنابراین برای مدل تنش مسطح، گوشه‌ها الزاماً باید گرد شوند تا بتوان با دقت بیشتر هندسه واقعی لچکی را نمایش داد.

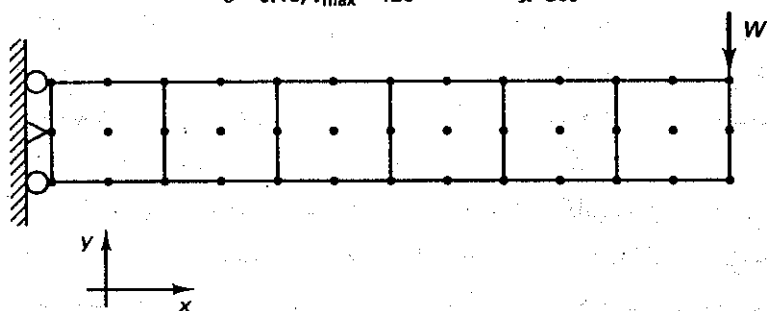
بدین ترتیب ملاحظه می‌شود که حل یک مدل ریاضی ممکن است موجب ایجاد مشکلات غیرواقعی شود که به آسانی با ایجاد تغییر مناسب در مدل ریاضی - جهت نمایش دقیق‌تر وضعیت فیزیکی واقعی - رفع می‌گردند. به علاوه انتخاب یک مدل ریاضی فراگیر ممکن است در چنین حالاتی موجب کاهش کوشش مورد نیاز برای حل مدل شود.

با اینکه ملاحظات مذکور جنبه عمومی دارند، ولی لازم است یک بار دیگر به طور ویژه استفاده از بارهای متمرکز مورد ملاحظه قرار گیرد. از این ایده‌آل‌سازی اعمال بار به طور وسیع در مهندسی استفاده می‌شود. اکنون ملاحظه می‌شود که در بسیاری از مدل‌های ریاضی (و همچنین حل عناصر محدود این مدل‌ها) بارهای متمرکز سبب تنش‌های بی‌نهایت می‌گردند. در نتیجه این پرسش پیش می‌آید که تحت چه شرایطی در عمل مهندسی ممکن است که با دشواری‌هایی مواجه شویم. معمولاً در عمل، دشواری‌های حل تنها هنگامی پیش می‌آیند که گسسته‌سازی بسیار ریز انجام گیرد و به همین علت، اغلب موضوع تنش‌های بی‌نهایت زیر بارهای متمرکز نادیده گرفته می‌شود. به عنوان مثال، شکل ۱.۴ نتایج تحلیل عناصر محدود یک تیر طره‌ای را که به صورت مسئله تنش سطح مدل شده است، نشان می‌دهد. تیر طره‌ای تحت اثر یک بار متمرکز می‌باشد. معمولاً در عمل شبکه 6×1 به حد کافی یک شبکه ریز در نظر

گرفته می‌شود و روشن است که ضرورتاً باید یک گسسته‌سازی بسیار ریزی مورد استفاده قرار گیرد تا اثرات تکنیکی تنش در محل اعمال بار و در تکیه‌گاه به طور دقیق نشان داده شوند. همچنان که پیش از این اشاره شد اگر حل عناصر محدود مسأله دنبال شود ضروری است که مدل ریاضی به گونه‌ای تغییر یابد تا این که وضعیت واقعی فیزیکی سازه را با دقت بیشتری به نمایش گذارد. چنین تغییری در مدل ریاضی ممکن است در تحلیل‌های عناصر محدود «خودهمساز» مهم باشد، زیرا که در چنین تحلیل‌هایی شبکه‌های جدیدی به طور خودکار ایجاد می‌شوند و تکنیکی‌های غیر واقعی تنش موجب گسسته‌سازی بسیار ریزی می‌گردند.



(الف) هندسه، شرایط مرزی و اطلاعات مربوط به مصالح. نتایج
تئوری تیر Bernoulli: $\delta = 0.16$, $\tau_{\max} = 120$



(ب) گسسته‌سازی نمونه عناصر محدود، شبکه 6×1 متشکل از
عناصر نه‌گره‌ای. نتایج عبارتند از: $\delta = 0.16$, $\tau_{\max} = 116$

شکل ۱.۴ تحلیل یک تیر طوزه‌ای به عنوان یک مسأله تنش مسطح

به ملاحظات مذکور در بخش ۴.۳.۴ هنگامی که مسأله ارتجاعی عمومی مورد نظر برای تحلیل عناصر محدود ارائه می‌گردد، خواهیم پرداخت.

در یک جمع‌بندی باید به خاطر داشت که نظر به اینکه روش عناصر محدود برای حل مدل ریاضی مورد استفاده قرار می‌گیرد، گام اصلی و مهم در تحلیل عناصر محدود، انتخاب یک مدل ریاضی مناسب است. به علاوه، مدل ریاضی باید در ارتباط و متناسب با سوالات پرسیده

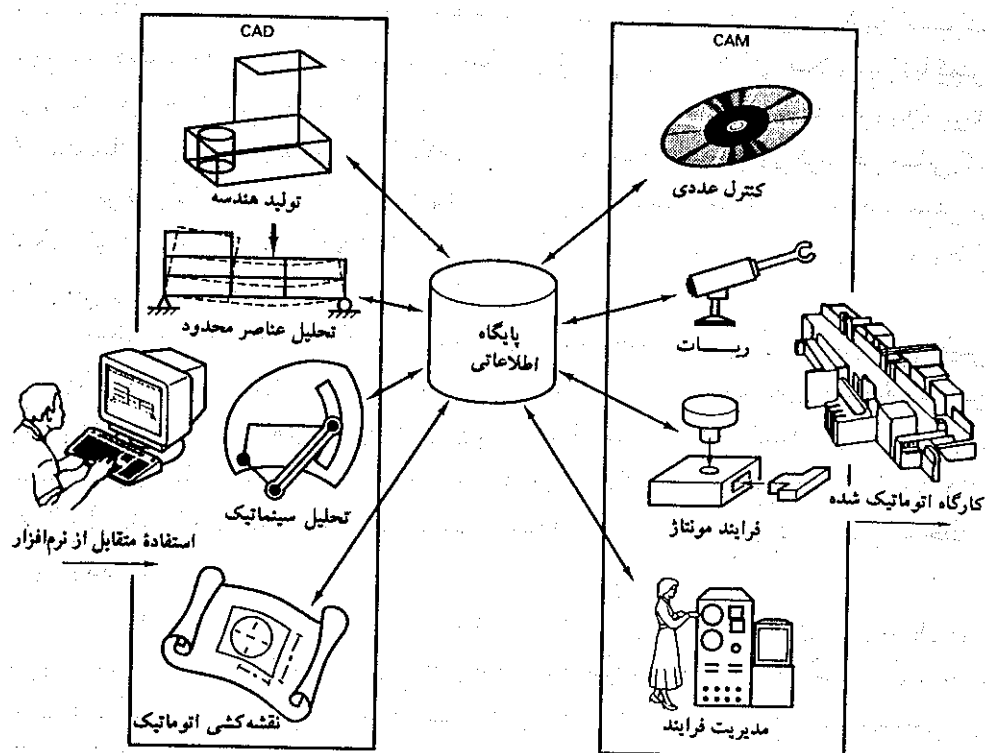
شده در تحلیل باشد و (همچنان که پیش از این اشاره شد) باید قابل اطمینان و مؤثر باشد. در فرایند تحلیل، مهندس الزاماً باید در مورد دو سوال قضاوت کند: آیا مدل ریاضی انتخابی با دقت کافی حل شده است یا نه؟ آیا این مدل برای سوالات طرح شده مناسب (یعنی قابل اطمینان) است یا نه؟ انتخاب مدل ریاضی، حل این مدل با روشهای مناسب عناصر محدود و قضاوت در مورد نتایج حاصل، اجزای اساسی یک تحلیل مهندسی با استفاده از روشهای عناصر محدود می‌باشند.

۱.۳ تحلیل عناصر محدود به عنوان بخش مکمل طراحی کامپیوتری

روشن است که تحلیل مهندسی به عنوان یک فعالیت بسیار جالب، تنها یک نقش کمکی در محدوده وسیع طراحی مهندسی دارد. فرایند تحلیل کمک می‌کند که طراحی‌های جدید مطلوب، مشخص شوند و می‌توان از آن برای بهبود یک طرح با ملاحظه نحوه عملکرد و هزینه استفاده نمود.

در اوایل استفاده از روشهای عناصر محدود، تنها سازه‌های خاصی، بویژه در صنایع هوا-فضا و مهندسی عمران مورد تحلیل قرار گرفتند. با وجود این زمانی که پتانسیل کامل روشهای عناصر محدود شناخته شد و استفاده از کامپیوتر در طراحی مهندسی افزایش یافت، استفاده از روشهای عناصر محدود به عنوان جزء مکمل فرایند طراحی در مهندسی مکانیک، عمران و هوا-فضا جهت تحقیق و توسعه مورد توجه اکید قرار گرفت.

شکل ۱.۵ شمایی را از مراحل یک فرایند نمونه طراحی کامپیوتری نشان می‌دهد. تحلیل عناصر محدود تنها بخش کوچک ولی در عین حال بخش مهمی از کل فرایند طراحی می‌باشد. باید دانست که نخستین گام در شکل ۱.۵ ایجاد نمایش هندسی سازه مورد طراحی می‌باشد. برنامه‌های کامپیوتری متنوعی را می‌توان برای این منظور به کار برد (به عنوان مثال یک برنامه نمونه و رایج Auto CAD می‌باشد). در این مرحله، خواص مصالح، بار وارده و شرایط مرزی در هندسه نیز الزاماً باید تعریف گردند. با دادن این اطلاعات یک تحلیل عناصر محدود را می‌توان انجام داد. از آنجا که هندسه و سایر اطلاعات سازه واقعی ممکن است کاملاً پیچیده باشد، جهت دستیابی به یک مدل ساده ریاضی، ضروری است که هندسه و بارگذاری ساده‌سازی شوند. البته همچنان که در بخش پیشین اشاره شد، مدل ریاضی برای جوابگویی به سوالات تحلیل باید قابل اطمینان و مؤثر باشد. تحلیل عناصر محدود، مدل ریاضی انتخابی را حل می‌نماید که این مدل بسته به هدف تحلیل ممکن است تغییر و تکامل یابد (ر.ک. به: شکل ۱.۱).



شکل ۱.۵ شمایی از حوزه CAD/CAM

با ملاحظه این فرایند که معمولاً نه تنها از سوی متخصصین در تحلیل بلکه به وسیله طراحان مهندسی انجام یافته و باید انجام گیرد، اذعان می‌شود که روشهای عناصر محدود باید قابل اطمینان و توانا باشند. منظور از قابلیت اطمینان روشهای عناصر محدود^(۳) این است که در حل یک «مدل ریاضی خوب وضع شده»، روشهای عناصر محدود باید همیشه برای یک شبکه عناصر محدود معقول، جواب معقولی را به دست دهند و اگر شبکه به طور معقولی ریز شود، یک جواب دقیقی باید همیشه حاصل شود. منظور از توانایی روشهای عناصر محدود این است که عملکرد روشهای عناصر محدود نباید بی جهت به اطلاعات مربوط به مصالح، شرایط مرزی و شرایط بارگذاری مورد استفاده حساس باشند. بنابراین روشهای عناصر محدودی که توانا نیستند، قابل اطمینان نیز نخواهند بود.

به عنوان مثال فرض کنید که در حل تنش مسطح مدل ریاضی شکل (پ) ۱.۲ هرگونه

(۳) توجه شود که این منظور از «قابلیت اطمینان روشهای عناصر محدود» با منظور از «قابلیت اطمینان مدل ریاضی» که در بخش پیشین تعریف شده متفاوت است.

گسسته‌سازی معقولِ عناصر محدود با نوع خاصی عنصر به کار برده شود. روشن است که جواب به دست آمده از چنین تحلیلی نباید خطای بسیار بزرگتری با کمیتی مثلاً بیشتر (یا کمتر) از مقدار خود جواب را داشته باشد. استفاده از یک عنصر محدود غیر قابل اطمینان برای گسسته‌سازی برخی توپولوژی‌های شبکه‌ای منجر به جوابهای مطلوبی می‌گردد در حالی که برای سایر توپولوژی‌های شبکه‌ای جوابهای نامطلوبی را به دست خواهد داد. عناصر مبتنی بر انتگرال‌گیری کاهش یافته با مدهای انرژی صفر غیر واقعی می‌توانند چنین رفتار غیر قابل اطمینانی را نشان دهند (ر.ک. به: بخش ۵.۵.۶).

به‌طور مشابه فرض کنید که گسسته‌سازی عناصر محدود یک مدل ریاضی نتایج دقیقی برای یک مجموعه از پارامترهای مصالح را به دست می‌دهد و یک تغییر کوچک در این پارامترها متناظر با یک تغییر کوچک در جواب کامل مدل ریاضی است. در این صورت گسسته‌سازی عناصر محدود مشابه باید نتایج دقیقی را برای مدل ریاضی که در پارامترهای مصالح آن تغییر اندکی داده شده است به دست بدهد و نباید موجب ایجاد جوابهایی با خطای بسیار زیاد شود.

ملاحظات مذکور در ارتباط با «گسسته‌سازی‌های مؤثر عناصر محدود» نیز بسیار مهم می‌باشند و در مبحث «گسسته‌سازی عناصر محدود و خواص پایداری و همگرایی آنها» مورد بحث قرار خواهند گرفت (ر.ک. به: فصلهای ۴ الی ۷). برای استفاده در طراحی مهندسی این نکته حائز اهمیت است که روشهای عناصر محدود باید قابل اطمینان، توانا و همچنین کارآمد باشند. قابلیت اطمینان و توانایی از اهمیت خاصی برخوردار می‌باشند، زیرا یک طراح زمان نسبتاً اندکی برای فرایند تحلیل دارد و باید قادر باشد که به سرعت و بدون «آزمون و خطا» جواب دقیقی را برای مدل ریاضی انتخابی پیدا کند. به آسانی می‌توان گفت که روشهای عناصر محدودی که غیر قابل اطمینان می‌باشند، در عمل مهندسی نیز غیر قابل قبول اند.

یک قسمت مهم تحلیل عناصر محدود محاسبه تخمینهای خطا می‌باشد، به عبارت دیگر باید تخمین زده شود که تا چه میزانی تحلیل عناصر محدود جواب کامل مدل ریاضی را تقریب‌سازی کند (ر.ک. به: بخش ۴.۳.۶). این تخمینها نشان می‌دهند که آیا یک گسسته‌سازی عناصر محدود خاصی حقیقتاً منجر به پیش‌بینی دقیق پاسخ مسأله شده است یا نه؟ و نتیجتاً یک طراح به وجهی منطقی می‌تواند در مورد استفاده از نتایج حاصله از تحلیل تصمیم بگیرد. در حالتی که نتایج غیر قابل قبولی به علت استفاده از روش‌های عناصر محدود غیر قابل اطمینان حاصل شده‌اند، دشواری مسأله در چگونگی یافتن نتایج دقیق می‌باشد.

سرانجام ضرورت دارد که در مورد آینده روش‌های عناصر محدود در طراحی کامپیوتری اظهار نظر شود. مسلماً بسیاری از طراحان مهندسی فرصت لازم برای مطالعه عمیق روش‌های عناصر محدود را ندارند. هدف آنها صرفاً استفاده از این تکنیک‌ها جهت تقویت

طرح مهندسی است. بنابراین احتمالاً در آینده به هنگام استفاده تکمیلی از روش‌های عناصر محدود در CAD به تدریج نیاز به مدافه کمتری در شبکه‌های عناصر محدود در طی فرایند تحلیل خواهد بود. در مقابل انتظار می‌رود که در تحلیل ایستایی ارتجاعی خطی، فرایند تحلیل عناصر محدود به گونه‌ای خودکار گردد که با در دست داشتن یک مدل ریاضی برای حل، شبکه‌های عناصر محدود به طور خودکار ایجاد شوند، جواب همراه با تخمین خطا تعیین گردد و برحسب خطاهای تخمین زده شده و دقت مورد نیاز برای جواب، گسسته‌سازی عناصر محدود به طور خودکار ریزتر شود (بدون دیدن شبکه عناصر محدود توسط تحلیل‌گر یا طراح)، تا اینکه دقت مطلوب در جوابها حاصل گردد. در این فرایند تحلیل خودکار - که در آن نیز حتماً مهندس باید یک مدل ریاضی مناسبی را برای تحلیل انتخاب کند - مهندس می‌تواند ضمن استفاده از ابزارهای تحلیل با کارایی و سودمندی کافی تلاش خود را در جنبه‌های طراحی متمرکز نماید. اینگونه تحلیل و طراحی برای تحلیل ایستایی ارتجاعی خطی به صورت متداولی در دسترس خواهد بود، ولی تحلیل دینامیکی و غیرخطی سازه‌ها و سیالات در سال‌های آتی مداخله بیشتر و تخصص کافی در روش‌های عناصر محدود را از مهندس طلب خواهد کرد.

چنان که دیده می‌شود، اطمینان بیش از حد مطلوب نمی‌باشد، ولی می‌توان یک چشم‌انداز واقع‌گرایانه‌ای را در خصوص آینده ارزشمند و جالب کاربرد روش‌های عناصر محدود پیش‌بینی کرد. برای برخی ملاحظات در اطمینان بیش از حد در مورد روش‌های عناصر محدود (که هنوز هم بعد از دو دهه، قابل توجه می‌باشند) به مقاله «یک نظریه در مکانیک محاسباتی» اثر [A] J. T. oden and K. J. Bathe مراجعه شود.

۱.۴ برنامه‌ای پیشنهادی در مورد چگونگی مطالعه روش‌های عناصر محدود

با وجود اثرات زیاد منتشره در مورد استفاده و بسط روش‌های عناصر محدود، برای یک دانشجو یا استاد، شناخت یک برنامه مؤثر مطالعه امری نسبتاً مشکل می‌باشد. مسلماً چنین برنامه‌ای به اهداف مطالعه و زمان قابل دسترس بستگی خواهد داشت.

در حالت کلی دو هدف مختلف وجود دارد:

۱. یادگیری استفاده مناسب از روش‌های عناصر محدود برای حل مسائل پیچیده و
 ۲. فهم عمیق روش‌های عناصر محدود بگونه‌ای که ادامه تحقیق در این روش‌ها میسر باشد.
- کتاب حاضر با ملاحظه هر دو هدف نوشته شده است، البته با قبول این نکات که تعداد دانشجویان استفاده کننده با هدف اول بسیار زیادتر از دانشجویان دیگر با هدف دوم می‌باشد، و اینکه اغلب یک دانشجو ابتدا روش‌های عناصر محدود را با هدف اول مطالعه نموده و ضمن یافتن علاقه وافر، هدف دوم را نیز دنبال خواهد کرد. یک دانشجو با هدف دوم نیاز دارد که

مطالعات خویش را عمیق‌تر از آنچه که در این کتاب در مورد روش‌های عناصر محدود طرح شده دنبال نماید، با وجود این امید است که کتاب حاضر یک پایه قوی برای مطالعات بعدی باشد و فلسفه موجود در این نوشتار در خصوص استفاده و تحقیق در مورد روش‌های عناصر محدود معتبر وارجدار شمرده شود.

این کتاب با هدف فراهم نمودن یک بررسی و مطالعه گسترده در مورد روش‌های عناصر محدود نوشته نشده است، زیرا برای چنین بررسی گسترده‌ای یک جلد بسیار جامع مورد نیاز خواهد بود. در واقع کتاب حاضر روش خاصی را برای ارائه روش‌های عناصر محدود در پیش گرفته است و تنها روش‌های معینی را ارائه می‌نماید.

به نظر می‌رسد که روش‌های عناصر محدودی که در این کتاب در روی آنها تأکید شده است، تکنیک‌های مؤثری می‌باشند که می‌توان آنها را در مهندسی مورد استفاده قرار داد (و در حقیقت به طور وسیعی نیز به کار برده می‌شوند). همچنین این روش‌ها به عنوان روش‌های بنیادی و مهم مورد توجه واقع شده و احتمالاً در سالهای آینده نیز مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

این موضوع که از کدام روش‌ها باید استفاده شود و کدام تکنیک‌ها را می‌توان به بهترین صورت در عمل مهندسی به کار برد، از آن جهت حائز اهمیت است که در تحلیل‌ها تنها باید از تکنیک‌های قابل اطمینان استفاده شود (ر.ک. به: بخش ۱.۳) و کتاب حاضر بررسی‌های خود را روی چنین روش‌هایی متمرکز خواهد کرد.

در ارائه روش‌های عناصر محدود سعی خواهد شد که مفاهیم و معادلات بنیادی با تأکید بر توضیح فیزیکی شرح داده شوند. به علاوه مثال‌های کوتاهی جهت اثبات مفاهیم پایه‌ای مورد استفاده، ارائه می‌شوند و تمریناتی نیز برای محاسبات دستی و استفاده از یک برنامه کامپیوتری عناصر محدود فراهم گردیده‌اند.

عقاید و نظراتی که قبلاً ارائه شده، منجر به چنین پیشنهادی جهت مطالعه روش‌های عناصر محدود شده است. اگر هدف اول دنبال شود، فرمول‌بندی‌های پایه‌ای، خواص عناصر محدود و الگوریتم‌های حل و موضوعات همگرایی و کارایی نظر خواننده را به خود جلب خواهند کرد.

نکته مهمی که نباید فراموش کرد این است که روش‌های عناصر محدود برای حل یک مدل ریاضی مورد استفاده قرار می‌گیرند (با خطاهای حل که به طور معقولی کوچک می‌باشند) (ر.ک. به: بخش ۱.۲). از این رو، این نکته حائز اهمیت است که یک استفاده کننده برنامه کامپیوتری عناصر محدود بتواند همواره قادر باشد که در مورد کیفیت نتایج حاصله از تحلیل عناصر محدود قضاوت نماید. در کتاب حاضر خواهیم دید که چگونه چنین قضاوتی به طور مناسب می‌تواند انجام گیرد.

با وجود این اگر هدف دوم دنبال شود ژرف‌کاوی بسیار زیادی در فرمول‌بندی‌ها و الگوریتم‌های عددی باید به عمل آید. این نوشتار یک پایه وسیعی را برای چنان مطالعاتی فراهم

می‌نماید (البته تمامی جزئیات استخراج فرمول‌بندی‌ها و پیاده‌سازی آنها را به دست نمی‌دهد). در هر حال اعتقاد داریم که برای مطالعه روش‌های عناصر محدود، استفاده از یک برنامه کامپیوتری عناصر محدود به هنگام یادگیری تئوری و روش‌های عددی تأثیر بسزایی دارد. بنابراین در همان حال که مفاهیم تئوریک مورد مطالعه قرار می‌گیرند، امکان آزمون و اثبات این مفاهیم در کامپیوتر نیز فراهم خواهد بود.

بر اساس مبانی کتاب حاضر، در ارتباط با نوع هدف می‌توان دوره‌های متنوعی را جهت تدریس در نظر گرفت. دوره اول «مقدمه‌ای بر تحلیل عناصر محدود» خواهد بود که می‌تواند بر اساس بخش‌های ۱.۱ الی ۱.۴، ۲.۱ الی ۲.۳، ۳.۱ الی ۳.۴، ۴.۱ الی ۴.۳، ۵.۱ الی ۵.۳ و ۸.۱ الی ۸.۲.۲ استوار باشد.

یک دوره تدریس خیلی پیشرفته‌تر، «روش‌های عناصر محدود» مبتنی بر بخش‌های ۱.۱ الی ۱.۴، ۳.۱، ۳.۳، ۴.۱ الی ۴.۴، ۵.۱ الی ۵.۶ و ۸.۱ الی ۸.۳ خواهد بود.

یک دوره تدریس در مورد روش‌های عناصر محدود برای تحلیل دینامیکی، «روش‌های کامپیوتری در دینامیک» خواهد بود که می‌تواند بر اساس بخش‌های ۱.۱ الی ۱.۴، ۲.۱ الی ۲.۷، ۳.۱، ۳.۳، ۴.۱، ۴.۲، ۵.۱ الی ۵.۳، ۸.۱ الی ۸.۲.۲، ۹.۱ الی ۹.۴، ۱۰.۱، ۱۰.۲، ۱۱.۱، ۱۱.۲.۱، ۱۱.۳.۱ و ۱۱.۶ استوار باشد.

یک دوره تدریس با تأکید بر اصول مکانیک محیط‌های پیوسته برای تحلیل عناصر محدود خطی و غیرخطی، «نظریه و عمل مکانیک محیط‌های پیوسته» خواهد بود که می‌تواند بر اساس بخش‌های ۱.۱ الی ۱.۴، ۳.۱، ۳.۳، ۴.۱، ۴.۲.۱، ۴.۲.۲، ۵.۱، ۵.۲، ۵.۳.۱، ۵.۳.۳، ۵.۳.۵، ۶.۱، ۶.۲، ۶.۳.۱، ۶.۳.۲، ۶.۴.۱، ۶.۶، ۷.۱ و ۷.۴ استوار باشد.

یک دوره تدریس در مورد تحلیل مسایل «میدانی و جریان سیالات» خواهد بود که می‌تواند بر شالوده بخش‌های ۱.۱ الی ۱.۴، ۳.۱، ۳.۳، ۷.۱ الی ۷.۴، ۵.۳، ۵.۵ و ۴.۵.۱ الی ۴.۵.۶ مبتنی باشد. در این دوره ابتدا فرمول‌بندی عناصر محدود (بخش ۷.۱ الی ۷.۴) ارائه خواهد شد و سپس شیوه‌های عددی و نتایج ریاضی مورد بحث قرار خواهند گرفت.

یک دوره تدریس در مورد تحلیل غیرخطی عناصر محدود جامدات و سازه‌ها، «تحلیل غیرخطی جامدات و سازه‌ها» خواهد بود که می‌تواند بر اساس بخش‌های ۱.۱ الی ۱.۴، ۶.۱ الی ۶.۸، ۸.۱ و ۸.۴.۱ مبتنی باشد.

یک دوره تدریس در مورد روش‌های عددی مورد استفاده در تحلیل عناصر محدود، «روش‌های عددی در تحلیل عناصر محدود» خواهد بود که می‌تواند بر اساس بخش‌های ۱.۱ الی ۱.۴، ۲.۱ الی ۲.۷، ۴.۱، ۴.۲.۱، ۵.۱، ۵.۳، ۵.۵، ۸.۱ الی ۸.۴، ۹.۱ الی ۹.۶، ۱۰.۱ الی ۱۰.۳ و ۱۱.۱ الی ۱۱.۶ استوار باشد.

و سرانجام، یک دوره تدریس در مورد جنبه‌های تئوریک محض تحلیل عناصر محدود

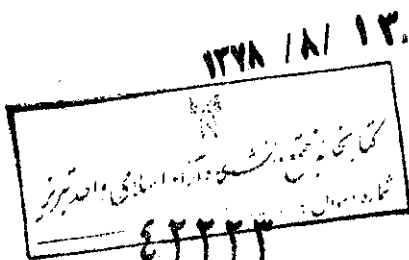
می‌تواند با عنوان «جنبه‌های تئوریک تحلیل عناصر محدود» ارائه گردد که بر اساس بخشهای ۱.۱ الی ۱.۴، ۴.۱ الی ۴.۵ و ۵.۱ الی ۵.۵ مبتنی خواهد بود.

در تمام این دوره‌های تدریس، استفاده از مطالب ارائه شده در فصل دوازدهم سودمند خواهد بود.

عموماً چنین دوره‌هایی هنگامی به بهترین صورت تدریس می‌شوند که توأم با دو مورد باشند: نخست انجام تکلیف که شامل مسأله می‌باشد و نمونه‌هایی از این مسائل در بخشهای تمرین این کتاب ارائه شده‌اند، و دوم انجام کامل یک پروژه که در آن از یک برنامه کامپیوتری عناصر محدود استفاده می‌گردد. پروژه‌های متنوعی در بخش‌های تمرین این کتاب پیشنهاد شده است. یک نمونه از این پروژه‌ها دانشجو را ملزم می‌سازد که از برنامه STAP استفاده کند و آن را برای ایجاد قابلیت‌های جدید آنگونه که در بخش ۱۲.۵ پیشنهاد شده است اصلاح نماید. چنین پروژه‌ای برای دانشجویانی که علاقمند به یادگیری دربارهٔ جزئیات عملی پیاده‌سازی روشهای عناصر محدود هستند ارزشمند خواهد بود.

نمونه دیگر از این پروژه‌ها بر اساس استفاده از یک برنامه استاندارد (تجاری) عناصر محدود برای تحلیل یک مسأله فیزیکی جالب استوار است. چنین برنامه‌هایی ممکن است در مهندسی مورد استفاده قرار گیرند. یک طریقه ارزشمند دیگر این است که ابتدا یک مدل ریاضی را که جواب کامل تحلیلی آن مشخص است حل نموده سپس جنبه‌های پیچیده‌ای به مدل مذکور اضافه می‌شود، بگونه‌ای که حل عددی آن الزامی می‌گردد. بدین طریق، مطالعاتی در جهت استفاده از گسسته‌سازی‌های مختلف عناصر محدود انجام می‌گردد و شیوه‌های مختلف حل به کار گرفته شده، نتایج حاصله با جواب کامل مقایسه می‌شوند؛ همین امر موجب ایجاد اطمینان در استفاده از این روشها می‌گردد. این تخصص و اطمینان مورد نیاز، بعداً سرمایه و اندوخته ارزشمندی در حل عناصر محدود مدل‌های ریاضی بسیار پیچیده می‌شود.

این نکته حائز اهمیت است که به هنگام مطالعه روش‌های عناصر محدود، باید قدرت داوری لازم در کیفیت هرگونه حل عناصر محدود و مدل‌های ریاضی مورد نظر در دانشجو ایجاد شود و مورد تمرین و ممارست قرار گیرد. البته لازمه چنین داوری‌هایی برای تحلیل‌گر آن است که با مدل‌های ریاضی و روش‌های عناصر محدود آشنایی کافی داشته باشد و این امر موجب ایجاد انگیزه برای یادگیری مدل‌ها و روش‌های حل عناصر محدود می‌گردد. ارزش استفاده از یک برنامه کامپیوتری عناصر محدود - نظیر برنامه STAP یا یک برنامه کامپیوتری تجاری عناصر محدود بگونه‌ای که پیش از این ذکر شد - در ایجاد انگیزه در فرایند یادگیری است، و می‌تواند میزان درک آنچه را که در کلاس و از حل تمرین‌ها حاصل شده است تقویت نماید؛ بویژه یک برنامه قوی تحلیل، حل واقعی مسائل پیچیده‌ای را که تاکنون حل آنها امکان‌پذیر نبوده است جالب‌تر می‌کند.



فصل دوم

بردارها، ماتریس‌ها و تانسورها

۲.۱ مقدمه

استفاده از بردارها، ماتریس‌ها و تانسورها در تحلیل مهندسی اهمیت بنیادی دارد؛ چون تنها در پرتو استفاده از این کمیت‌ها است که فرایند حل را می‌توان به اختصار و با ظرافت بیان کرد. در فصل حاضر مبانی ماتریس‌ها و تانسورها را موضوع مطالعه قرار می‌دهیم، و به آن بخشی که در تحلیل عناصر محدود اهمیت بیشتری دارند، تأکید می‌کنیم.

در بدو امر ماتریس‌ها را می‌توان صرفاً به عنوان آرایه‌های مرتبی از اعداد در نظر گرفت که تحت تأثیر قواعد ویژه جمع، ضرب و غیره قرار می‌گیرند. مسلماً آشنایی عمیق با این قواعد حائز اهمیت است؛ از اینرو در بخش حاضر به مطالعه قواعد مزبور می‌پردازیم.

جنبه‌های بسیار جالب ماتریس‌ها و جبر ماتریسی هنگامی ارزش خود را نشان می‌دهند که نحوه استخراج عناصر ماتریس‌ها در تحلیل یک مسأله فیزیکی مورد مطالعه قرار گیرد و همچنین علت کاربرد عملی جبر ماتریسی مشخص شود. در این ارتباط استفاده از تانسورها و نمایش ماتریسی آنها اهمیت داشته و موضوع بسیار جالبی برای مطالعه می‌باشند.

البته در این فصل به بحث نسبتاً محدودی در مورد ماتریس‌ها و تانسورها می‌پردازیم ولی امیدواریم که در نتیجه برخورد عملی متمرکز با این مفاهیم، شالوده استواری برای فهم فرمول‌بندی عناصر محدود فراهم و ارائه شود.

۲.۲ مقدمه‌ای بر ماتریس‌ها

مؤثر بودن استفاده از ماتریس‌ها در محاسبات عملی با ملاحظه حل یک مجموعه معادلات خطی همزمان نظیر مجموعه زیر به سادگی مشخص می‌شود:

$$\begin{aligned} 5x_1 - 4x_2 + x_3 &= 0 \\ -4x_1 + 6x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - 4x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 0 \\ x_2 - 4x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

که در آنها x_1, x_2, x_3, x_4 مجهول می‌باشند. با استفاده از نماد ماتریسی، این مجموعه معادلات به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

که در آنها به طور نسبتاً منطقی، ضرایب مجهولات (5, -4, 1 و غیره) در یک آرایه گروه‌بندی شده، مجهولات سمت چپ (x_1, x_2, x_3, x_4) و مقادیر معلوم سمت راست نیز در آرایه‌های دیگری گروه‌بندی گردیده‌اند. گرچه روابط مذکور به گونه متفاوتی نوشته شده‌اند، ولی باز هم رابطه (۲.۲) شبیه رابطه (۲.۱) می‌باشد. با وجود این، با استفاده از نمادهای ماتریسی برای نمایش آرایه‌های موجود در (۲.۲) مجموعه معادلات همزمان را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad (2.3)$$

که در آن \mathbf{A} ماتریس ضرایب مجموعه معادلات خطی، \mathbf{x} ماتریس مجهولات و \mathbf{b} ماتریس مقادیر معلوم می‌باشند. یعنی:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

حال به نظر می‌رسد که بتوان تعریف زیر را برای "ماتریس" ارائه داد:

تعریف: یک ماتریس آرایه‌ای از اعداد مرتب است. یک ماتریس عمومی شامل mn عدد می‌باشد که در m سطر و n ستون مرتب شده‌اند و به صورت زیر نشان داده می‌شود:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad (۲.۵)$$

ماتریس مزبور ماتریسی است که مرتبه $m \times n$ (در n) را دارا می‌باشد. موقعی که ماتریس صرفاً دارای یک سطر ($m = ۱$) یا یک ستون ($n = ۱$) می‌باشد، A یک بردار خوانده می‌شود. در این کتاب عموماً ماتریس‌ها با حروف درشت و بزرگ و بردارها با حروف درشت و کوچک یا درشت و بزرگ نمایش داده می‌شوند. بنابراین آرایه‌های زیر ماتریس می‌باشند:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5.3 \\ 3 & 2.1 & 6 \end{bmatrix}; \quad [6.1 \quad 2.2 \quad 3] \quad (۲.۶)$$

که در آن ماتریس سمت چپ، یک بردار ستونی و ماتریس سمت راست یک بردار سطری می‌باشد.

یک عنصر نمونه در سطر i ام و ستون j ام ماتریس A با a_{ij} مشخص می‌شود، به عنوان مثال در اولین ماتریس در (۲.۴)، $a_{11} = ۵$ و $a_{12} = -۴$ می‌باشند. در عناصر a_{ij} در (۲.۵) زیرنویس i از ۱ شروع شده تا m ادامه پیدا می‌کند و زیرنویس j نیز از ۱ تا n می‌باشد. در مواردی که امکان دارد نظم زیرنویس‌ها به هم خورد مابین آنها از یک ویرگول استفاده خواهد شد، به عنوان مثال $a_{1+n, j+s}$ یا برای نشان دادن مشتق‌گیری (ر.ک. به: فصل ششم).

در عمل سودمندی ماتریس‌ها غالباً از این واقعیت ناشی می‌شود که با استفاده از یک نماد ساده، شناسایی و به کارگیری آرایه‌ای شامل تعداد زیادی اعداد امکان‌پذیر می‌باشد. ما در این کتاب بر مبنای این شیوه به طور وسیعی از ماتریس‌ها استفاده خواهیم نمود.

ماتریسهای مقارن، قطری و نواری - طرحی برای انبار

در تمامی مواردی که عناصر یک ماتریس از قانون ویژه‌ای تبعیت می‌کنند، ماتریس مزبور به عنوان ماتریسی که صورت خاصی را دارا می‌باشد در نظر گرفته می‌شود. یک ماتریس حقیقی ماتریسی است که همه عناصر آن حقیقی می‌باشند. یک ماتریس مختلط دارای عناصری است که امکان دارد مختلط باشند. ما فقط با ماتریس‌های حقیقی سروکار خواهیم داشت؛ به علاوه ماتریس‌ها اغلب مقارن خواهند بود.

تعریف: ترانزاده یک ماتریس $m \times n$ A ، که به صورت A^T نوشته می‌شود، از تعویض سطرها و ستونهای ماتریس A حاصل می‌شود. اگر $A = A^T$ باشد، نتیجه می‌شود که

تعداد سطرها و ستونها در ماتریس A مساوی بوده و $a_{ij} = a_{ji}$. از آنجا که $m = n$ می‌باشد، گفته می‌شود که A یک ماتریس مربعی از مرتبه n می‌باشد و چون $a_{ij} = a_{ji}$ می‌باشد، ماتریس A یک ماتریس متقارن می‌باشد. باید دانست که تقارن به طور ضمنی دلالت بر این می‌کند که ماتریس A یک ماتریس مربعی است؛ اما عکس آن صادق نیست، یعنی یک ماتریس مربعی ضرورتاً یک ماتریس متقارن نمی‌باشد. به عنوان مثال، ماتریس ضرایب A در (۲.۲) یک ماتریس متقارن از مرتبه ۴ می‌باشد. می‌توان به آسانی با کنترل اینکه $a_{ij} = a_{ji}$ به ازای $i, j = 1, \dots, 4$ ، اثبات نمود که $A^T = A$

یک ماتریس خاص دیگر، ماتریس همانی (یا واحد) I_n می‌باشد که یک ماتریس مربعی از مرتبه n است و عناصر غیرقطری آن صفر و عناصر قطری آن واحد می‌باشند. به عنوان مثال ماتریس واحد از مرتبه ۳ به صورت زیر می‌باشد:

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

در محاسبات عملی، مرتبه یک ماتریس همانی به طور ضمنی ارائه می‌شود و زیرنویس نوشته نمی‌شود. مانند ماتریس همانی، بردارهای همانی (یا واحد) نیز که به صورت e_i نوشته می‌شوند، مورد استفاده قرار می‌گیرند و اندیس پایین i در آن نشان می‌دهد که بردار مزبور، ستون i ام یک ماتریس همانی می‌باشد.

ماتریس‌های نواری متقارن را به طور وسیع به کار خواهیم برد. منظور از نواری بودن ماتریس این است که تمامی عناصر خارج از عرض نوار ماتریس صفر می‌باشند. از آنجا که A متقارن است، شرط مزبور را به صورت زیر بیان کنیم:

$$a_{ij} = 0 \quad \text{for } j > i + m_A \quad (2.8)$$

که در آن $2m_A + 1$ عرض نوار ماتریس A است. به عنوان مثال، ماتریس زیر یک ماتریس نواری متقارن از مرتبه ۵ می‌باشد. نیمه عرض نوار m_A ، ۲ است:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 6 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

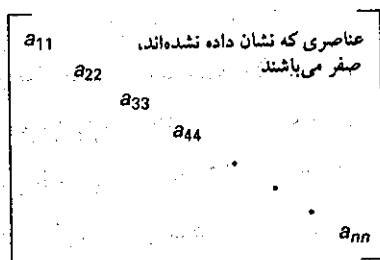
اگر نیمه عرض نوار ماتریسی صفر باشد، در این صورت عناصر غیر صفر آن تنها در قطر ماتریس قرار دارند و آن را ماتریس قطری می‌نامیم. به عنوان مثال، ماتریس همانی یک ماتریس قطری می‌باشد.

در محاسبات کامپیوتری با استفاده از ماتریس‌ها، به کارگیری روشی برای ذخیرهٔ عناصر ماتریس‌ها در یک انباره با سرعت بالا ضرورت دارد. یک روش ساده برای انبارسازی عناصر یک ماتریس A از مرتبهٔ $m \times n$ ، استفاده از یک آرایهٔ $A(M, N)$ در یک برنامه FORTRAN می‌باشد که در آن آرایه $M = m$ و $N = n$ بوده و هر عنصر ماتریسی a_{ij} در مکان $A(I, J)$ انباره، ذخیره می‌گردد. با وجود این در بسیاری از محاسبات، هنگامی که از این شیوهٔ انبارش استفاده می‌شود، عناصر صفر زیادی از ماتریس A به وجهی غیر ضروری انبار می‌گردند که نیازی به آنها در محاسبات نیست. همچنین اگر ماتریس A متقارن باشد، احتمالاً می‌توان از تقارن ماتریس بهره گرفت و فقط نیمهٔ بالایی ماتریس را که شامل عناصر قطری هم باشد انبار نمود. غالباً تنها تعداد محدودی از مکانها در انباره با سرعت بالا در دسترس می‌باشد، از این رو برای انبار نمودن ماکزیمم اندازهٔ ممکن از ماتریس در هستهٔ اصلی انباره با سرعت بالا، ضروری است که از یک طرح مؤثر انبارسازی استفاده شود. اگر ماتریس به اندازه‌ای بزرگ باشد که در انباره با سرعت بالا جا نگیرد، در این صورت فرایند حل شامل خواندن و نوشتن اطلاعات در انبارهٔ ثانوی خواهد بود که می‌تواند به طور قابل توجهی هزینهٔ حل را بالا ببرد. خوشبختانه در تحلیل عناصر محدود، ماتریس‌های سیستم متقارن و نواری می‌باشند. بنابراین با استفاده از یک طرح مؤثر انبارسازی، ماتریسهای از مرتبهٔ نسبتاً بالاتر را می‌توان در هستهٔ اصلی انباره با سرعت بالا ذخیره نمود.

عنصر I ام در آرایهٔ یک بعدی انباره را با $A(I)$ نشان می‌دهیم. یک ماتریس قطری از مرتبهٔ n را به آسانی می‌توان بگونه‌ای که در شکل (الف) ۲.۱ نشان داده شده است انبار نمود:

$$A(I) = a_{ii}; \quad I = i = 1, \dots, n \quad (2.10)$$

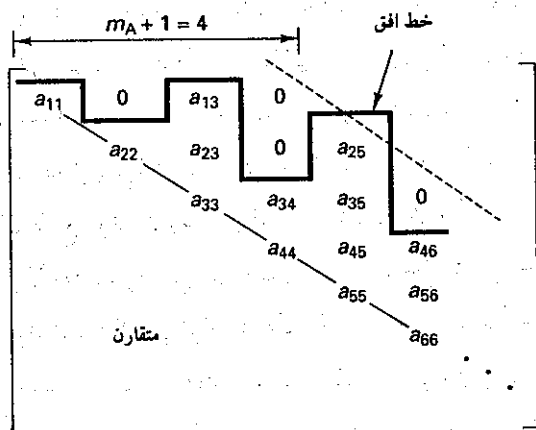
یک ماتریس نواری را که در شکل (ب) ۲.۱ نشان داده شده است در نظر می‌گیریم. بعداً خواهیم دید که عناصر صفر واقع در درون «خط افق» ماتریس ممکن است که در فرایند حل به عناصر غیر صفر تبدیل شوند؛ به عنوان مثال a_{35} ممکن است که یک عنصر صفر باشد اما در طی روند تحلیل، غیر صفر گردد (ر.ک. به: بخش ۸.۲.۳). بنابراین مکانهایی از انباره را به عناصر صفر واقع در درون «خط افق» اختصاص می‌دهیم، اما نیازی به انبار نمودن عناصر صفر خارج از «خط افق» نیست. طرح انبارسازی که در تحلیل عناصر محدود مورد استفاده قرار خواهد گرفت، در شکل ۲.۱ نشان داده شده است و بعداً در فصل دوازدهم شرح داده خواهد شد.



$$A(1) = a_{11}, A(2) = a_{22}, A(3) = a_{33}$$

$$A(4) = a_{44}, \dots, A(N) = a_{nn}$$

(الف) ماتریس قطری



$$A(1) = a_{11}, A(2) = a_{22},$$

$$A(3) = a_{33}, A(4) = a_{23},$$

$$A(5) = a_{13}, A(6) = a_{44},$$

$$A(7) = a_{34}, A(8) = a_{55},$$

$$A(9) = a_{45}, A(10) = a_{35},$$

$$A(11) = a_{25}, A(12) = a_{66},$$

etc.

(ب) ماتریس نواری و $m_A = 3$

شکل ۲-۱ انبارسازی ماتریس A در یک آرایه یک بعدی

تساوی ماتریس‌ها، جمع ماتریس‌ها، حاصل ضرب یک اسکالر در ماتریس‌ها

ماتریس‌ها به عنوان آرایه‌ای مرتب از عددها تعریف شدند که می‌توان آنها را با نمادهای واحدی مشخص نمود. برای اینکه بتوانیم همانند اعداد معمولی با ماتریس‌ها کار کنیم لازم است قواعدی، مشابه قواعدی که در مورد تساوی، جمع، تفریق، ضرب و تقسیم اعداد معمولی صادق می‌باشند برای ماتریس‌ها تعریف نماییم. ما صرفاً قواعد ماتریسی را بیان می‌کنیم و نیازی به ذکر علت استفاده از آنها نمی‌بینیم. ولی منطق استفاده از این قواعد بعداً ذکر خواهد شد و خواهیم دید که قواعد مزبور دقیقاً قواعدی هستند که جهت استفاده از ماتریس‌ها در حل مسائل عملی مورد نیاز می‌باشند. برای تساوی و جمع ماتریس‌ها و نیز حاصل ضرب یک اسکالر در ماتریس‌ها، تعاریف زیر ارائه می‌گردند:

تعریف: ماتریس‌های A و B هنگامی برابرند که اگر و فقط اگر:

- ۱- تمامی سطرها در ستونهای A و B مساوی باشند.
- ۲- تمامی عناصر متناظر با همدیگر مساوی باشند، یعنی: به ازای کلیه i و j ها،
 $a_{ij} = b_{ij}$.

تعریف: ماتریس‌های A و B می‌توانند با همدیگر جمع شوند اگر و فقط اگر تعداد سطرها و ستونهای هر دو ماتریس برابر باشند. جمع دو ماتریس از جمع تمامی عناصر متناظر حاصل می‌شود، یعنی اگر a_{ij} و b_{ij} به ترتیب عناصر ماتریسهای A و B را نمایش دهند، $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ عناصر ماتریس C را نشان می‌دهد به گونه‌ای که $C = A + B$ می‌باشد. همچنین نتیجه می‌شود که تعداد سطرها و ستونهای ماتریس C مساوی تعداد سطرها و ستونهای ماتریسهای A و B می‌باشد.

مثال ۲.۱: $C = A + B$ را محاسبه کنید در حالی که:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0.5 & 3 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{حل:}$$

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 3 \\ 2.5 & 7 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{C به صورت زیر بدست می‌آید:}$$

باید دانست که مهم نیست که ماتریس‌ها به چه ترتیبی با همدیگر جمع می‌شوند. تفریق ماتریس‌ها نیز به روش مشابه جمع ماتریس‌ها تعریف می‌گردد.

مثال ۲.۲: $C = A - B$ را محاسبه کنید. A و B در مثال ۲.۱ داده شده‌اند.

حل:

$$C = A - B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1.5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

از تعریف تفریق ماتریس‌ها می‌توان نتیجه گرفت که حاصل تفریق یک ماتریس از خودش، ماتریسی با عناصر صفر می‌باشد. به چنین ماتریسی ماتریس صفر 0 اطلاق می‌شود. اینک حاصل ضرب یک اسکالر در یک ماتریس را بررسی می‌نماییم.

تعریف: ضرب یک اسکالر در یک ماتریس بدین‌گونه صورت می‌گیرد که هر عنصر ماتریس در آن اسکالر ضرب می‌شود؛ منظور از $C = kA$ این است که $c_{ij} = k.a_{ij}$. مثال زیر، تعریف مزبور را نشان می‌دهد:

مثال ۲.۳: $C = kA$ را محاسبه کنید در حالی که:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0.5 & 3 & 0 \end{bmatrix}; \quad k = 2$$

حل:

$$C = kA = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

داریم:

باید دانست که تاکنون، تمام تعاریف ارائه شده برای ماتریسها کاملاً مانند تعاریفی

می‌باشند که در مورد اعداد معمولی مورد استفاده قرار می‌گیرند. همچنین برای جمع (یا تفریق) دو ماتریس عمومی از مرتبه $n \times m$ ، انجام nm عملیات جمع (یا تفریق) ضروری است و برای ضرب یک اسکالر در یک ماتریس عمومی از مرتبه $n \times m$ نیز تعداد nm عملیات ضرب لازم است. بنابراین هنگامی که ماتریس‌ها دارای صورت خاصی - نظیر ماتریس متقارن یا نواری - می‌باشند، باید از این وضعیت استفاده کرد و تنها عناصر واقع در پایین «خط افق» ماتریس C را در عملیات محاسباتی وارد نمود، زیرا سایر عناصر ماتریسی صفر می‌باشند.

ضرب ماتریسها

دو ماتریس A و B را در نظر گرفته و می‌خواهیم حاصل ضرب ماتریسی $AB = C$ را پیدا کنیم. تعریف: دو ماتریس A و B هنگامی در همدیگر می‌توانند ضرب شوند که اگر و فقط اگر تعداد ستونهای ماتریس A مساوی تعداد سطرهاى ماتریس B باشد. فرض کنید که A ماتریسی از مرتبه $p \times m$ و ماتریس B از مرتبه $m \times q$ می‌باشد. پس برای عنصر ماتریس C می‌توان نوشت:

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^m a_{ir} b_{rj} \quad (2.11)$$

که C ماتریسی از مرتبه $p \times q$ می‌باشد. یعنی اندیس‌های i و j در (۲.۱۱) به ترتیب از ۱ تا p و از ۱ تا q تغییر می‌کنند.

بنابراین برای محاسبه عنصر (i, j) ام در ماتریس C ، عناصر واقع در سطر i ام ماتریس A در عناصر واقع در ستون j ام ماتریس B ضرب و تمامی حاصل ضرب‌های انفرادی با همدیگر جمع می‌شوند. با گرفتن حاصل ضرب هر سطر ماتریس A و هر ستون ماتریس B نتیجه می‌شود که ماتریس C باید از مرتبه $p \times q$ باشد.

مثال ۲.۴: حاصل ضرب ماتریسی $AB = C$ را محاسبه کنید در صورتی که:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

حل:

$$c_{11} = (5)(1) + (3)(2) + (1)(3) = 14$$

$$c_{21} = (4)(1) + (6)(2) + (2)(3) = 22$$

$$c_{31} = (10)(1) + (3)(2) + (4)(3) = 28 \quad \text{etc.}$$

بنابراین ماتریس C به صورت زیر حاصل می‌گردد:

$$C = \begin{bmatrix} 14 & 39 \\ 22 & 48 \\ 28 & 70 \end{bmatrix}$$

به آسانی می‌توان نشان داد که تعداد عملیات ضرب مورد نیاز در این ضرب ماتریسی $p \times q \times m$ می‌باشد. با وجود این هنگام کار کردن با ماتریس‌ها در عمل اغلب می‌توان تعداد عملیات را با بهره‌گیری از عناصر صفر در درون ماتریس‌ها کاهش داد.

مثال ۲.۵: حاصل ضرب ماتریس $C = A \times B$ را محاسبه کنید، در صورتی که:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ & 2 & -1 & 0 \\ & & 2 & -1 \\ \text{symmetric} & & & 1 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

حل:

در این مثال می‌توان از این نکته که عرض نوار ماتریس A ، ۳ می‌باشد بهره گرفت، یعنی $m_A = 1$. بنابراین با در نظر گرفتن صرفاً عناصر درون نوار A ، داریم:

$$c_1 = (2)(4) + (-1)(1) = 7$$

$$c_2 = (-1)(4) + (2)(1) + (-1)(2) = -4$$

$$c_3 = (-1)(1) + (2)(2) + (-1)(3) = 0$$

$$c_4 = (-1)(2) + (1)(3) = 1$$

$$c = \begin{bmatrix} 7 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین

می‌دانیم که ضرب اعداد معمولی تعویض پذیر است، یعنی $ab = ba$. اکنون بررسی این نکته لازم است که آیا ضرب ماتریسی هم تعویض پذیر است یا نه؟ اگر ماتریس‌های زیر را در نظر بگیریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad B = [3 \quad 4] \quad (2.12)$$

داریم:

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}; \quad BA = [11] \quad (2.13)$$

بنابراین حاصل ضرب‌های AB و BA یکسان نیستند، از اینرو نتیجه می‌شود که ضرب ماتریسی تعویض پذیر نیست. در حقیقت برحسب مرتبه ماتریس‌های A و B ، مرتبه حاصل ضرب ماتریس‌های AB و BA می‌تواند متفاوت باشد و نیز حاصل ضرب ماتریسی AB ممکن است قابل تعریف باشد در حالی که امکان دارد حاصل ضرب ماتریسی BA قابل محاسبه نباشد. برای مشخص نمودن ترتیب ضرب ماتریس‌ها می‌توان گفت که در حاصل ضرب

ماتریسی AB ماتریس A در B پیش ضرب شده و یا ماتریس B در A پس ضرب می‌شود. اگرچه در حالت عمومی $AB \neq BA$ ، است ولی برای حالات خاص A و B ، ممکن است که $AB = BA$ بشود؛ که در این صورت گفته می‌شود که ماتریس A و B تعویض می‌گردند. گرچه قانون تعویض پذیری در ضرب ماتریسی صادق نیست، ولی قوانین توزیع پذیری و شرکت پذیری در ضرب ماتریس‌ها معتبر هستند. قانون توزیع پذیری بیان می‌کند که:

$$E = (A + B)C = AC + BC \quad (2.14)$$

به عبارت دیگر امکان دارد که ابتدا ماتریس A و B با همدیگر جمع شده و سپس در C ضرب شوند و یا ممکن است که ابتدا ماتریس‌های A و B در C ضرب شده و سپس با همدیگر جمع شوند. باید دانست که اگر تعداد عملیات مورد نظر باشد، محاسبه E با جمع A و B در ابتدا، بسیار اقتصادی‌تر است و این نکته باید در طراحی برنامه تحلیل در نظر گرفته شود. قانون توزیع پذیری با استفاده از (۲.۱۱) اثبات می‌شود، به عبارت دیگر با استفاده از:

$$e_{ij} = \sum_{r=1}^m (a_{ir} + b_{ir})c_{rj} \quad (2.15)$$

نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$e_{ij} = \sum_{r=1}^m a_{ir}c_{rj} + \sum_{r=1}^m b_{ir}c_{rj} \quad (2.16)$$

قانون شرکت پذیری بیان می‌کند که:

$$G = (AB)C = A(BC) = ABC \quad (2.17)$$

به عبارت دیگر ترتیب حاصل ضرب ماتریس‌ها اهمیتی ندارد. این نکته با استفاده از تعریف ضرب ماتریسی در (۲.۱۱) و محاسبه یک عنصر عمومی از ماتریس G به دو طریق، اثبات می‌گردد.

از آنجا که قانون شرکت پذیری در ضرب ماتریسی صادق است، در عمل می‌توان زنجیره‌ای از ضرب‌های ماتریسی را با یک دنباله دلخواه انجام داد و با انتخاب هوشیارانه دنباله مذکور غالباً می‌توان تعداد عملیات را کاهش داد. تنها نکته‌ای که نباید فراموش شود این است که هنگام به کارگیری ماتریس‌ها می‌توان پراترها را حذف یا درج نمود و نیز توان‌ها را می‌توان ترکیب کرد، ولی ترتیب ضرب ماتریسی باید حفظ شود.

مثالهای زیر را برای نشان دادن استفاده از قوانین شرکت پذیری و توزیع پذیری در آسان نمودن انجام زنجیره‌ای از ضربهای ماتریسی در نظر می‌گیریم.

مثال ۲.۶: A^4 را محاسبه کنید که:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

حل:

یک طریقه ساده برای تعیین A^4 انجام محاسبات زیر است:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}$$

بنابراین

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{bmatrix}$$

و

$$A^4 = A^3 A = \begin{bmatrix} 15 & 20 \\ 20 & 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 75 \\ 75 & 125 \end{bmatrix}$$

طریقه دیگر برای تعیین A^4 عبارت است از:

$$A^4 = A^2 A^2 = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 75 \\ 75 & 125 \end{bmatrix}$$

و بدین طریق یک ضرب ماتریسی از عملیات کم می‌شود.

مثال ۲.۷: حاصل ضرب $v^T A v$ را تعیین کنید در صورتی که:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix}; \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

حل:

روش معمول، محاسبه Av می‌باشد، یعنی:

$$x = Av = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix}$$

و سپس باید $v^T x$ محاسبه شود تا $v^T A v$ حاصل می‌گردد:

$$v^T A v = [1 \quad 2 \quad -1] \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ -1 \end{bmatrix} = 23$$

با وجود این محاسبه حاصل ضرب مورد نیاز به صورت زیر مؤثر می‌باشد. نخست

می‌توان نوشت:

$$A = U + D + U^T$$

که در آن U یک ماتریس مثلثی پایینی و D یک ماتریس قطری می‌باشند:

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$v^T A v = v^T (U + D + U^T) v \quad \text{بنابراین داریم:}$$

$$v^T A v = v^T U v + v^T D v + v^T U^T v$$

با وجود این $v^T U v$ یک عدد منفرد می‌باشد و از این رو $v^T U^T v = v^T U v$ است و نتیجه می‌شود که:

$$v^T A v = 2v^T U v + v^T D v \quad (\text{الف})$$

بدین ترتیب کارایی بنیاد بالایی در ضرب ماتریسی با بهره‌گیری از این واقعیت که U یک ماتریس مثلثی پایینی و U یک ماتریس قطری می‌باشد حاصل می‌گردد. فرض کنید $x = Uv$.

در این صورت داریم:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = (2)(1) = 2$$

$$x_3 = (1)(1) + (2)(2) = 5$$

$$x = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} \quad \text{بنابراین}$$

در مرحله بعدی نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$v^T U v = v^T x = (2)(2) + (-1)(5) = -1$$

$$v^T D v = (1)(1)(3) + (2)(2)(4) + (-1)(-1)(6) = 25 \quad \text{همچنین}$$

بنابراین با استفاده از (الف) مانند طریقه پیشین $v^T A v = 23$ به دست می‌آید.

به جز قانون تعویض پذیری که عموماً در ضرب ماتریسی صادق نمی‌باشد، حذف ماتریس‌ها در معادلات ماتریسی نیز نمی‌تواند انجام گیرد، در حالی که عمل حذف اعداد معمولی امکان‌پذیر است. بویژه اگر $AB = CB$ باشد، ضرورتاً ایجاب نمی‌کند که $A = C$. نکته مزبور را می‌توان با ملاحظه یک حالت خاص به آسانی نشان داد:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (2.18)$$

ولی

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

با وجود این باید یادآوری کرد که اگر معادله $AB = CB$ برای تمامی ماتریس‌های ممکن B صادق باشد، در این صورت $A = C$ می‌باشد. به طور مثال در آن حالت، ماتریس B به سادگی به صورت ماتریس همانی I انتخاب می‌شود و بالنتیجه $A = C$ می‌گردد.

نکته دیگری نیز که باید ذکر کرد این است که اگر $AB = 0$ باشد، ایجاب نمی‌کند که یکی از دو ماتریس A یا B ، یک ماتریس صفر باشند. حالت خاصی این نکته را نشان می‌دهد:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; \quad AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

اکنون ضروری است که برخی قواعد خاص در خصوص استفاده از ماتریس‌های ترانهاد شده، در ضرب ماتریسی اشاره شود. ترانهاد حاصل ضرب دو ماتریس A و B مساوی حاصل ضرب ماتریس‌های ترانهاد شده A و B در ترتیبی معکوس می‌باشد، یعنی:

$$(AB)^T = B^T A^T \quad (2.21)$$

رابطه (۲.۲۱) را می‌توان با استفاده از تعریف ارائه شده در (۲.۱۱) برای تعیین یک حاصل ضرب ماتریسی اثبات نمود.

با ملاحظه حاصل ضرب ماتریسی در (۲.۲۱) این نکته باید یادآوری شود که اگرچه ماتریس‌های A و B ممکن است که متقارن باشند، ولی در حالت کلی AB متقارن نیست. با وجود این اگر A متقارن باشد ماتریس $B^T AB$ همواره متقارن است. نکته مذکور را می‌توان با استفاده از (۲.۲۱) اثبات نمود:

$$(B^T AB)^T = (AB)^T (B^T)^T \quad (2.22)$$

$$= B^T A^T B \quad (2.23)$$

ولی، از آنجا که $A^T = A$ است، از اینرو داریم:

$$(B^T AB)^T = B^T AB \quad (2.24)$$

و بنابراین $B^T AB$ متقارن است.

ماتریس معکوس

مشاهده کردیم که جمع و تفریق ماتریس‌ها اساساً با استفاده از قوانین مشابهی که در به کارگیری اعداد معمولی مورد استفاده قرار می‌گیرند انجام می‌شود. با وجود این ضرب ماتریسی کاملاً متفاوت است و لازم است که قواعد ویژه‌ای به کار گرفته شوند. به علاوه تقسیم ماتریسی به هیچ وجه وجود ندارد و در این مورد تنها ماتریس معکوس تعریف می‌گردد. ما تنها معکوس ماتریس‌های مربعی را تعریف نموده و استفاده خواهیم کرد.

تعریف: معکوس یک ماتریس A با A^{-1} نشان داده می‌شود. فرض کنید که معکوس ماتریس A وجود دارد، در این صورت عناصر A^{-1} به گونه‌ای هستند که $AA^{-1} = I$ و $A^{-1}A = I$ می‌باشد. ماتریسی که دارای یک معکوس است، ماتریس غیرتکین خوانده می‌شود. ماتریس بدون معکوس، ماتریس تکین نامیده می‌شود.

همچنان که پیش از این اشاره شد، ضرورت ندارد که معکوس یک ماتریس حتماً وجود داشته باشد. یک مثال بدیهی، ماتریس صفر می‌باشد. فرض کنید که معکوس ماتریس A وجود دارد. در این صورت می‌خواهیم نشان دهیم که هر یک از شرایط $A^{-1}A = I$ یا $AA^{-1} = I$ ، بر دیگری دلالت دارد. فرض کنید که عناصر ماتریسهای A_I^{-1} و A_I^{-1} به گونه‌ای تعیین شده‌اند که $AA^{-1} = I$ و $A_I^{-1}A = I$ باشند. در این صورت داریم:

$$A_I^{-1} = A_I^{-1}(AA_I^{-1}) = (A_I^{-1}A)A_I^{-1} = A_I^{-1} \quad (۲.۲۵)$$

و بنابراین $A_I^{-1} = A_I^{-1}$.

مثال ۲.۸: معکوس ماتریس A را تعیین کنید در حالی که:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

حل:

برای معکوس A ضروری است که $AA^{-1} = I$ باشد. با آزمون و خطا (یا هر طریق دیگر) می‌توان یافت که:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix}$$

می‌توان کنترل کرد که $AA^{-1} = I$ و $A^{-1}A = I$:

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1}A = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

برای محاسبه معکوس حاصل ضرب AB ، مسیر زیر را دنبال می‌کنیم. فرض کنید که $G = (AB)^{-1}$ باشد که در آن هر دو ماتریس A و B ، ماتریس مربعی می‌باشند. در این صورت

$$GAB = I \quad (۲.۲۶)$$

و با پس ضرب در B^{-1} و A^{-1} ، روابط زیر به دست می‌آیند:

$$GA = B^{-1} \quad (۲.۲۷)$$

$$G = B^{-1}A^{-1} \quad (۲.۲۸)$$

بنابراین

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \quad (۲.۲۹)$$

باید دانست هنگامی که ترانواده حاصل ضرب ماتریسی تعیین می‌گردد، چنان که نشان داده شد در آن حالت نیز ماتریس‌ها در ترتیبی معکوس قرار می‌گیرند.

مثال ۲.۹: برای ماتریس‌های A و B داده شده، کنترل کنید که $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ باشد.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

حل:

معکوس ماتریس A در مثال ۲.۸ مورد استفاده قرار گرفت. معکوس ماتریس B نیز به

سادگی به دست می‌آید:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

برای کنترل اینکه $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ، ضروری است که $C = AB$ تعیین گردد:

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 12 \end{bmatrix}$$

فرض کنید که $C^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

برای کنترل این که ماتریس داده شده در (الف) در حقیقت معکوس ماتریس C می‌باشد، $C^{-1}C$ را

تعیین نموده و پیدا می‌کنیم که

$$C^{-1}C = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{15} \\ \frac{1}{20} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 12 \end{bmatrix} = I$$

ولی از آنجا که C^{-1} منحصر به فرد بوده و تنها C^{-1} صحیح رابطه $C^{-1}C = I$ را ارضا می‌کند، در

حقیقت ماتریس پیدا شده در (الف) معکوس ماتریس C می‌باشد و رابطه $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

ارضا می‌گردد.

در مثالهای ۲.۸ و ۲.۹ معکوس ماتریس‌های A و B را می‌توان با استفاده از روش آزمون و

خطا پیدا کرد. با وجود این برای یافتن معکوس یک ماتریس در حالت عمومی داشتن یک

الگوریتم کلی ضرورت دارد. یک طریقه برای محاسبه معکوس ماتریس A از مرتبه n ، حل n

دستگاه معادلات به صورت زیر می‌باشد:

$$AX = I$$

(۲.۳۰)

که در آن I یک ماتریس همانی از مرتبه n بوده و $X = A^{-1}$ می‌باشد. برای حل هر دستگاه

معادلات (۲.۳۰) می‌توانیم از الگوریتم‌های ارائه شده در بخش ۸.۲ استفاده کنیم.

ملاحظات مذکور نشان می‌دهند که یک دستگاه معادلات را می‌توان از طریق محاسبه

معکوس ماتریس ضرایب حل نمود. یعنی اگر داشته باشیم:

$$Ay = c$$

(۲.۳۱)

که در آن A از مرتبه $n \times n$ بوده و y و C از مرتبه $n \times 1$ می‌باشند، در این صورت:

$$y = A^{-1}c \quad (2.32)$$

با وجود این معکوس نمودن ماتریس A بسیار پرهزینه است و بسیار کارا خواهد بود که صرفاً معادلات (۲.۳۱) بدون معکوس نمودن ماتریس A حل شوند (ر.ک. به: بخش هشتم). در حقیقت اگرچه ممکن است به طور نمادی بنویسیم که $y = AC^{-1}$ ، ولی برای تعیین y صرفاً معادلات را حل می‌نماییم.

افراز ماتریسها

جهت آسان نمودن نحوه به کارگیری ماتریسها و بهره گرفتن از صورت خاص ماتریسها ممکن است که افراز یک ماتریس به زیرماتریسها سودمند باشد. یک زیرماتریس، ماتریسی است که از ماتریس اصلی حاصل شده و شامل عناصر سطرها و ستونهای معینی می‌باشد. ایده مذکور با استفاده از یک حالت خاص نشان داده می‌شود که در آن خط‌چین‌ها خطوط افراز می‌باشند:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

یادآوری می‌کنیم که هر خط افراز باید به طور کامل از یک سر به سر دیگر ماتریس اصلی امتداد یابد. ماتریس A بعد از افراز شدن به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

که در آن:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}; \quad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}; \quad (2.35)$$

طرف سمت راست (۲.۳۴) می‌تواند دوباره افراز شود مانند:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

و ماتریس A ممکن است که به صورت زیر نوشته شود:

$$A = [\bar{A}_1 \quad \bar{A}_2]; \quad \bar{A}_1 = \begin{bmatrix} A_{11} \\ A_{21} \end{bmatrix}; \quad \bar{A}_2 = \begin{bmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

افراز ماتریس‌ها می‌تواند در صرفه‌جویی در انبار کامپیوتر سودمند باشد، به عنوان مثال، اگر زیر ماتریس‌ها تکرار بشوند، لازم است که زیر ماتریس صرفاً برای یک بار انبار شود. در عملیات حسابی نیز، افزاز ماتریس‌ها می‌تواند مفید باشد. با استفاده از زیر ماتریس‌ها، ممکن است یک عملیات نمونه را که چندین بار تکرار می‌شود مشخص نماییم، سپس عملیات مزبور را تنها یک بار انجام داده و نتایج را در هر جایی که نیاز باشد مورد استفاده قرار دهیم.

قواعدی که در محاسبات مربوط به ماتریس‌های افزاز شده مورد استفاده قرار می‌گیرند از تعریف جمع و تفریق و ضرب ماتریسی حاصل می‌گردند. با استفاده از ماتریس‌های افزاز شده، می‌توانیم آنها را جمع و تفریق و ضرب کنیم با این فرض که زیر ماتریس‌ها مانند عناصر معمولی ماتریس می‌باشند، البته به شرط اینکه ماتریس‌های اصلی به گونه‌ای افزاز شده باشند که انجام جمع و تفریق و ضرب زیر ماتریس‌ها به صورت انفرادی مجاز باشد.

اگر به ذهن خود بسپاریم که افزاز ماتریس‌های اصلی، تنها وسیله‌ای برای آسان نمودن نحوه به کارگیری ماتریس‌ها بوده و هیچ تغییری در نتایج نمی‌دهد، در این صورت قواعد مربوط به افزاز ماتریس‌ها به آسانی توجیه شده و به خاطر سپرده می‌شوند.

مثال ۲.۱۰: حاصل ضرب ماتریسی $C = AB$ در مثال ۲.۴ را با استفاده از افزاز زیر تعیین کنید.

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 5 & 3 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ \hline 10 & 3 & 4 \end{array} \right]; \quad B = \left[\begin{array}{cc} 1 & 5 \\ 2 & 4 \\ \hline 3 & 2 \end{array} \right]$$

حل:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \quad \text{در اینجا داریم:}$$

$$AB = \begin{bmatrix} A_{11}B_1 + A_{12}B_2 \\ A_{21}B_1 + A_{22}B_2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{بنابراین} \\ \text{(الف)} \end{array}$$

$$A_{11}B_1 = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 37 \\ 16 & 44 \end{bmatrix} \quad \text{ولی}$$

$$A_{12}B_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_{21}B_1 = \begin{bmatrix} 10 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 62 \end{bmatrix}$$

$$A_{22}B_2 = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 8 \end{bmatrix}$$

بنابراین با جایگذاری در (الف) داریم:

$$AB = \begin{bmatrix} 14 & 39 \\ 22 & 48 \\ 28 & 70 \end{bmatrix}$$

مثال ۲.۱۱: با بهره‌گیری از افزاز ماتریسی، $C = Ab$ را تعیین کنید در صورتی که:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 8 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 12 \end{bmatrix}; \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

حل:

تنها حاصل ضرب‌هایی که ضرورت دارد تعیین شوند عبارتند از:

$$w_1 = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

و

$$w_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

حالا می‌توانیم c را ایجاد کنیم:

$$c = \begin{bmatrix} 2w_1 + w_2 \\ 2w_1 + 2w_2 \end{bmatrix}$$

یا با جایگذاری داریم:

$$c = \begin{bmatrix} 17 \\ 21 \\ 20 \\ 24 \end{bmatrix}$$

اثر و دترمینان یک ماتریس

اثر و دترمینان یک ماتریس تنها هنگامی تعریف می‌شوند که ماتریس مربعی باشد. هر دو کمیت، اعداد منفردی می‌باشند که از عناصر ماتریس‌ها تعیین گردیده و بنابراین تابعی از عناصر ماتریس می‌باشند.

تعریف: اثر یک ماتریس A با $tr(A)$ نشان داده می‌شود و مساوی $\sum_{i=1}^n a_{ii}$ می‌باشد که در آن n مرتبه ماتریس A است.

مثال ۲.۱۲: اثر ماتریس A داده شده در مثال ۲.۱۱ را تعیین کنید:

حل:

$$tr(A) = 4 + 6 + 8 + 12 = 30 \quad \text{در اینجا داریم:}$$

دترمینان یک ماتریس A برحسب دترمینانهای زیر ماتریس‌های A می‌تواند تعریف شود. باید دانست که دترمینان یک ماتریس از مرتبه ۱، عنصر ماتریس مذکور می‌باشد یعنی اگر

$\det A = a_{11}$ باشد در این صورت

تعریف: دترمینان یک ماتریس A که $n \times n$ است با $\det A$ نمایش داده می شود و با استفاده از رابطه بازگشتی زیر تعریف می شود:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j} \quad (۲.۳۸)$$

که در آن A_{1j} ، ماتریس $(n-1) \times (n-1)$ می باشد که از حذف اولین سطر و ستون j ام از ماتریس A حاصل می شود.

مثال ۲.۱۳: دترمینان ماتریس A را تعیین کنید در صورتی که:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

حل:

با استفاده از رابطه (۲.۳۸)، نتیجه زیر حاصل می گردد:

$$\det A = (-1)^2 a_{11} \det A_{11} + (-1)^3 a_{12} \det A_{12}$$

$$\det A_{11} = a_{22}; \quad \det A_{12} = a_{21} \quad \text{مثلاً:}$$

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \quad \text{بنابراین:}$$

رابطه مذکور یک فرمول عمومی برای تعیین دترمینان یک ماتریس 2×2 می باشد.

می توان نشان داد که برای تعیین دترمینان یک ماتریس استفاده از رابطه بازگشتی داده شده در (۲.۳۸) در امتداد هر سطر یا ستونی امکان پذیر است. این نکته در مثال ۲.۱۴ نشان داده می شود.

مثال ۲.۱۴: دترمینان ماتریس A را تعیین کنید در صورتی که:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

حل:

با استفاده از رابطه بازگشتی (۲.۳۸)، نتیجه زیر به دست می آید:

$$\det A = (-1)^2(2) \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$+ (-1)^3(1) \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$+ (-1)^4(0) \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حال فرمول داده شده در مثال ۲.۱۳ جهت تعیین دترمینان یک ماتریس 2×2 را به کار می بریم، از

اینرو خواهیم داشت:

$$\det A = (2)\{(3)(2) - (1)(1)\} - \{(1)(2) - (0)(1)\} + 0$$

بنابراین:

$$\det A = 8$$

حال می‌خواهیم کنترل کنیم که آیا می‌توان نتیجه یکسانی را با استفاده از (۲.۳۸) در امتداد سطر دوم به جای سطر اول بدست آورد؟ در این حالت لازم است که در (۲.۳۸)، ۱ را با ۲ عوض کرد،

$$\det A = (-1)^3(1) \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$+ (-1)^4(3) \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$+ (-1)^5(1) \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

مجدداً با استفاده از فرمول داده شده در مثال ۲.۱۳، خواهیم داشت:

$$\det A = -\{(1)(2) - (0)(1)\} + (3)\{(2)(2) - (0)(0)\} - \{(2)(1) - (1)(0)\}$$

یا همچنان که پیش از این داشتیم:

$$\det A = 8$$

سرانجام، با استفاده از معادله (۲.۳۸) در امتداد ستون سوم خواهیم داشت:

$$\det A = (-1)^4(0) \det \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ (-1)^5(1) \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$+ (-1)^6(2) \det \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

و همچون حالت قبل به دست می‌آید که:

$$\det A = 8$$

در بسیاری از قضایا از درمینان‌ها استفاده می‌کنند. به عنوان نمونه، حل یک مجموعه از معادلات همزمان را می‌توان با استفاده از تعیین درمینانها به دست آورد (به عنوان مثال ر.ک. به: [A. Noble B]). با وجود این اگر از دیدگاه نوینی نگاه کنیم، بسیاری از نتایجی را که با استفاده از درمینانها به دست می‌آیند، می‌توان به طور مؤثرتری از طرق دیگر بدست آورد. به عنوان مثال، حل معادلات همزمان با استفاده از درمینانها بسیار ناکارامی باشد. همچنان که بعداً خواهیم دید، ارزش اصلی استفاده از درمینانها در نمادگذاری به صورت مختصر و آسان نهفته است که می‌توان از آنها در بحث سئوالات معینی نظیر وجود معکوس یک ماتریس استفاده نمود. از

دترمینانها به طور خاص در حل مسائل ویژه مقادیر استفاده خواهیم کرد.

در تعیین دترمینان یک ماتریس، شاید مؤثر باشد که ابتدا ماتریس را به حاصل ضرب چند ماتریس تجزیه نموده سپس نتیجه ذیل را استفاده نمود:

$$\det(BC \cdots F) = (\det B)(\det C) \cdots (\det F) \quad (2.39)$$

رابطه (۲.۳۹) بیان می‌کند که دترمینان حاصل ضرب چند ماتریس مساوی حاصل ضرب دترمینانهای آنها می‌باشد. اثبات نتیجه فوق نسبتاً طولانی و خسته‌کننده می‌باشد [نتیجه مزبور با استفاده از تعریف دترمینان در (۲.۳۸) به دست می‌آید] و از اینرو در اینجا آورده نشده است. از نتیجه ارائه شده در (۲.۳۹) اغلب در محاسبات ویژه مقادیر، هنگامی که دترمینان ماتریسی مانند ماتریس A مورد نیاز باشد، استفاده خواهد شد. تجزیه ویژه‌ای که مورد استفاده قرار خواهد گرفت $A = LDL^T$ می‌باشد که L یک ماتریس واحد مثلثی پایینی و D یک ماتریس قطری می‌باشد (ر.ک. به: بخش ۸.۲.۲). در آن حالت:

$$\det A = \det L \det D \det L^T \quad (2.40)$$

و چون $\det L = 1$ می‌باشد، از اینرو خواهیم داشت:

$$\det A = \prod_{i=1}^n d_{ii} \quad (2.41)$$

مثال ۲.۱۵: با استفاده از تجزیه LDL^T ، دترمینان ماتریس A را که در مثال ۲.۱۴ داده شده است تعیین کنید.

حل:

روش به دست آوردن تجزیه LDL^T ماتریس A در بخش ۸.۲ ارائه می‌شود. در اینجا صرفاً D و L داده می‌شوند و می‌توان ثابت نمود که $LDL^T = A$ می‌باشد.

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}; \quad D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{8}{3} \end{bmatrix}$$

با استفاده از (۲.۴۱) نتیجه زیر حاصل می‌گردد:

$$\det A = (2)\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{8}{3}\right) = 8$$

نتیجه مزبور همان مقدازی است که در مثال ۲.۱۴ به دست آمد.

دترمینان و اثر یک ماتریس تابعی از عناصر ماتریس می‌باشند. با وجود این، ملاحظه این نکته مهم است که عناصر غیر قطری تأثیری در اثر یک ماتریس ندارند، در حالی که دترمینان یک ماتریس تابعی از تمامی عناصر آن ماتریس می‌باشد. گرچه می‌توان نتیجه گرفت که یک دترمینان بزرگ یا یک اثر بزرگ نشانگر وجود برخی عناصر بزرگ در ماتریس می‌باشد ولی نمی‌توان

نتیجه‌گیری کرد که یک دترمینان کوچک یا یک اثر کوچک نشان می‌دهد که تمامی عناصر یک ماتریس کوچک‌اند.

مثال ۲.۱۶: اثر و دترمینان ماتریس A را تعیین کنید در صورتی که:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 10,000 \\ 10^{-4} & 2 \end{bmatrix}$$

حل:

در اینجا داریم:

$$\text{tr}(A) = 3$$

$$\det A = (1)(2) - (10^{-4})(10,000)$$

و

به عبارت دیگر:

$$\det A = 1$$

بنابراین اثر و دترمینان ماتریس A به نسبت عنصر غیرقطری a_{12} کوچک می‌باشند.

۲.۳ فضاهای برداری

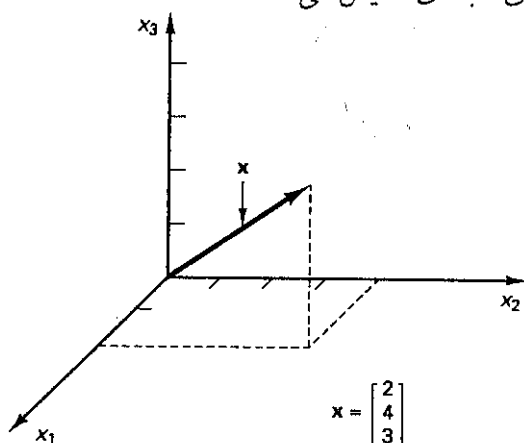
در بخش پیشین یک بردار از مرتبه n به صورت آرایه‌ای از n عدد تعریف شد که به صورت ماتریسی نوشته می‌شود. حالا می‌خواهیم یک تفسیر هندسی را با عناصر یک بردار مربوط سازیم. مثالی از بردار ستونی از مرتبه ۳ را در نظر بگیرید:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (2.42)$$

از هندسه مقدماتی می‌دانیم که x یک بردار هندسی را نمایش می‌دهد که در یک دستگاه مختصات انتخابی در فضای سه‌بعدی تعریف شده است. شکل (۲.۲) محورهای مختصات فرضی و بردار متناظر با (۲.۴۲) را در این دستگاه نشان می‌دهد. باید دانست که نمایش هندسی x کاملاً به دستگاه مختصات انتخابی بستگی دارد، به عبارت دیگر، اگر رابطه (۲.۴۲) بیانگر مؤلفه‌های یک بردار در دستگاه مختصات دیگری باشد، در این صورت نمایش هندسی x با آنچه در شکل ۲.۲ نشان داده شده است، متفاوت خواهد بود. بنابراین، مختصات (یا مؤلفه‌های یک بردار) به تنهایی مقدار هندسی واقعی را تعریف نمی‌کنند، بلکه لازم است که آنها همراه با دستگاه مختصات ویژه‌ای داده شوند، که در آن دستگاه نیز اندازه گرفته شده‌اند.

مفاهیم هندسه سه‌بعدی به یک بردار از هر مرتبه n تعمیم داده می‌شوند. اگر $n > 3$ باشد، دیگر نمی‌توانیم آن بردار را رسم کنیم، با وجود این ملاحظه خواهیم کرد که از نکته‌نظر ریاضی تمامی مفاهیمی که مربوط به بردارها هستند مستقل از n می‌باشند. همچنان که پیش از این هنگام در نظر گرفتن حالت خاص $n = 3$ گفته شد، بردار از مرتبه n نیز کمیتی را در دستگاه

مختصات ویژه‌ای در فضای n بعدی نمایش می‌دهد.



$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

شکل ۲.۲ نمایش هندسی بردار x

فرض کنید که با تعدادی بردار که همه از مرتبه n هستند مواجه هستیم که در یک دستگاه مختصات ثابت تعریف شده‌اند. برخی مفاهیم بنیادی که توانایی بسیار بالای آنها را در فصول بعدی خواهیم دید، در تعاریف و اصول زیر خلاصه می‌کنیم:

تعریف: مجموعه‌ای از بردارهای x_1, x_2, \dots, x_s ، هنگامی وابسته خطی خوانده می‌شوند که اعدادی مانند $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ که همگی غیرصفر هستند وجود داشته باشند بگونه‌ای که:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_s x_s = 0 \quad (2.43)$$

اگر بردارها، وابسته خطی نباشند، به آنها بردارهای مستقل خطی اطلاق می‌شود.

برای روشن نمودن مفهوم تعریف مزبور مثالهای زیر را ملاحظه می‌کنیم.

مثال ۲.۱۷: فرض کنید که $n = 3$ ، تعیین کنید که آیا بردارهای e_1, e_2, e_3 و $i = 1, 2, 3$ وابسته خطی می‌باشند یا مستقل؟

حل:

مطابق با تعریف وابستگی خطی، ضروری است که کنترل شود که آیا مقادیر ثابت

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ که همگی صفر نباشند - وجود دارند به گونه‌ای که در معادله زیر صدق کنند، یا نه:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

اما معادلات (الف) نشان می‌دهند که:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

معادلات مزبور تنها هنگامی ارضا می‌شوند که $\alpha_i = 0$ و $i = 1, 2, 3$ ، بنابراین بردارهای e_i مستقل خطی می‌باشند.

مثال ۲.۱۸: با $n = 4$ بررسی کنید که آیا بردارهای زیر وابسته خطی می‌باشند یا مستقل؟

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ -0.25 \end{bmatrix}$$

حل:

نیاز داریم که دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیریم:

$$\alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} + \alpha_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_3 \begin{bmatrix} 0 \\ -0.5 \\ -0.5 \\ -0.25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

یا با ملاحظه هر سطر:

$$\alpha_1 - \alpha_2 = 0$$

$$\alpha_1 - 0.5 \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_2 - 0.5 \alpha_3 = 0$$

$$0.5 \alpha_1 - 0.25 \alpha_3 = 0$$

که در آن ملاحظه می‌کنیم که معادلات مزبور به ازای $\alpha_1 = 1$ و $\alpha_2 = 1$ و $\alpha_3 = 2$ ارضا می‌شوند. بنابراین بردارها وابسته خطی می‌باشند.

در مثال‌های قبلی، جواب‌های α_1 و α_2 و α_3 می‌توانستند به روش آسان‌تری بدست آیند. بعداً یک شیوه سیستماتیکی را برای کنترل اینکه آیا یک سری بردار، خطی می‌باشند یا مستقل، ایجاد خواهیم کرد.

طریقه دیگر نگرش به مسأله که امکان دارد بسیار جالب باشد این است که گفته شود که بردارها هنگامی وابسته خطی می‌باشند که یکی از آنها را بتوان برحسب بردارهای دیگر بیان کرد. یعنی اگر تمامی α_i ها در (۲.۴۳) صفر نباشند ($\alpha_j \neq 0$) در این صورت می‌توان نوشت که:

$$x_j = - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^n \frac{\alpha_k}{\alpha_j} x_k \quad (2.44)$$

از نظر هندسی، هنگامی که $n \leq 3$ می باشد، اگر بردارها وابسته خطی باشند می توان آنها را رسم نمود. در این صورت خواهیم توانست که یک بردار را برحسب مضرب هایی از سایر بردارها رسم کنیم. به عنوان مثال، اگر بخوایم بردارهای استفاده شده در مثال ۲.۱۷ را رسم نماییم بلافاصله مشاهده می کنیم که هیچ یک از آنها را نمی توان برحسب مضرب هایی از بقیه بردارها بیان نمود، بنابراین بردارها مستقل خطی می باشند.

فرض کنید که q بردار از مرتبه n داریم ($n \geq q$) که وابسته خطی هستند ولی تنها هر $(q-1)$ بردار از آنها را در نظر می گیریم. این $(q-1)$ بردار امکان دارد که هنوز هم وابسته خطی باشند. با کاهش مداوم تعداد بردارهای مورد نظر، به p بردار می رسیم که مستقل خطی می باشند که در حالت کلی داریم $p \leq q$. سایر $(q-p)$ را بردار را می توان بر حسب p بیان نمود. بنابراین به تعریف زیر می رسیم:

تعریف: فرض کنید که p بردار مستقل خطی از مرتبه n داریم، که $n \geq p$ ، p بردار مزبور یک پایه برای یک فضای برداری p بعدی را تشکیل می دهند.

ما درباره یک فضای برداری p بعدی بحث می کنیم زیرا هر برداری در این فضا را می توان به صورت ترکیب خطی از p بردار پایه بیان کرد. یادآوری می شود که بردارهای پایه برای فضای ویژه مورد نظر منحصر به فرد نیستند به عبارت دیگر ترکیب خطی آنها می تواند پایه دیگری برای همان فضا را به دست دهد. به ویژه اگر $p = n$ باشد، در این صورت یک پایه برای فضای مورد نظر e_i است ($i = 1, \dots, n$) که از آن نیز نتیجه می شود که p نمی تواند بزرگتر از n باشد.

تعریف: q بردار که p بردار از آنها مستقل خطی هستند گفته می شود که یک فضای برداری p بعدی را می پوشانند.

بنابراین ملاحظه می کنیم که بردارهای پایه از اهمیت خاصی برخوردار هستند زیرا کمترین تعداد بردارهایی می باشند که فضای مورد نظر را می پوشانند. تمامی q بردار را می توان برحسب بردارهای پایه بیان نمود، با وجود این q ممکن است که بزرگ باشد (و در حقیقت q می تواند بزرگتر از n باشد).

مثال ۲.۱۹: یک پایه برای فضای پوشانده شده بوسیله سه بردار مثال ۲.۱۸ را ایجاد نمایید.
حل:

در این حالت $q = 3$ و $n = 4$ ، با یک بررسی درمی یابیم که دو بردار x_2 ، x_1 مستقل خطی می باشند. بنابراین x_2 ، x_1 را می توان به عنوان بردارهای پایه فضای دوبعدی پوشانده شده بوسیله x_2 ، x_1 ، x_3 در نظر گرفت. همچنین با استفاده از نتیجه مثال ۲.۱۸ داریم:

$$x_3 = -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_1$$

فرض کنید که یک فضای برداری p بعدی را داریم که با E_p نمایش می‌دهیم و بردارهای x_1, x_2, \dots, x_p به عنوان بردارهای پایه آن فضا انتخاب شده‌اند و $p > 1$. در این صورت ممکن است مایل باشیم که تنها آن بردارهایی را در نظر بگیریم که می‌توانند برحسب x_1, x_2 بیان شوند. اما بردارهای x_1, x_2 همچنین پایه یک فضای برداری را تشکیل می‌دهند که آن را با E_2 نشان می‌دهیم. اگر $p = 2$ باشد، ملاحظه می‌کنیم که E_2 بر همدیگر منطبق‌اند. در این صورت E_2 را یک زیرفضا از E_p می‌نامیم که خلاصه مفهوم آن را به شرح زیر تعریف می‌کنیم:

تعریف: یک زیرفضا از یک فضای برداری، یک فضای برداری است به گونه‌ای که هر بردار در آن زیرفضا در فضاهای اصلی نیز قرار دارد. اگر x_1, x_2, \dots, x_p بردارهای پایه فضای اصلی باشند، هر زیرمجموعه از این بردارها یک پایه‌ای برای زیرفضا را تشکیل می‌دهند، بعد زیرفضا مساوی تعداد بردارهای پایه انتخاب شده می‌باشد.

مثال ۲.۲۰: سه بردار x_1, x_2, x_3 مستقل خطی می‌باشند و بنابراین پایه‌ای برای فضای برداری سه بعدی E_3 را تشکیل می‌دهند.

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad x_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

چند زیرفضای دوبعدی ممکن را از E_3 مشخص نمایید.
حل:

با استفاده از بردارهای پایه (الف)، یک زیرفضای دوبعدی بوسیله هر دو بردار از سه بردار مزبور تشکیل می‌شود، به عنوان مثال، x_1, x_2 پایه‌ای برای یک زیرفضای دوبعدی را نمایش می‌دهند و x_1, x_3 پایه‌ای برای زیرفضای دوبعدی دیگر می‌باشند و غیره. در حقیقت هر دو بردار مستقل خطی در E_3 پایه‌ای را برای زیرفضای دوبعدی تشکیل می‌دهند و از اینرو نتیجه می‌شود تعداد نامتناهی زیرفضاهای دوبعدی در E_3 وجود دارد.

با ملاحظه مفاهیم یک فضای برداری، اکنون امکان تصدیق این نکته وجود دارد که ستونهایی از هر ماتریس مستطیلی A نیز یک فضای برداری را می‌پوشانند. این فضا، فضای ستونی ماتریس A خوانده می‌شود. همچنین، سطرها یک ماتریس نیز یک فضای برداری را می‌پوشانند که به آن فضای سطری ماتریس A اطلاق می‌شود. برعکس ممکن است که هر q بردار از مرتبه n در یک ماتریس A از مرتبه $n \times q$ سوار کنیم. تعداد بردارهای مستقل خطی مورد استفاده مساوی بعد فضای ستونی ماتریس A می‌باشد. به عنوان مثال، سه بردار داده شده در مثال ۲.۲۰ ماتریس زیر را تشکیل می‌دهند:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (۲.۴۵)$$

فرض کنید که ماتریس A معلوم است و می‌خواهیم بُعد فضای ستونی آن ماتریس محاسبه شود. به عبارت دیگر می‌خواهیم تعیین کنیم که چه تعداد ستون در ماتریس A مستقل خطی می‌باشند. تعداد ستونهای مستقل خطی در A با انجام هرگونه ترکیب خطی از آنها نه کاهش می‌یابند و نه افزایش پیدا می‌کنند. بنابراین برای مشخص نمودن فضای ستونی A ، سعی می‌کنیم که با استفاده از ترکیب خطی ستونهای ماتریس، آنرا تبدیل نموده تا بردارهای واحد e_i را به دست آوریم. از آنجا که بردارهای واحد e_i با مشخصهٔ i مستقل خطی می‌باشند، بُعد فضای ستونی ماتریس A برابر تعداد بردارهای واحدی است که می‌توانند پیدا شوند. در حالی که غالباً نمی‌توانیم بردارهای واحد e_i را پیدا کنیم (ر.ک. به: مثال ۲.۲۱)، ولی فرایند تبدیل ماتریس A همواره منجر به ایجاد فرمی از ماتریس A خواهد شد که بُعد فضای ستونی را نمایش می‌دهد.

مثال ۲.۲۱: بُعد فضای ستونی ماتریس A را که از بردارهای x_3, x_2, x_1 موردنظر در مثال ۲.۲۰ تشکیل شده است محاسبه نمایید.

حل:

ماتریس مورد نظر عبارت است از:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با نوشتن ترتیب‌وار ستونهای دوم و سوم به عنوان ستونهای اول و دوم، نتیجهٔ زیر حاصل می‌گردد:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

با تفریق ستون اول از ستون سوم و اضافه نمودن دوبرابر ستون دوم به ستون سوم و سرانجام با ضرب ستون دوم در -1 نتیجهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

اما اکنون ماتریس A را به صورتی درآورده‌ایم که در آن می‌توان سه ستون را مشخص کرد که مستقل خطی می‌باشند، به عبارت دیگر، ستونها به این دلیل مستقل خطی می‌باشند که سه عنصر نخست در بردارها ستونهایی از یک ماتریس همانی از مرتبه ۳ می‌باشند. ولی از آن‌جا که ماتریس A_2 از طریق تعویض و ترکیب خطی ستونهای اصلی ماتریس A به دست آمده و نتیجتاً در فرایند حل، فضایی که به وسیله ستونهای ماتریس پوشانده شده، افزایش نیافته است، از اینرو در نتیجه درمی‌یابیم که بعد فضای ستونی ماتریس A ، ۳ می‌باشد.

در مباحثی که در بالا ارائه گردید، بردارهای x_1, \dots, x_q را که ستونهایی از ماتریس A می‌باشند به طور خطی ترکیب نمودیم تا مشخص نماییم که آیا بردارهای مذکور مستقل خطی می‌باشند یا نه. همچنین برای یافتن بُعد فضایی که به وسیله مجموعه‌ای از بردارهای x_1, x_2, \dots, x_q پوشانده می‌شود می‌توان از تعریف استقلال خطی برداری در (۲.۴۳) استفاده نمود و مجموعه معادلات همگن همزمان زیر را در نظر گرفت:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_q x_q = 0 \quad (2.46)$$

که در شکل ماتریسی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$A\alpha = 0 \quad (2.47)$$

که در آن α یک بردار با عناصر $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ و ستونهای ماتریس A بردارهای x_1, x_2, \dots, x_q می‌باشند. جواب مجهولات $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ با ترکیب خطی یا ضرب هریک از سطرهاى ماتریس A تغییر نمی‌کند. بنابراین امکان دارد که ماتریس A را با ضرب و ترکیب سطرهاىش به ماتریسی تبدیل نمود که در آن ستونها تنها از بردارهای واحد تشکیل یافته‌اند. این ماتریس تغییر شکل یافته را صورت پلکانی سطری ماتریس A می‌نامند. تعداد بردارهای واحد ستونی در صورت پلکانی ستونی ماتریس A مساوی بُعد فضای ستونی ماتریس A بوده و همچنین با توجه به مبحث پیشین برابر بُعد فضای سطری ماتریس A نیز می‌باشد. در نتیجه بُعد فضای ستونی ماتریس A مساوی بُعد فضای سطری ماتریس مذکور می‌باشد. به عبارت دیگر، تعداد ستونهای مستقل خطی در ماتریس A برابر با تعداد سطرهاى مستقل خطی در آن ماتریس می‌باشد. نتیجه مزبور در تعریف رتبه ماتریس A و تعریف فضای صفر (یا هسته) A جمع‌بندی می‌گردد.

تعریف: رتبه ماتریس A با بُعد فضای ستونی و همچنین با بُعد فضای سطری آن برابر است.

تعریف: فضای صفر (یا هسته) ماتریس A فضای بردارهای α می‌باشد به گونه‌ای که: $A\alpha = 0$.

مثال ۲.۲۲: سه بردار زیر را در نظر بگیرید:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}; \quad x_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

بردارهای مذکور را به عنوان ستونهای ماتریس A استفاده نموده و ماتریس را به فرم پلکانی سطری درآورید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

حل:
داریم:

مضربی از سطر اول را از سطرهای زیر آن کم می‌نماییم تا بردار واحد e_1 در نخستین ستون به دست آید، در این صورت نتیجه زیر حاصل می‌گردد:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -5 & -1 \\ 0 & -10 & -2 \\ 0 & -10 & -2 \end{bmatrix}$$

سطر دوم را در -5 تقسیم نموده و سپس مضرب‌هایی از آن سطر را از سطرهای دیگر کم می‌کنیم تا ستون دوم به صورت بردار واحد e_2 به دست آید، در این صورت داریم:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

بنابراین می‌توان گزاره‌های هم‌ارز زیر را ارائه نمود:

(۱) جواب $A\alpha = 0$ عبارت است از:

$$\alpha_1 = -\frac{7}{5} \alpha_3$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{5} \alpha_3$$

(۲) سه بردار x_1, x_2, x_3 وابسته خطی می‌باشند. آنها یک فضای برداری دوبعدی را تشکیل می‌دهند. بردارهای x_1, x_2 مستقل خطی بوده و پایه‌ای را برای فضای دوبعدی تشکیل می‌دهند که x_1, x_2, x_3 در آن فضا قرار دارند.

(۳) رتبه ماتریس A مساوی ۲ می‌باشد.

(۴) بعد فضای ستونی ماتریس A ، ۲ می‌باشد.

(۵) بعد فضای سطری ماتریس A ، ۲ می‌باشد.

(۶) فضای صفر (یا هسته) ماتریس A دارای بُعد واحد بوده و یک پایه، برداری به صورت زیر است:

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ 1 \end{bmatrix}$$

توجه شود که رتبه A^T نیز مساوی ۲ بوده و هسته آن دارای بُعد ۴ می‌باشد.

۲.۴ تعریف تانسورها

در تحلیل مهندسی، مفهوم تانسورها و نمایش ماتریسی آنها می‌تواند مهم باشد. ما بحث خود را به تانسورها در فضای سه‌بعدی محدود خواهیم کرد و عمدتاً به نمایش تانسورهایی که در دستگاه مختصات دکارتی مستطیلی نشان داده می‌شوند خواهیم پرداخت.

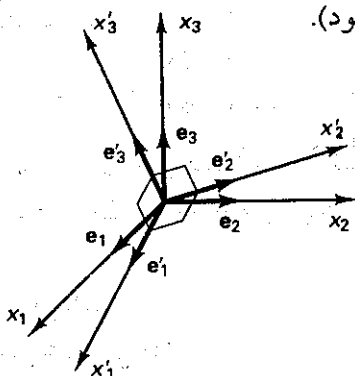
دستگاه مختصات دکارتی را که به وسیله بردارهای پایه واحد e_i تعریف شده است در نظر می‌گیریم (ر.ک. به: شکل ۲.۳). یک بردار u در این دستگاه به صورت مشخص می‌شود:

$$u = \sum_{i=1}^3 u_i e_i \quad (2.48)$$

که در آن u_i مؤلفه‌های بردار می‌باشند. در جبر تانسوری، جهت داشتن یک نمادگذاری فشرده مناسب است که از علامت جمع در (۲.۴۸) صرف نظر شود، یعنی به جای (۲.۴۸)، صرفاً می‌نویسیم:

$$u = u_i e_i \quad (2.49)$$

که در آن، جمع بطور ضمنی با اندیس‌های تکرار شونده i نشان داده می‌شود (در اینجا $i = 1, 2, 3$)، از آنجا که i می‌تواند با هر اندیس پایین دیگری بدون اینکه در نتیجه تغییری حاصل شود جایگزین گردد (بطور مثال k یا j)، زیرنویس مزبور، شاخص ظاهری یا شاخص آزاد نامیده می‌شود. قرارداد مذکور به عنوان قرارداد جمع یا نماد اندیسی (یا قرارداد Einstein) شناخته شده و برای بیان فشرده روابطی که شامل کمیت‌های تانسوری می‌باشند، با کارایی مطلوبی مورد استفاده قرار می‌گیرد (ر.ک. به: فصل ششم که در آن از این نوع نمادگذاری به طور وسیعی استفاده می‌شود).



شکل ۲.۳ دستگاه‌های مختصات دکارتی برای تعریف تانسورها

جبری برداری با در نظر گرفتن بردارها در فضای سه بعدی به طور مؤثری به کار برده می شود.

حاصل ضرب اسکالر (یا نقطه ای) بردارهای u و v که به صورت $u \cdot v$ نشان داده می شود به صورت زیر مشخص می شود:

$$u \cdot v = |u| |v| \cos \theta \quad (2.50)$$

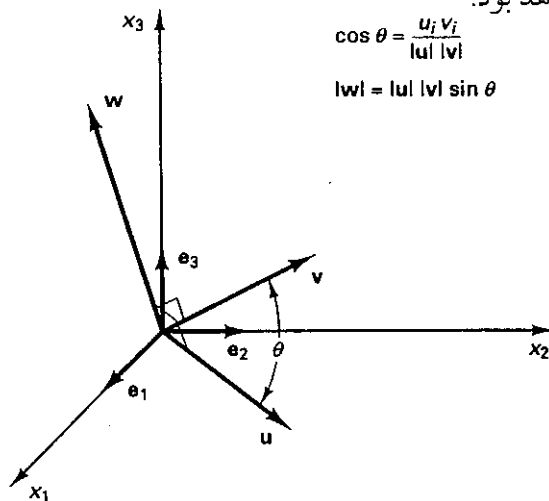
که در آن $|u|$ مساوی طول بردار u و $|u| = \sqrt{u_i u_i}$ است. حاصل ضرب نقطه ای را می توان با استفاده از مؤلفه های بردارها به صورت زیر تعیین نمود:

$$u \cdot v = u_i v_i \quad (2.51)$$

حاصل ضرب برداری (یا خارجی) بردارهای u و v یک بردار جدیدی $w = u \times v$ را ایجاد می کند:

$$w = \det \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \quad (2.52)$$

شکل ۲.۴ عملیات برداری انجام شده در روابط ۲.۵۰ و ۲.۵۲ را نشان می دهد. یادآوری می کنیم که جهت بردار w با استفاده از قانون دست راست به دست می آید؛ یعنی در حالی که چهار انگشت دست راست جهت چرخش از u تا v را نشان می دهند، انگشت شست دست راست در جهت w خواهد بود.



شکل ۲.۴ بردارهای مورد استفاده در حاصل ضرب ها

روش های جبر برداری مزبور، اغلب در تحلیل عناصر محدود جهت تعیین زوایای بین دو جهت داده شده و نیز برای به دست آوردن راستای عمود بر یک صفحه معلوم به کار می روند.

مثال ۲.۲۳: فرض کنید که بردارهای \mathbf{u} و \mathbf{v} در شکل ۲.۴ عبارتند از:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

زاویه بین این دو بردار را تعیین نموده و بردار عمود بر صفحه‌ای را که به وسیله این دو بردار تعریف می‌شود، ایجاد کنید.

حل:

در اینجا داریم:

$$|\mathbf{u}| = 3\sqrt{2}$$

$$|\mathbf{v}| = 2\sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{1}{2}$$

بنابراین

$$\theta = 60^\circ$$

یک بردار عمود بر صفحه‌ای که بوسیله بردارهای \mathbf{u} و \mathbf{v} تعریف می‌گردد به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$\mathbf{w} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 6 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

با استفاده $|\mathbf{w}| = \sqrt{w_i w_i}$ ، نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$|\mathbf{w}| = 6\sqrt{3}$$

که همچنین مساوی با مقداری است که با استفاده از فرمول داده شده در شکل ۲.۴ به دست می‌آید.

گرچه به صورت خاص بیان نگردید، با وجود این بردار نمونه ملاحظه شده در (۲.۴۸) یک تانسور می‌باشد. حال به طور اساسی تانسور را تعریف می‌کنیم.

برای تعریف تانسور، علاوه بر دستگاه مختصات دکارتی بدون پریم، یک دستگاه مختصات دکارتی پریم دار را با بردارهای پایه \mathbf{e}'_i نیز در نظر می‌گیریم که فضای مشابهی همچون دستگاه بدون پریم را می‌پوشاند (ر.ک. به: شکل ۲.۳).

یک موجودیت برحسب اینکه مؤلفه‌های آن چگونه در دستگاه بدون پریم (دستگاه

مختصات) تعریف می شوند و چگونه این مؤلفه ها به دستگاه پریم دار تبدیل می گردند، یک اسکالر، یک بردار (یعنی یک تانسور از مرتبهٔ ۱ یا یک تانسور) (یعنی یک تانسور از مرتبه ۱ یا رتبهٔ بالاتر) نامیده می شود.

تعریف: یک موجودیت، یک اسکالر نامیده می شود، اگر تنها دارای یک مؤلفهٔ واحد ϕ در مختصات x_i باشد که در امتداد e_i اندازه گرفته می شود و مؤلفه مذکور هنگامی که در مختصات x'_i اندازه گرفته شده در امتداد e'_i بیان می شود، تغییری نمی کند:

$$\phi(x_1, x_2, x_3) = \phi'(x'_1, x'_2, x'_3) \quad (2.53)$$

یک اسکالر نیز یک تانسور از مرتبهٔ صفر می باشد. به عنوان مثال، دما در یک نقطه، یک اسکالر است.

تعریف: یک موجودیت، یک بردار یا تانسور از مرتبهٔ اول نامیده می شود اگر دارای سه مؤلفهٔ ξ_i در دستگاه بدون پریم و سه مؤلفهٔ ξ'_i در دستگاه پریم دار باشد، به گونه ای که این مؤلفه ها به وسیلهٔ قانون مشخصه زیر (با استفاده از قرارداد مجموع بایی) به یکدیگر مربوط می شوند:

$$\xi'_i = p_{ik} \xi_k \quad (2.54)$$

که در آن داریم:

$$p_{ik} = \cos(e'_i, e_k) \quad (2.55)$$

رابطه (۲.۵۴) را می توان همچنین در شکل ماتریسی به صورت زیر نوشت:

$$\xi' = P\xi \quad (2.56)$$

که در آن ξ' و P و ξ عناصر (۲.۵۴) را دربرمی گیرند.

تبدیل (۲.۵۴) متناظر با یک تغییر پایه در نمایش بردار می باشد. برای رسیدن به (۲.۵۴)

ملاحظه می کنیم که بردار یکسانی در دو پایه مختلف در نظر گرفته می شوند، از اینرو داریم:

$$\xi'_i e'_i = \xi_k e_k \quad (2.57)$$

با استفاده از این واقعیت که بردارهای پایه در هر دستگاه مختصات متعامد بر همدیگر بوده و

دارای طول واحد می باشند، می توان هر دو طرف (۲.۵۷) را در e'_i ضرب نقطه ای [ر.ک. به:

(۲.۵۰)] کرد و (۲.۵۴) را به دست آورد. البته به همین طریق می توان هر دو طرف را در e_m

ضرب نقطه ای کرد تا تبدیل معکوس زیر را به دست آورد:

$$\xi_m = \cos(e_m, e'_j) \xi'_j \quad (2.58)$$

و یا در شکل ماتریسی:

$$\xi = P^T \xi' \quad (2.59)$$

باید یادآوری کرد که: $P^{-1} = P^T$ و این ما را به تعریف زیر رهنمون می سازد:

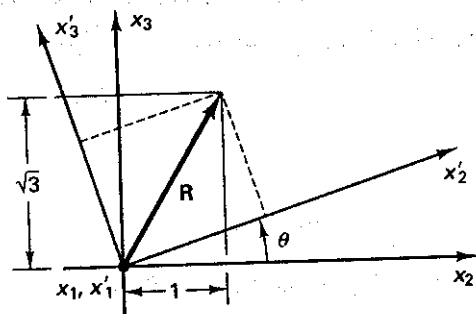
تعریف: ماتریس Q یک ماتریس متعامد است اگر $QQ^T = Q^T Q = I$ باشد.

بنابراین برای یک ماتریس متعامد، داریم $Q^{-1} = Q^T$
 بنابراین ماتریس تعریف شده در (۲.۵۵) و (۲.۵۶) یک ماتریس متعامد می‌باشد و چون عناصر P یک دوران را ایجاد می‌کنند، به آن ماتریس دوران نیز اطلاق می‌شود.
 بحث مزبور را در مثال زیر نشان می‌دهیم:

مثال ۲.۲۴: مؤلفه‌های یک نیرو که در یک دستگاه مختصات بدون پریم نشان داده شده در شکل E ۲.۲۴ بیان گردیده است عبارتند از:

$$R = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

مؤلفه‌های نیروی مذکور را در دستگاه مختصات پریم دار نشان داده شده در شکل E ۲.۲۴ تعیین نمایید.



شکل E ۲.۲۴ نمایش یک نیرو در دستگاههای مختصات متفاوت

حل:

در این جا با استفاده از (۲.۵۶) داریم:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

و در این صورت:

$$R' = PR$$

(الف)

که در آن R' مؤلفه‌های نیرو در دستگاه مختصات پریم دار را به دست می‌دهد. به عنوان یک کنترل اگر $\theta = -30^\circ$ را استفاده کنیم در این صورت با استفاده از (الف) داریم:

$$R' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

که جواب درستی باشد چرا که حالا بردار e'_3 با بردار نیرو در یک امتداد قرار می‌گیرند.

برای تعریف یک تانسور از مرتبهٔ دوم، تعریف ارائه شده در (۲.۵۴) برای یک تانسور از مرتبه ۱ را مورد استفاده قرار می‌دهیم:

تعریف: یک موجودیت، تانسور از مرتبهٔ دوم نامیده می‌شود اگر دارای ۹ مؤلفه t_{ij} و $i, j = 1, 2, 3$ و دارای ۹ مؤلفه t'_{ij} در دستگاه مختصات پریم‌دار باشد به گونه‌ای که این مؤلفه‌ها به وسیله قانون مشخصه زیر به یکدیگر مربوط می‌شوند:

$$t'_{ij} = p_{ik} p_{jl} t_{kl} \quad (2.60)$$

مانند حالت تعریف یک تانسور از مرتبهٔ اول، رابطه (۲.۶۰) یک تغییر پایه در نمایش تانسور مرتبه دوم را ارائه می‌دهد (ر.ک. به: مثال ۲.۲۵) و می‌توان (۲.۶۰) را اساساً به همان طریقی که (۲.۵۴) را استخراج کردیم، به دست آورد. به عبارت دیگر اگر تانسور مشابهی از رتبه ۲ در دو پایه مختلف بنویسیم، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$t'_{mn} e'_m e'_n = t_{kl} e_k e_l \quad (2.61)$$

که در آن روشن است که در نمایش تانسوری مزبور نخستین بردار پایه با نخستین اندیس پایین (سطر در نمایش ماتریسی) و دومین بردار پایه با دومین اندیس پایین (ستون در نمایش ماتریسی) نمایش داده می‌شود. حاصل ضرب باز^(۱) یا حاصل ضرب تانسوری $e_k e_l$ یک دیاد نامیده می‌شود و به ترکیب خطی دیادها همچنان که در (۲.۶۱) استفاده شده است، یک دیادی اطلاق می‌شود (به عنوان مثال ر.ک. به: [L. E. Malvern A]).

با گرفتن حاصل ضرب نقطه‌ای از سمت راست رابطه (۲.۶۱)، ابتدا با e'_j و سپس با e'_i ، روابط زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} t'_{mn} e'_m \delta_{nj} &= t_{kl} e_k (e_l \cdot e'_j) \\ t'_{mn} \delta_{mi} \delta_{nj} &= t_{kl} (e_k \cdot e_i) (e_l \cdot e'_j) \\ t'_{ij} &= t_{kl} p_{ik} p_{jl} \end{aligned} \quad (2.62)$$

در اینجا δ_{ij} دلتای Kronecker (۱) به ازای $i = j$ و $\delta_{ij} = 0$ به ازای $i \neq j$ می‌باشد. تبدیل مذکور را می‌توان در شکل ماتریسی به صورت زیر نوشت:

$$t' = P t P^T \quad (2.63)$$

که در آن عنصر (i, k) ام در P بوسیله p_{ik} نشان داده می‌شود. البته تبدیل معکوس زیر نیز صادق است:

$$t = P^T t' P \quad (2.64)$$

۱- حاصل ضرب باز یا حاصل ضرب تانسوری دو بردار که به صورت ab نمایش داده می‌شود برای تمامی بردارهای v با شرط زیر تعریف می‌گردد:

$$(ab) \cdot v = a(bv)$$

برخی مؤلفین از نمادگذاری $a \otimes b$ به جای ab استفاده می‌نمایند.

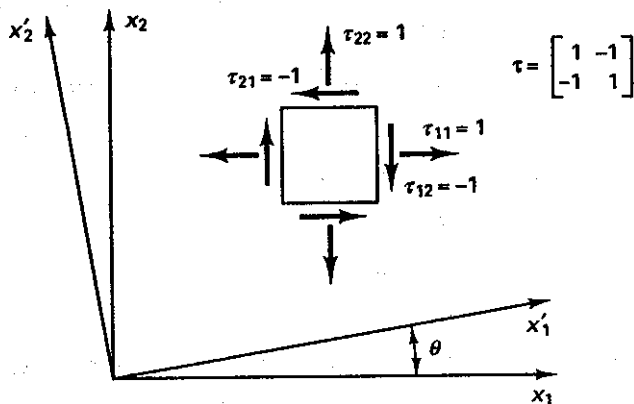
رابطه مذکور را می‌توان با استفاده از (۲.۶۱) و [مشابه عملیات انجام شده در (۲.۶۲)] با گرفتن حاصل ضرب نقطه‌ای از سمت راست رابطه، ابتدا با e_j و سپس e_i بدست آورد و یا می‌توان صرفاً با استفاده از رابطه (۲.۶۳) و در نظر گرفتن این واقعیت که P یک ماتریس متعامد است، رابطه مذکور را استخراج کرد.

در تعاریف پیشین فرض کردیم که تمام اندیس‌ها از ۱ تا ۳ تغییر می‌کنند، حالتهای خاص هنگامی پیش می‌آیند که اندیس‌ها از ۱ تا n تغییر کنند که $n < 3$ ، در این صورت ضرورت دارد که تعاریف مذکور به طور مناسبی اصلاح شوند. در تحلیل مهندسی، اغلب تنها با شرایط دوبعدی که در آن $n = 2$ می‌باشد مواجه می‌شویم.

مثال ۲.۲۵: تنش یک تانسور از رتبه ۲ می‌باشد. فرض کنید که تنش در یک نقطه که در دستگاه مختصات بدون پریم در یک تحلیل تنش مسطح اندازه گرفته شده است عبارت است از:

$$\tau = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

مؤلفه‌های تانسور را در دستگاه مختصات پریم‌دار نشان داده شده در شکل E۲.۲۵ به دست آورید:



شکل E۲.۲۵ نمایش یک تانسور تنش در دو دستگاه مختصات مختلف

حل:

در اینجا از ماتریس دوران P همانند مثال ۲.۲۴ استفاده می‌نماییم و در این صورت تبدیل (۲.۶۳) عبارت است از:

$$\tau' = P \tau P^T; \quad P = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

فرض کنید که حالت خاصی را در نظر داریم که در آن $\theta = 45^\circ$. در این حالت داریم:

$$\tau' = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

و درمی‌یابیم که در این دستگاه مختصات، عناصر غیرقطری تانسور (مؤلفه‌های برشی) صفر می‌باشند. محورهای پریم‌دار محورهای مختصات اصلی نامیده می‌شوند و عناصر قطری $\tau'_{11} = 2$ و $\tau'_{22} = 0$ مقادیر اصلی تانسور می‌باشند. در بخش ۲.۵ خواهیم دید که مقادیر اصلی تانسور، ویژه مقادیر تانسور بوده و محورهای پریم‌دار ویژه بردارهای متناظر با آنها را نشان می‌دهند.

بحث پیشین را می‌توان مستقیماً جهت تعریف تانسورهای از مرتبه بالاتر از ۲ بسط داد. در تحلیل مهندسی، بویژه علاقمند به تانسورهای مشخصه هستیم که مؤلفه‌های تانسور تنش را به مؤلفه‌های تانسور کرنش ربط می‌دهد (به عنوان مثال ر.ک. به: بخش‌های ۴.۲.۳ و ۶.۶)

$$\tau_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (2.65)$$

تانسورهای تنش و کرنش هر دو از رتبه دو بوده و تانسور مشخصه با مؤلفه‌های C_{ijkl} از رتبه ۴ می‌باشد، زیرا که مؤلفه‌های آن به طریق زیر تبدیل می‌شوند:

$$C'_{ijkl} = p_{im} p_{jn} p_{kr} p_{ls} C_{mnr s} \quad (2.66)$$

در مبحث پیشین، بردارهای پایه متعامد e_i و e'_j را از دو دستگاه مختصات دکارتی استفاده نمودیم. با وجود این می‌توان تانسور را بصورت مؤلفه‌های یک پایه از بردارهای پایه غیرمتعامد نیز بیان نمود. به ویژه در تحلیل پوسته‌ها این نکته حائز اهمیت است که بتوان از چنان بردارهای پایه‌ای استفاده نمود (ر.ک. به: بخش‌های ۵.۴.۲ و ۶.۵.۲).

در مکانیک محیط‌های پیوسته، معمول است که از آنچه که پایه هموردا با بردارهای پایه هموردا g_i و $i = 1, 2, 3$ نامیده می‌شود و نیز آنچه که پایه پادوردا با بردارهای پایه پادوردا g_j و $j = 1, 2, 3$ نامیده می‌شود استفاده نمود (به عنوان مثال ر.ک. به: شکل ۲.۵). در حالت کلی بردارهای پایه هموردا و پادوردا دارای طول واحد نیستند و در رابطه زیر صدق می‌کنند:

$$g_i \cdot g^j = \delta_i^j \quad (2.67)$$

که در آن δ_i^j دلتای Kronecker (آمیخته) می‌باشد $\delta_i^j = 1$ به ازای $i = j$ و $\delta_i^j = 0$ به ازای $i \neq j$ می‌باشد.

بنابراین بردارهای پایه پادوردا متعامد بر بردارهای پایه هموردا می‌باشند. به علاوه

داریم:

$$g_i = g_{ij} g^j \quad (2.68)$$

$$g_{ij} = g_i \cdot g_j \quad (2.69)$$

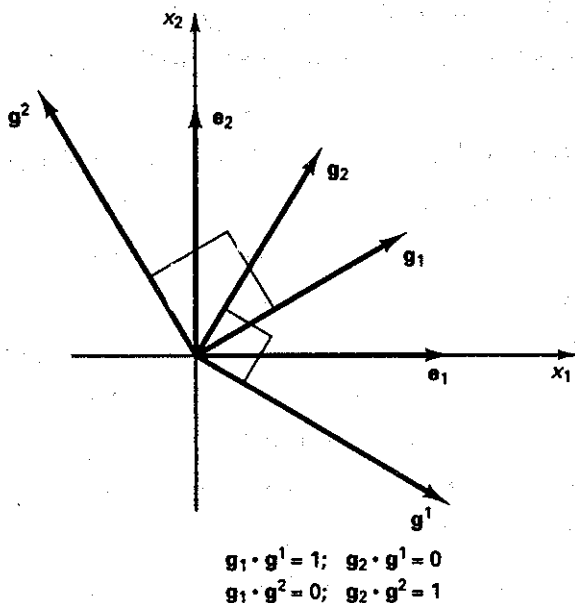
و

$$g'_i = g^{ij} g_{ij} \quad (2.70)$$

با

$$g^{ij} = g'^i \cdot g'^j \quad (2.71)$$

که در آنها g_{ij} و g^{ij} به ترتیب مؤلفه‌های هموردا و پادورداى تانسور متریک می‌باشند.



شکل ۲.۵ مثالی از بردارهای پایه هموردا و پادوردا و $n = 2$ (رسم شده در دستگاه مرجع دکارتی)

برای اثبات اینکه (۲.۶۸) صادق است، به طور آزمایشی فرض می‌کنیم که:

$$g_i = a_{ik} g'^k \quad (2.72)$$

که در آن a_{ik} عناصر مجهول می‌باشند. با گرفتن ضرب نقطه‌ای در هر طرف رابطه مزبور با g_j ، نتیجه زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} g_i \cdot g_j &= a_{ik} g'^k \cdot g_j \\ &= a_{ik} \delta_j^k \\ &= a_{ij} \end{aligned} \quad (2.73)$$

البته رابطه (۲.۷۰) را می‌توان به طریق مشابه اثبات نمود (ر.ک. به: تمرین (۲.۱۱))

در عمل اغلب جهت آسانی پایه هموردا انتخاب می‌گردد و سپس پایه پادوردا به وسیله

رابطه مذکور به دست می‌آید.

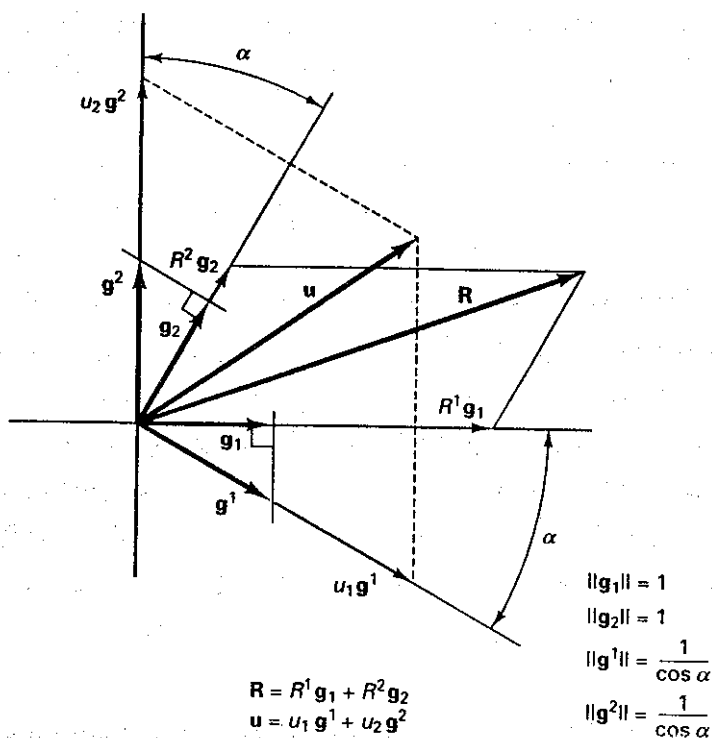
فرض کنید که استفاده از یک پایه با بردارهای پایه غیرمتعامد ضروری باشد. در این صورت ظرافت استفاده از بردارهای پایه هموردا و پادوردا هنگامی مشخص می‌شود که کار انجام شده بوسیله یک نیروی R را که موجب تغییر مکان u شده و به وسیله $R \cdot u$ مشخص می‌شود در نظر بگیریم. اگر هر دو بردار R و u را در پایه هموردا که به وسیله بردارهای پایه g_i مشخص می‌شوند بیان کنیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} R \cdot u &= (R^1 g_1 + R^2 g_2 + R^3 g_3) \cdot (u^1 g_1 + u^2 g_2 + u^3 g_3) \\ &= R^i u^j g_{ij} \end{aligned} \quad (2.74)$$

از سوی دیگر، اگر تنها R را در پایه هموردا بیان نموده ولی u را در پایه پادوردا که به وسیله بردارهای پایه g^i مشخص می‌شوند، بیان نماییم در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} R \cdot u &= (R^1 g_1 + R^2 g_2 + R^3 g_3) \cdot (u_1 g^1 + u_2 g^2 + u_3 g^3) = R^i u_j \delta^j_i \\ &= R^i u_i \end{aligned} \quad (2.75)$$

که عبارت خیلی ساده‌تری می‌باشد. شکل ۲.۶ نمایش هندسی محاسبات مزبور را در حالت دوبعدی نشان می‌دهد.



شکل ۲.۶ نمایش هندسی بردارهای R و u با استفاده از پایه‌های هموردا و پادوردا

پایه‌های هموردا و پادوردا را در فرمول‌بندی عناصر صفحه‌ای و پوسته‌ای مورد استفاده قرار خواهیم داد. از آنجا که با حاصل ضرب تنش و کرنش مواجه هستیم (به طور مثال در اصل کار مجازی)، از اینرو تانسور تنش را به صورت مؤلفه‌های پادوردا [همچون حالت نیروی R در (۲.۷۵)] بیان خواهیم نمود:

$$\tau = \tilde{\tau}^{mn} g_m g_n \quad (2.76)$$

و تانسور کرنش را به صورت مؤلفه‌های هموردا [همچون حالت تغییر مکان u در (۲.۷۵)] نشان خواهیم داد:

$$\epsilon = \bar{\epsilon}_{ij} g^i g^j \quad (2.77)$$

با استفاده از این دبادی‌ها، رابطه زیر را برای حاصل ضرب تنش و کرنش به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} W &= (\tilde{\tau}^{mn} g_m g_n) \cdot (\bar{\epsilon}_{ij} g^i g^j) \\ &= \tilde{\tau}^{mn} \bar{\epsilon}_{ij} \delta_m^i \delta_n^j \\ &= \tilde{\tau}^{ij} \bar{\epsilon}_{ij} \end{aligned} \quad (2.78)$$

عبارت مزبور برای W همانند نتیجه حاصل در (۲.۷۵) دارای شکل ساده‌ای می‌باشد. توجه شود که در اینجا از قراردادی استفاده نمودیم که بر طبق آن در تعیین حاصل ضرب نقطه‌ای، اولین بردار پایه از اولین تانسور در اولین بردار پایه از دومین تانسور ضرب می‌شود و بهمین ترتیب تکرار می‌شود. قرارداد مزبور به گونه‌ای است که استفاده از آن منجر به نتایج صحیحی می‌گردد.^(۲)

به جای نوشتن حاصل ضرب به صورت مجموع حاصل ضرب‌های مؤلفه‌ها، از نمادگذاری زیر نیز استفاده خواهد شد:

$$W = \tau \cdot \epsilon \quad (2.79)$$

و نمادگذاری مذکور به طور ضمنی بر نتیجه حاصله در (۲.۷۸) دلالت دارد که در هر دستگاه مختصاتی می‌توان آن را به دست آورد. نمادگذاری مورد استفاده در (۲.۷۹)، در اساس، یک بسط ساده از نمادگذاری حاصل ضرب داخلی دو بردار می‌باشد. البته $u \cdot v$ بر یک نتیجه منحصر به فرد دلالت دارد. ولی همچنان که در (۲.۷۴) و (۲.۷۵) نشان داده شد، این نتیجه را می‌توان به طرق مختلفی به دست آورد. به طور مشابه، رابطه (۲.۷۹) نیز بر یک نتیجه منحصر به فرد دلالت دارد، اما نتیجه مزبور ممکن است که با استفاده از روش‌های گوناگونی نیز به دست بیاید، اما استفاده از τ^{ij} و $\bar{\epsilon}_{ij}$ می‌تواند نقش مؤثری داشته باشد (ر.ک. به مثال ۲.۲۶).

بنابراین ملاحظه می‌کنیم که پایه‌های هموردا و پادوردا همانند پایه‌های دکارتی مورد

۲- به عنوان مثال، $(ab) \cdot (cd)$ را در نظر بگیرید. فرض کنید که $A = ab$ ، $B = cd$ در این صورت

$$A \cdot B = A_{ij} B_{ij} = a_i b_j c_i d_j = (a_i c_i) (b_j d_j) = (a \cdot c) (b \cdot d).$$

استفاده قرار می گیرند ولی عمومیت بیشتری را در نمایش تانسورها و استفاده از آنها فراهم می نمایند. مثالهای زیر را در نظر بگیرید:

مثال ۲.۲۶: فرض کنید که مؤلفه های تانسور تنش و کرنش در نقطه ای در یک محیط پیوسته متناظر با یک پایه دکارتی، τ_{ij} و ϵ_{ij} می باشند و در نظر بگیرید انرژی کرنشی در واحد حجم از رابطه $U = \frac{1}{2} \tau_{ij} \epsilon_{ij}$ به دست می آید. در ضمن فرض کنید که پایه بردارهای پایه هموردای \mathbf{g}_i و $i = 1, 2, 3$ داده شده است. در این صورت به طور صریح نشان دهید که مقدار U با استفاده از $\frac{1}{2} \tilde{\tau}^{mn} \tilde{\epsilon}_{mn}$ نیز به دست می آید.

حل:

در اینجا از روابط زیر استفاده می کنیم:

$$\tilde{\tau}^{mn} \mathbf{g}_m \mathbf{g}_n = \tau_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (\text{الف})$$

$$\tilde{\epsilon}_{mn} \mathbf{g}^m \mathbf{g}^n = \epsilon_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (\text{ب})$$

ولی از روابط (الف) و (ب)، نتایج زیر به دست می آیند:

$$\tau_{kl} = \tilde{\tau}^{mn} (\mathbf{g}_m \cdot \mathbf{e}_k) (\mathbf{g}_n \cdot \mathbf{e}_l) \quad \text{جمع در روی } m \text{ و } n$$

$$\epsilon_{kl} = \tilde{\epsilon}_{mn} (\mathbf{g}^m \cdot \mathbf{e}_k) (\mathbf{g}^n \cdot \mathbf{e}_l) \quad \text{و جمع در روی } m \text{ و } n$$

حال از آنجا که داریم:

$$(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{e}_j) (\mathbf{g}^i \cdot \mathbf{e}_j) = 1 \quad \text{sum on } j$$

$$U = \frac{1}{2} \tilde{\tau}^{mn} \tilde{\epsilon}_{mn} \quad \text{در ضمن داریم:}$$

مثال ۲.۲۷: مؤلفه های دکارتی τ_{ij} تانسور تنش $\tau_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$ عبارتند از $\tau_{11} = 100$ و $\tau_{12} = 60$ و $\tau_{22} = 200$ و مؤلفه های ϵ_{ij} تانسور کرنش عبارتند از: $\epsilon_{11} = \frac{0.001}{1.000}$ و $\epsilon_{12} = \frac{0.002}{1.000}$ و $\epsilon_{22} = \frac{0.003}{1.000}$

فرض کنید که تانسورهای تنش و کرنش برحسب مؤلفه های کرنش هموردا و مؤلفه های تنش پادوردا با استفاده از روابط زیر بیان خواهند شد:

$$\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

مؤلفه های مذکور را تعیین نموده و با استفاده از آنها حاصل ضرب $\frac{1}{2} \tau_{ij} \epsilon_{ij}$ را تعیین نمایید.

حل:

در اینجا با استفاده از (۲.۶۷) داریم:

$$\mathbf{g}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{g}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

برای تعیین $\bar{\tau}^{ij}$ از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\bar{\tau}^{ij} g_i g_j = \tau_{mn} e_m e_n$$

$$\bar{\tau}^{ij} = \tau_{mn} (e_m \cdot g^i)(e_n \cdot g^j) \quad \text{به گونه‌ای که:}$$

بنابراین مؤلفه‌های تنش پادوردا عبارتند از:

$$\bar{\tau}^{11} = 180; \quad \bar{\tau}^{12} = \bar{\tau}^{21} = -140\sqrt{2}; \quad \bar{\tau}^{22} = 400$$

$$\bar{\epsilon}_{ij} g^i g^j = \epsilon_{mn} e_m e_n$$

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \epsilon_{mn} (e_m \cdot g^i)(e_n \cdot g^j) \quad \text{به طور مشابه داریم:}$$

و مؤلفه‌های کرنش هموردا عبارتند از:

$$\bar{\epsilon}_{11} = \frac{1}{1000}; \quad \bar{\epsilon}_{12} = \bar{\epsilon}_{21} = \frac{3}{1000\sqrt{2}}; \quad \bar{\epsilon}_{22} = \frac{4}{1000}$$

در این صورت داریم:

$$\frac{1}{2} \bar{\tau}^{ij} \bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2000} (180 + 1600 - 840) = 0.47$$

البته این مقدار نیز مساوی $\frac{1}{2} \tau_{ij} \epsilon_{ij}$ می‌باشد.

مثال ۲.۲۸: تانوسر تنش Green-Lagrange را می‌توان به صورت زیر تعریف نمود:

$$\epsilon = \bar{\epsilon}_{ij} g^i g^j$$

با مؤلفه‌های

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} ({}^1g_i \cdot {}^1g_j - {}^0g_i \cdot {}^0g_j) \quad \text{(الف)}$$

که در آن

$${}^0g_i = \frac{\partial x}{\partial r_i}; \quad {}^1g_i = \frac{\partial(x + u)}{\partial r_i} \quad \text{(ب)}$$

و x بردار مختصات دکارتی نقطه مادی موردنظر و u بردار تغییر مکان در جهت‌های دکارتی را نشان می‌دهند و r_i مختصات جابجاشونده می‌باشند (در تحلیل عناصر محدود r_i مختصات تک پارامتری می‌باشند، ر.ک. به: بخش‌های ۵.۳ و ۵.۴.۲).

۱- مؤلفه‌های خطی و غیرخطی تانوسر کرنش را (در تغییر مکانها) ایجاد نماید.

۲- فرض کنید که مختصات جابجاشونده با مختصات دکارتی یکسان می‌باشند. نشان دهید که مؤلفه‌ها را در دستگاه دکارتی می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad \text{(پ)}$$

حل:

برای ایجاد مؤلفه‌های خطی و غیرخطی، (ب) را در (الف) جایگزین می‌کنیم. در این

صورت داریم:

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r_i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r_j} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_j} \right) - \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r_j} \right]$$

بنابراین عبارت‌های خطی در تغییر مکانها عبارتند از:

$$\bar{\epsilon}_{ij}|_{\text{linear}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r_j} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_j} \right) \quad (\text{ت})$$

و عبارت‌های غیرخطی در تغییر مکانها عبارتند از:

$$\bar{\epsilon}_{ij}|_{\text{nonlinear}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_j} \right) \quad (\text{ث})$$

اگر مختصات جابجاشونده با مختصات دکارتی یکسان باشند، در این صورت داریم: $r_i \equiv x_i$ و $\partial x_i / \partial x_i = \delta_{ij}$ و $i, j = 1, 2, 3$ به صورت زیر درمی‌آید:

$$\epsilon_{ij}|_{\text{linear}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (\text{ج})$$

و (ث) نیز به صورت زیر درمی‌آید:

$$\epsilon_{ij}|_{\text{nonlinear}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (\text{چ})$$

با اضافه نمودن عبارت‌های خطی (ج) و غیرخطی (چ)، (پ) را به دست می‌آوریم.

بحث پیشین تنها مقدمه‌ای بسیار مختصر در مورد تعریف و کاربرد تانسورها بود. در واقع هدف ما صرفاً معرفی مفاهیم پایه‌ای تانسورها بود، بگونه‌ای که بتوانیم بعداً با آنها کار کنیم (ر.ک. به: فصل ششم). نکته بسیار مهم درباره تانسورها این است که مؤلفه‌های تانسور همیشه در یک دستگاه مختصات انتخابی نمایش داده می‌شوند و نیز این مؤلفه‌ها هنگامی که دستگاه‌های مختصات متفاوتی به کار گرفته می‌شوند تغییر میکنند. از تعریف تانسورها نتیجه می‌شود که اگر تمام مؤلفه‌های یک تانسور در یک دستگاه مختصات صفر باشند در هر دستگاه مختصات (قابل قبول) دیگری نیز به همین ترتیب صفر خواهند بود. از آنجا که مجموع و

اختلاف تانسورهای که از یک نوع هستند، تانسورهای از همان نوع می‌باشند، نتیجه می‌شود که اگر یک معادله تانسوری در یک دستگاه مختصات بتواند ایجاد شود، در این صورت معادله مزبور در هر دستگاه مختصات (قابل قبول) دیگر نیز صادق خواهد بود. خاصیت مذکور، روابط فیزیکی بنیادی بین تانسورهای مورد نظر را از دستگاه مرجع خاص منتخب، منفک می‌کند و مشخصه بسیار مهم تانسورها می‌باشد: در تحلیل هر مسأله مهندسی ما با فیزیک و طبیعت مسأله سروکار داریم و روابط فیزیکی بنیادی بین متغیرهای دخیل باید مستقل از دستگاه مختصات خاص منتخب باشد، در غیر این صورت، یک تغییر ساده در دستگاه مرجع تمامی روابط مذکور را از بین برده و آنها صرفاً تصادفی خواهند بود. به عنوان مثال، جسمی را تحت مجموعه‌ای از نیروها در نظر بگیرید. اگر بتوانیم نشان دهیم که با استفاده از یک دستگاه مختصات جسم در حالت تعادل می‌باشد، در این صورت این واقعیت فیزیکی را اثبات نموده‌ایم که جسم در تعادل بوده و این تعادل نیرو در هر دستگاه مختصات (قابل قبول) دیگری نیز صادق خواهد بود.

مبحث پیشین اشاره به نکته مهم دیگری در تحلیل مهندسی دارد، و آن این است که برای یک تحلیل مؤثر، دستگاههای مختصات مناسبی باید انتخاب شوند، زیرا کوشش مورد نیاز برای بیان یک رابطه فیزیکی در یک دستگاه مختصات و کار با آن می‌تواند بسیار کمتر از هنگامی باشد که دستگاه مختصات دیگری مورد استفاده قرار می‌گیرد. در بحث روش عناصر محدود ملاحظه خواهیم کرد (به عنوان مثال ر.ک. به: بخش ۴.۲) که در حقیقت یک بخش مهم برای مؤثر بودن یک تحلیل عناصر محدود انعطاف‌پذیری در انتخاب دستگاههای مختصات مختلف برای عناصر محدود (میدان‌های) متفاوت می‌باشد که با هم سازه کامل یا محیط پیوسته را ایده‌آل‌سازی می‌نمایند.

۲.۵ ویژه مسأله مقارن $Av = \lambda v$

در بخش پیشین بحث کردیم که چگونه یک تغییر پایه را می‌توان انجام داد. در تحلیل عناصر محدود اغلب مایل به یک تغییر پایه هستیم که به ماتریسهای مقارنی اعمال می‌شود که از یک فرمول‌بندی وردشی به دست آمده‌اند و در مبحث آینده فرض خواهیم کرد که ماتریس A مقارن است. به عنوان مثال، ماتریس A ممکن است که ماتریس سختی، ماتریس جرم و یا ماتریس ظرفیت حرارتی یک مجموعه همبسته عناصر محدود باشد.

کاربردهای متنوع مهمی وجود دارند (ر.ک. به: مثالهای ۲.۳۴ الی ۲.۳۶ و فصل ششم) که در آنها برای مؤثر بودن کلی راه‌حل، یک تغییر پایه با استفاده از ویژه بردارهای ویژه مسأله زیر

در ماتریس تبدیل انجام می‌گیرد:

$$Av = \lambda v \quad (2.80)$$

مسئله (۲.۸۰) یک ویژه مسئله استاندارد است. اگر منظور از حل (۲.۸۰) یافتن ویژه مقادیر ویژه بردارها باشد، مسئله $Av = \lambda v$ به عنوان یک ویژه مسئله شناخته می‌شود، در حالی که اگر تنها ویژه مقادیر محاسبه شوند، $Av = \lambda v$ یک مسئله ویژه مقدار نامیده می‌شود. هدف این بخش، بحث در مورد خواص و نوعی می‌باشد که به جواب‌های (۲.۸۰) مربوط می‌شوند. فرض کنید که n ، مرتبه ماتریس A باشد. نخستین نکته مهم این است که n جواب غیرصفر برای (۲.۸۰) وجود دارد. منظور از کلمه "غیرصفر" این است که v نباید یک بردار صفر باشد، زیرا بردار صفر همواره در (۲.۸۰) صدق می‌کند. i امین جواب غیرصفر به وسیله ویژه مقدار λ_i و ویژه بردار متناظر v_i مشخص می‌شود که به ازای آنها داریم:

$$Av_i = \lambda_i v_i \quad (2.81)$$

بنابراین هر جوابی شامل یک ویژه جفت می‌باشد و n جواب را به صورت $(\lambda_1, v_1), (\lambda_2, v_2), \dots, (\lambda_n, v_n)$ می‌نویسیم به گونه‌ای که:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \quad (2.82)$$

کلیه n ویژه مقدار و n ویژه بردار را ویژه دستگاه A نیز می‌نامیم.

اثبات این را که باید n ویژه مقادیر و n ویژه بردار متناظر وجود داشته باشند می‌توان به آسانی با نوشتن (۲.۸۰) به صورت زیر، به دست آورد:

$$(A - \lambda I)v = 0 \quad (2.83)$$

ولی این معادلات تنها هنگامی دارای جواب می‌باشند که:

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (2.84)$$

متأسفانه، ضرورت صادق بودن (۲.۸۴) را تنها می‌توان بعد از حل معادلات همزمان مزبور شرح داد؛ به این دلیل، بیان علت این امر را که چرا (۲.۸۴) در حقیقت مورد نیاز می‌باشد به بخش ۱۰.۲.۲ مוקول می‌کنیم.

بنابراین با استفاده از (۲.۸۴)، ریشه‌های چندجمله‌ای زیر همان ویژه مقادیر ماتریس A می‌باشند:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) \quad (2.85)$$

چند جمله‌ای فوق، چند جمله‌ای مشخصه A نامیده می‌شود. از آنجا که مرتبه چند جمله‌ای مساوی با مرتبه ماتریس A می‌باشد، از این رو n ویژه مقدار موجود است و با استفاده از (۲.۸۳) n ویژه بردار متناظر را نیز پیدا می‌کنیم. باید یادآوری کرد که بردارهای حاصله از حل (۲.۸۳)، تنها با یک مضرب اسکالر تعریف می‌شوند.

مثال ۲.۲۹: ماتریس زیر را در نظر بگیرید:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

نشان دهید که ماتریس مزبور دارای دو ویژه مقدار می‌باشد. ویژه مقادیر و ویژه بردارهای ماتریس A را محاسبه کنید.

حل:

چند جمله‌ای مشخصه A عبارت است از:

$$p(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -1 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 - \lambda \end{bmatrix}$$

با استفاده از روش ارائه شده در بخش ۲.۲ برای محاسبه دترمینان یک ماتریس (ر.ک. به: مثال ۲.۱۳)، چند جمله‌ای زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (-1 - \lambda)(2 - \lambda) - (2)(2) \\ &= \lambda^2 - \lambda - 6 \\ &= (\lambda + 2)(\lambda - 3) \end{aligned}$$

مرتبه چندجمله‌ای ۲ می‌باشد و از اینرو دو ویژه مقدار وجود دارد. در حقیقت داریم:

$$\lambda_1 = -2; \quad \lambda_2 = 3$$

ویژه بردارهای متناظر از طریق اعمال (۲.۸۳) در ویژه مقادیر به دست می‌آیند. بنابراین به ازای λ_1 داریم:

$$\begin{bmatrix} -1 - (-2) & 2 \\ 2 & 2 - (-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

با جواب (در یک مضرب اسکالر):

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

به ازای λ_2 داریم:

$$\begin{bmatrix} -1 - 3 & 2 \\ 2 & 2 - 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

با جواب (در یک مضرب اسکالر):

$$v_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

یک تغییر پایه در ماتریس A با استفاده از رابطه زیر به دست می آید:

$$v = P\bar{v} \quad (2.86)$$

که در آن P یک ماتریس متعامد و \bar{v} بردار جواب در پایه جدید را نشان می دهند. با جایگذاری در (۲.۸۰) رابطه زیر حاصل می شود:

$$\bar{A}\bar{v} = \lambda\bar{v} \quad (2.87)$$

که در آن:

$$\bar{A} = P^T A P \quad (2.88)$$

از آنجا که A یک ماتریس متقارن می باشد، A نیز یک ماتریس متقارن است. این تبدیل، تبدیل تشابهی خوانده می شود و چون P یک ماتریس متعامد است، تبدیل مذکور یک تبدیل تشابهی متعامد نامیده می شود.

اگر P یک ماتریس متعامد نباشد، نتیجه تبدیل به صورت زیر خواهد بود:

$$\bar{A}\bar{v} = \lambda B\bar{v} \quad (2.89)$$

که در آن:

$$\bar{A} = P^T A P; \quad B = P^T P \quad (2.90)$$

ویژه مسأله (۲.۸۹) یک ویژه مسأله تعمیم یافته نامیده می شود. با وجود این از آنجا که حل یک ویژه مسأله تعمیم یافته بسیار دشوارتر از حل یک ویژه مسأله استاندارد می باشد از اینرو باید از تبدیل به یک مسأله تعمیم یافته اجتناب کرد. این منظور با استفاده از یک ماتریس متعامد P حاصل می گردد که منجر به نتیجه $B = I$ می شود.

اگر یک تغییر پایه را در نظر بگیریم، این نکته باید مورد توجه قرار گیرد که مسأله $\bar{A}\bar{v} = \lambda B\bar{v}$ در (۲.۸۹) همان ویژه مقادیر مسأله $A v = \lambda v$ را دارا می باشد، ولی ویژه بردارهای هر دو مسأله برطبق رابطه (۲.۸۶) با یکدیگر ارتباط دارند. برای نشان دادن اینکه، ویژه مقادیر، یکسان می باشند، چند جمله های مشخصه را در نظر می گیریم.

برای مسأله (۲.۸۹) داریم:

$$\bar{p}(\lambda) = \det(P^T A P - \lambda P^T P) \quad (2.91)$$

که می تواند به صورت زیر نوشته شود:

$$\bar{p}(\lambda) = \det P^T \det(A - \lambda I) \det P \quad (2.92)$$

و بنابراین

$$\bar{p}(\lambda) = \det P^T \det P p(\lambda) \quad (2.93)$$

که در آن $p(\lambda)$ در (۲.۸۵) داده شده است. بنابراین چند جمله های مشخصه مسائل $A v = \lambda v$ و $\bar{A}\bar{v} = \lambda B\bar{v}$ با یک ضریب، یکسان می باشند. این بدان معنی است که هر دو مسأله ویژه مقادیر یکسانی دارند.

تاکنون نشان داده‌ایم که n ویژه مقدار و n ویژه بردار متناظر وجود دارند اما هنوز در مورد خواص ویژه مقادیر و ویژه بردارها بحث ننموده‌ایم.

در این میان نخستین نکته این است که ویژه مقادیر حقیقی می‌باشند. i امین ویژه جفت (λ_i, v_i) را در نظر می‌گیریم که به ازای آنها داریم:

$$Av_i = \lambda_i v_i \quad (2.94)$$

فرض کنید که v_i و λ_i مختلط می‌باشند که حالت ویژه مقدار حقیقی را نیز شامل می‌شود و عناصر \bar{v}_i را مزدوج‌های مختلط عناصر v_i و λ_i در نظر بگیرید. در این صورت با پیش ضرب (۲.۹۴) در \bar{v}_i^T ، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\bar{v}_i^T Av_i = \lambda_i \bar{v}_i^T v_i \quad (2.95)$$

از سوی دیگر، از (۲.۹۴) عبارت زیر به دست می‌آید:

$$\bar{v}_i^T A = \bar{v}_i^T \bar{\lambda}_i \quad (2.96)$$

و با پس ضرب در v_i داریم:

$$\bar{v}_i^T Av_i = \bar{\lambda}_i \bar{v}_i^T v_i \quad (2.97)$$

اما سمت‌های چپ (۲.۹۵) و (۲.۹۷) یکسان می‌باشد، از اینرو داریم:

$$(\lambda_i - \bar{\lambda}_i) \bar{v}_i^T v_i = 0 \quad (2.98)$$

از آنجا که v_i یک جواب غیر صفر می‌باشد، نتیجه می‌شود که $\lambda_i = \bar{\lambda}_i$ و بنابراین ویژه مقدار باید حقیقی باشد. همچنین از (۲.۸۳) نتیجه می‌شود که ویژه بردارها باید حقیقی باشند زیرا ماتریس ضرایب $A - \lambda I$ حقیقی است.

نکته مهم این است که ویژه بردارهایی که متناظر با ویژه مقادیر متمایزی هستند، منحصر به فرد (با ضرایب عددی) و متعامد می‌باشند، در حالی که ویژه بردارهای متناظر با ویژه مقادیر چندگانه منحصر به فرد نبوده اما یک مجموعه متعامد را می‌توان همیشه انتخاب نمود. ابتدا فرض کنید که ویژه مقادیر متمایز می‌باشند. در این حالت به ازای دو ویژه جفت داریم:

$$Av_j = \lambda_j v_j \quad (2.99)$$

و

$$Av_i = \lambda_i v_i \quad (2.100)$$

با پیش ضرب (۲.۹۹) در \bar{v}_i^T و (۲.۱۰۰) در \bar{v}_j^T ، رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\bar{v}_i^T Av_j = \lambda_j \bar{v}_i^T v_j \quad (2.101)$$

$$\bar{v}_j^T Av_i = \lambda_i \bar{v}_j^T v_i \quad (2.102)$$

با انجام ترانزاده در (۲.۱۰۲)، داریم:

$$\bar{v}_j^T Av_i = \lambda_j \bar{v}_j^T v_i \quad (2.103)$$

و بنابراین از (۲.۱۰۳) و (۲.۱۰۱)، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$(\lambda_i - \lambda_j) \mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j = 0 \quad (2.104)$$

چون فرض کردیم که $\lambda_i \neq \lambda_j$ ، نتیجه می‌شود که $\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j = 0$ ، یعنی \mathbf{v}_i و \mathbf{v}_j متعامداند. به علاوه می‌توان عناصر بردار \mathbf{v}_i را مقیاس‌بندی کرد تا رابطه زیر حاصل شود:

$$\mathbf{v}_i^T \mathbf{v}_j = \delta_{ij} \quad (2.105)$$

که در آن دلتای Kronecker، یعنی هنگامی که $i=j$ می‌باشد، $\delta_{ij}=1$ و اگر $i \neq j$ باشد، $\delta_{ij}=0$ است. اگر (۲.۱۰۵) ارضا شود، می‌گوئیم که ویژه بردارها یکا متعامد می‌باشند.

باید یادآور شد که حل (۲.۸۳) منجر به برداری می‌شود که در آن فقط مقدار نسبی عناصر تعریف می‌گردند. اگر تمامی عناصر با مقدار یکسانی مقیاس‌بندی شوند، بردار جدید باز هم در (۲.۸۳) صدق خواهد کرد. در حقیقت حل (۲.۸۳) راستای ویژه بردار را به دست خواهد داد و شرط یکاتعامدی در (۲.۱۰۵) برای تثبیت مقادیر عناصر بردار مورد استفاده قرار می‌گیرد. بنابراین از این به بعد در تمام مواردی که به ویژه بردارها اشاره می‌کنیم، منظورمان به طور ضمنی این است که بردارها یکا متعامداند.

مثال ۲.۳۰: کنترل کنید که بردارهای محاسبه شده در مثال ۲.۲۹ متعامد هستند و سپس آنها را یکا متعامد کنید.

حل:

تعامد بردارها با تشکیل $\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2$ کنترل می‌گردد که نتیجه زیر را به دست می‌دهد:

$$\mathbf{v}_1^T \mathbf{v}_2 = (2)(\frac{1}{2}) + (-1)(1) = 0$$

بنابراین بردارها متعامد می‌باشند. برای یکا متعامدسازی بردارها، ضروری است که طول بردارها مساوی ۱ باشد در این صورت داریم:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که ویژه مقدارهای چندگانه نیز در آن وجود دارند. اثبات یکا متعامد بودن ویژه بردار که به وسیله (۲.۹۹) تا (۲.۱۰۵) نشان داده شده، غیر ممکن است زیرا در (۲.۱۰۴) برای یک ویژه مقدار چندگانه، λ_i مساوی λ_i می‌باشد. فرض کنید که $\lambda_i = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_{i+m-1}$ به عبارت دیگر λ_i یک "ریشه چندگانه m برابر" می‌باشد. در این صورت می‌توان نشان داد که هنوز هم همواره امکان انتخاب m ویژه بردار یکا متعامد که متناظر با $\lambda_i, \lambda_{i+1}, \dots, \lambda_{i+m-1}$ هستند وجود دارد. دلیل این نکته آن است که برای یک ماتریس متقارن از

مرتبه n ، همواره می‌توان یک مجموعه کامل از n ویژه بردار یکامتعامل را ایجاد نمود. متناظر با هر ویژه مقدار متمایز، یک ویژه فضا با بُعدی مساوی چندگانگی ویژه مقدار وجود دارد. کلیه ویژه فضاهای منحصر به فرد بوده و متعامد بر ویژه فضاهایی هستند که متناظر با سایر ویژه مقادیر متمایز می‌باشند. ویژه بردارهای همراه با یک ویژه مقدار یک پایه‌ای را برای ویژه فضا فراهم می‌نمایند و اگر $m > 1$ باشد در این صورت پایه، منحصر به فرد نمی‌باشد، از اینرو ویژه بردارهای متناظر با یک ویژه مقدار چندگانه منحصر به فرد نیستند. براهین اساسی گزاره‌های مزبور، مبتنی بر استفاده از اصولی می‌باشند که در اوایل بحث گردید و در مثالهای زیرین ارائه می‌شوند.

مثال ۲.۳۱: نشان دهید که برای یک ماتریس متقارن A از مرتبه n ، همواره n ویژه بردار یکامتعامل وجود دارد.

حل:

فرض کنید که ویژه مقدار λ_i و ویژه بردار متناظر v_i را محاسبه کرده‌ایم. یک ماتریس یکامتعامل Q را که اولین ستون آن v_i می‌باشد ایجاد می‌کنیم.

$$Q = [v_i \quad \hat{Q}]; \quad Q^T Q = I$$

این ماتریس را می‌توان همیشه ایجاد نمود زیرا که بردارهای Q یک پایه یکا متعامدی را برای یک فضای n بعدی ایجاد می‌کنند که در آن فضا، A تعریف می‌شود. ولی، می‌توان محاسبه کرد که:

$$Q^T A Q = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & A_1 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$$A_1 = \hat{Q}^T A \hat{Q}$$

که در آن داریم:

و A_1 یک ماتریس کامل از مرتبه $(n-1)$ می‌باشد. اگر $n=2$ باشد، در این صورت $Q^T A Q$ یک ماتریس قطری است. در آن حالت اگر (الف) را در Q پیش ضرب نموده و فرض کنیم که $a \equiv A_1$ است، در این صورت رابطه زیر به دست می‌آید:

$$A Q = Q \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}$$

و بنابراین بردار در \hat{Q} ویژه بردار دیگری می‌باشد و a ویژه مقدار دیگری بوده بدون در نظر گرفتن این نکته که آیا λ_i یک ویژه مقدار چندگانه است یا نه.

حال اثبات کامل از طریق استقرا به دست می‌آید. فرض کنید که گزاره مذکور برای یک ماتریس از مرتبه $(n-1)$ درست است؛ در این صورت نشان خواهیم داد که آن گزاره برای یک ماتریس از مرتبه n نیز درست است. ولی از آنجا که ثابت کرده‌ایم که گزاره مزبور برای $n=2$

درست می‌باشد، نتیجه می‌شود که برای هر n نیز درست است.
فرض اینکه $(n-1)$ ویژه بردار یک‌متعامد برای یک ماتریس از مرتبه $(n-1)$ وجود دارد، نتیجه زیر را به دست می‌دهد:

$$Q^T A_1 Q_1 = \Lambda \quad (\text{ب})$$

که در آن Q_1 یک ماتریس از ویژه بردارهای A_1 است و Λ یک ماتریس قطری بوده که شامل ویژه مقادیر A_1 است. ولی اینک اگر تعریف کنیم که:

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_1 \end{bmatrix}$$

در این صورت خواهیم داشت:

$$S^T Q^T A Q S = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix} \quad (\text{پ})$$

فرض کنید که:

$$P = QS; \quad P^T P = I$$

سپس با پیش ضرب نمودن (پ) در P ، نتیجه زیر را به دست می‌آوریم:

$$AP = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix}$$

بنابراین، با فرض مورد نظر در (ب)، گزاره مذکور برای یک ماتریس از مرتبه n نیز درست است که در این صورت اثبات کامل می‌گردد.

مثال ۲.۳۲: نشان دهید که ویژه بردارهای متناظر با یک ویژه مقدار چندگانه از چندگانگی m یک فضای m بعدی را تعریف می‌کنند که در آن فضا هر بردار یک ویژه بردار نیز هست. این فضا ویژه فضای متناظر با ویژه مقدار مورد نظر نامیده می‌شود.

حل:

λ_i را ویژه مقدار از چندگانگی m در نظر بگیرید، به عبارت دیگر داریم:

$$\lambda_i = \lambda_{i+1} = \dots = \lambda_{i+m-1}$$

در مثال ۲.۳۱ نشان دادیم که m ویژه بردار یک‌متعامد $v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+m-1}$ وجود دارد که متناظر با λ_i می‌باشند. این بردارها پایه یک فضای m بعدی را فراهم می‌نمایند. برداری نظیر w را در این فضا در نظر بگیرید، به گونه‌ای که:

$$w = \alpha_i v_i + \alpha_{i+1} v_{i+1} + \dots + \alpha_{i+m-1} v_{i+m-1}$$

که در آن $\alpha_i, \alpha_{i+1}, \dots$ مقادیر ثابت می‌باشند. بردار w نیز یک ویژه بردار است زیرا که داریم:

$$Aw = \alpha_i Av_i + \alpha_{i+1} Av_{i+1} + \dots + \alpha_{i+m-1} Av_{i+m-1}$$

که نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$Aw = \alpha_i \lambda_i v_i + \alpha_{i+1} \lambda_i v_{i+1} + \dots + \alpha_{i+m-1} \lambda_i v_{i+m-1} = \lambda_i w$$

بنابراین، هر بردار w در این فضای پوشانده شده بوسیله m ویژه بردار $v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+m-1}$ نیز یک ویژه بردار است. یادآور شویم که بردار w ، متعامد بر ویژه بردارهایی خواهد بود که متناظر با ویژه مقادیری می‌باشند که مساوی λ_i نیستند. بنابراین یک ویژه فضا وجود دارد که متناظر با هر ویژه مقدار متمایز یا چندگانه است. بُعد ویژه فضا مساوی با چندگانگی ویژه مقدار است.

حال که خواص اصلی ویژه مقادیر و ویژه بردارهای ماتریس A بیان گردید، می‌توان n

جواب برای $Av = \lambda v$ را در صورتهای متفاوت نوشت. نخست داریم:

$$Av = \lambda v \quad (2.106)$$

که در آن V ماتریسی می‌باشد که ویژه بردارها در آن انبار شده‌اند و $V = [v_1, \dots, v_n]$ و Λ یک ماتریس قطری می‌باشد که ویژه مقادیر متناظر در قطر آن قرار دارند و $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$. با استفاده از خاصیت یکامتعامدی ویژه بردارها (یعنی $V^T V = I$)، از (2.106) رابطه زیر را بدست می‌آوریم:

$$V^T A V = \Lambda \quad (2.107)$$

به علاوه، تجزیه طیفی A به صورت زیر به دست می‌آید:

$$A = V \Lambda V^T \quad (2.108)$$

که در آن شاید آسان‌تر باشد که تجزیه طیفی A به صورت زیر نوشته شود:

$$A = \sum_{i=1}^n \lambda_i v_i v_i^T \quad (2.109)$$

باید یادآور شد که هر یک از این معادلات، جواب ویژه مسأله $Av = \lambda v$ را نشان می‌دهند.

مثال زیر را در نظر بگیرید:

مثال ۲.۳۳: روابط داده شده در (2.106) تا (2.109) را برای ماتریس A مورد استفاده در مثال ۲.۲۹ برقرار کنید.

حل:

ویژه مقادیر و ویژه بردارهای A در مثالهای ۲.۲۹ و ۲.۳۰ محاسبه شده‌اند. با استفاده از

اطلاعات داده شده در این مثالها، برای (2.106) داریم:

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{برای (۲.۱۰۷) داریم:}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad \text{برای (۲.۱۰۸) داریم:}$$

$$A = (-2) \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} + (3) \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \quad \text{و برای (۲.۱۰۹) داریم:}$$

از روابط (۲.۱۰۷) و (۲.۱۰۸) به طور مؤثری در کاربردهای متنوع مهمی می‌توان استفاده نمود. هدف در مثالهای زیر ارائه برخی روش‌های حل است که در آنها روابط مذکور مورد استفاده قرار می‌گیرند.

مثال ۲.۳۴: توان k ام ماتریس A را حساب کنید؛ به عبارت دیگر A^k را تعیین نمایید. نتیجه را با استفاده از ماتریس A مثال ۲.۲۹ نشان دهید.

حل:

یک طریق ساده برای تعیین A^k محاسبه $A^2 = AA$ و $A^4 = A^2 A^2$ و غیره است. ولی اگر k بزرگ باشد، شاید استفاده از تجزیه طیفی A روش مؤثرتری باشد. فرض کنید که ویژه مقادیر و ویژه بردارهای A محاسبه شده‌اند؛ به عبارت دیگر داریم:

$$A = V\Lambda V^T$$

$$A^2 = V\Lambda V^T V\Lambda V^T \quad \text{برای محاسبه } A^2 \text{ داریم:}$$

$$A^2 = V\Lambda^2 V^T \quad \text{ولی چون } V^T V = I \text{ است، از اینرو داریم:}$$

به طریق مشابه اگر ادامه بدهیم، عبارت زیر به دست خواهد آمد:

$$A^k = V\Lambda^k V^T$$

به عنوان مثال، ماتریس A مثال ۲.۲۹ را در نظر بگیرید. در این صورت خواهیم داشت:

$$A^k = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (-2)^k & 0 \\ 0 & (3)^k \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^k = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} (-2)^{k+2} + (3)^k & (-2)^{k+1} + (2)(3)^k \\ (-2)^{k+1} + (2)(3)^k & (-2)^k + (4)(3)^k \end{bmatrix} \quad \text{یا}$$

یادآوری این نکته جالب است که اگر بزرگترین قدر مطلق تمام ویژه مقادیرهای A کوچکتر از ۱ باشد، داریم $A^k \rightarrow 0$ در صورتی که $k \rightarrow \infty$. بنابراین با تعریف شعاع طیفی A به صورت زیر:

$$\rho(A) = \max_{\text{all } i} |\lambda_i|$$

داریم: $\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = 0$ به شرط اینکه $\rho(A) < 1$.

مثال ۲.۳۵: دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را در نظر بگیرید:

$$\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{f}(t) \quad (\text{الف})$$

و جواب آنرا با استفاده از تجزیه طیفی A به دست آورید. نتیجه را با استفاده از ماتریس A مثال ۲.۲۹ و روابط زیر نشان دهید:

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^0\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

که در آن ${}^0\mathbf{x}$ شرایط اولیه می‌باشند.

حل:

با جایگذاری $\mathbf{A} = \mathbf{V}\mathbf{\Lambda}\mathbf{V}^T$ و پیش ضرب در \mathbf{V}^T رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{V}^T \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{\Lambda}(\mathbf{V}^T \mathbf{x}) = \mathbf{V}^T \mathbf{f}(t)$$

بنابراین اگر $\mathbf{y} = \mathbf{V}^T \mathbf{x}$ را تعریف کنیم، نیاز داریم که معادلات زیر را حل نماییم:

$$\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{\Lambda}\mathbf{y} = \mathbf{V}^T \mathbf{f}(t)$$

ولی معادلات مزبور یک مجموعه از معادلات دیفرانسیل تفکیک شده می‌باشند. معادله ۲ام را به عنوان شاخص در نظر می‌گیریم:

$$\dot{y}_r + \lambda_r y_r = \mathbf{v}_r^T \mathbf{f}(t)$$

جواب به صورت زیر است:

$$y_r(t) = {}^0 y_r e^{-\lambda_r t} + e^{-\lambda_r t} \int_0^t e^{\lambda_r \tau} \mathbf{v}_r^T \mathbf{f}(\tau) d\tau$$

که در آن y_r مقدار y_r در زمان $t=0$ است. جواب کامل دستگاه معادلات (الف) عبارت است از:

$$\mathbf{x} = \sum_{r=1}^n \mathbf{v}_r y_r \quad (\text{ب})$$

به عنوان مثال، دستگاه معادلات دیفرانسیل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

در این حالت ما باید دو معادله دیفرانسیل تفکیک شده را حل نماییم:

$$\dot{y}_1 + (-2)y_1 = 2e^{-t}$$

$$\dot{y}_2 + 3y_2 = e^{-t}$$

با شرایط اولیه زیر:

$${}^0\mathbf{y} = \mathbf{V}^T {}^0\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} e^{2t} - \frac{2}{3} e^{-t} \quad \text{جوابهای زیر را به دست می‌آوریم:}$$

$$y_2 = \frac{3}{\sqrt{5}} e^{-3t} + \frac{1}{2} e^{-t}$$

بنابراین با استفاده از (ب) داریم:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} y_1 + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} y_2 \right) \\ &= \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{6} e^{-t} + \frac{3}{5} e^{-3t} + \frac{2}{5} e^{2t} \\ \frac{\sqrt{5}}{3} e^{-t} + \frac{6}{5} e^{-3t} - \frac{1}{5} e^{2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

در پایان این نکته را می‌توان ذکر کرد که با وارد نمودن متغیرهای کمکی، معادلات دیفرانسیل از مرتبه بالاتر را می‌توان به صورت یک دستگاه معادلات دیفرانسیل از مرتبه اول درآورد. ولی ماتریس ضریب A در آن حالت نامتقارن خواهد بود.

مثال ۲.۳۶: با استفاده از تجزیه طیفی یک ماتریس $n \times n$ متقارن A ، معکوس آنرا به دست آورید.
نتیجه را با استفاده از ماتریس A مثال ۲.۲۹ نشان دهید.

حل:

فرض کنید که ویژه مقادیر λ_i و ویژه بردارهای متناظر v_i ، $i = 1, \dots, n$ ماتریس A را تعیین کرده‌ایم، یعنی ویژه مسأله زیر را حل نموده‌ایم:

$$Av = \lambda v \quad (\text{الف})$$

با پیش ضرب هر دو طرف (الف) در $\lambda^{-1}A^{-1}$ ، ویژه مسأله زیر را به دست می‌آوریم:

$$A^{-1}v = \lambda^{-1}v$$

اما این رابطه نشان می‌دهد که ویژه مقادیر A^{-1} ، $1/\lambda_i$ بوده و ویژه بردارها، v_i و $i = 1, \dots, n$ می‌باشند. بنابراین با استفاده از (۲.۱۰۹) برای A^{-1} داریم:

$$A^{-1} = V\Lambda^{-1}V^T$$

$$A^{-1} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\lambda_i} \right) v_i v_i^T \quad \text{یا}$$

این معادلات نشان می‌دهند که اگر ماتریس A دارای یک ویژه مقدار صفر باشد، معکوس آن ماتریس را نمی‌توانیم پیدا کنیم.

به عنوان یک مثال، معکوس ماتریس A مثال ۲.۲۹ را تعیین می‌کنیم. در این حالت داریم:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

نکته اصلی تبدیل (۲.۱۰۷) این است که در (۲.۱۰۷) یک تغییر پایه را انجام می‌دهیم [ر.ک. به: (۲.۸۶) و (۲.۸۸)] از آنجا که بردارهای موجود در V متناظر با یک پایه جدید می‌باشند، از اینرو آنها یک فضای n بعدی را می‌پوشانند که در آن فضا A و Λ تعریف می‌شوند و هر بردار w را می‌توان به صورت یک ترکیب خطی ویژه بردارهای v_i بیان نمود، یعنی داریم:

$$w = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \quad (2.110)$$

یک نکته مهم این است که Λ مستقیماً نشان می‌دهد که آیا ماتریس‌های A و Λ تکیه هستند یا نه. با استفاده از تعریف ارائه شده در بخش ۲.۲، هنگامی Λ و بنابراین A تکیه هستند که اگر و تنها اگر یک ویژه مقدار، مساوی صفر باشد، زیرا در آن حالت Λ^{-1} را نمی‌توان محاسبه نمود. در این زمینه مفید خواهد بود که برخی واژه‌های دیگری را نیز تعریف نمود. اگر همه ویژه مقدارها مثبت باشند، خواهیم گفت که ماتریس، معین مثبت است. اگر همه ویژه مقدارها بزرگتر یا مساوی صفر باشند، ماتریس، نیمه معین مثبت می‌باشد و با ویژه مقادیر منفی، صفر و یا مثبت، ماتریس را نامعین می‌نامیم.

۲.۶ خارج قسمت PAYLEIGH و مشخص سازی مینیماکس ویژه مقادیر

در بخش پیشین، ویژه مسأله $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ را تعریف نموده و در مورد خواص اساسی مربوط به جواب‌های این مسأله بحث کردیم. هدف این بخش تکمیل اطلاعات داده شده با استفاده از برخی اصول بسیار توانمند می‌باشد.

تعدادی اصول مهم با استفاده از خارج قسمت Rayleigh $\rho(\mathbf{v})$ استخراج می‌شوند. این خارج قسمت به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}^T A \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \quad (2.111)$$

نخستین نکته این است که:

$$\lambda_1 \leq \rho(\mathbf{v}) \leq \lambda_n \quad (2.112)$$

و نتیجه می‌شود که با استفاده از تعاریف داده شده در بخش ۲.۵، برای هر بردار \mathbf{v} داریم: اگر A معین مثبت باشد در این صورت داریم: $\rho(\mathbf{v}) > 0$ و اگر A نیمه معین مثبت باشد در این صورت داریم: $\rho(\mathbf{v}) \geq 0$ و برای ماتریس A نامعین، $\rho(\mathbf{v})$ می‌تواند منفی، صفر و یا مثبت باشد. برای اثبات (۲.۱۱۲) از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i \quad (2.113)$$

که در آن \mathbf{v}_i ویژه بردارهای A می‌باشند. با جایگزینی \mathbf{v} در (۲.۱۱۱) و با استفاده از $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\rho(\mathbf{v}) = \frac{\lambda_1 \alpha_1^2 + \lambda_2 \alpha_2^2 + \dots + \lambda_n \alpha_n^2}{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2} \quad (2.114)$$

بنابراین اگر $\lambda_1 \neq 0$ باشد:

$$\rho(\mathbf{v}) = \lambda_1 \frac{\alpha_1^2 + (\lambda_2/\lambda_1) \alpha_2^2 + \dots + (\lambda_n/\lambda_1) \alpha_n^2}{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2} \quad (2.115)$$

و اگر $\lambda_n \neq 0$ باشد:

$$\rho(\mathbf{v}) = \lambda_n \frac{(\lambda_1/\lambda_n) \alpha_1^2 + (\lambda_2/\lambda_n) \alpha_2^2 + \dots + \alpha_n^2}{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_n^2} \quad (2.116)$$

ولی از آنجا که $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ ، از اینرو روابط (۲.۱۱۴) تا (۲.۱۱۶) نشان می‌دهند که (۲.۱۱۲) صادق است. همچنین، مشاهده می‌شود که اگر $v = v_i$ باشد، در این صورت داریم: $\rho(v) = \lambda_i$.
 با در نظر گرفتن استفاده عملی از خارج قسمت Rayleigh، خاصیت زیر از ارزش خاصی برخوردار است. فرض کنید که v یک تقریب‌سازی از ویژه بردار v_i باشد، یعنی با ϵ کوچک داریم:

$$v = v_i + \epsilon x \quad (2.117)$$

در این صورت خارج قسمت Rayleigh بردار v ، یک تقریب به λ_i از مرتبه ϵ^2 را به دست خواهد داد، یعنی:

$$\rho(v) = \lambda_i + o(\epsilon^2) \quad (2.118)$$

نمادگذاری $o(\epsilon^2)$ به معنی "از مرتبه ϵ^2 می‌باشد و بر این نکته دلالت می‌کند که اگر $\delta = o(\epsilon^2)$ باشد، در این صورت $|\delta| \leq b\epsilon^2$ ، که در آن b یک مقدار ثابت است.

برای اثبات این خاصیت "خارج قسمت Rayleigh"، v را که از (۲.۱۱۳) به دست آمده است در عبارت خارج قسمت Rayleigh جایگذاری می‌کنیم تا رابطه زیر به دست آید:

$$\rho(v_i + \epsilon x) = \frac{(v_i^T + \epsilon x^T)A(v_i + \epsilon x)}{(v_i^T + \epsilon x^T)(v_i + \epsilon x)} \quad (2.119)$$

$$\rho(v_i + \epsilon x) = \frac{v_i^T A v_i + 2\epsilon v_i^T A x + \epsilon^2 x^T A x}{v_i^T v_i + 2\epsilon x^T v_i + \epsilon^2 x^T x} \quad (2.120)$$

ولی از آنجا که x یک خطا در v_i است، می‌توان نوشت:

$$x = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j v_j \quad (2.121)$$

اما با استفاده از $v_i^T v_j = \delta_{ij}$ و $v_i^T A v_j = \lambda_j v_i^T v_j$ ، داریم: $v_i^T A x = 0$ و $x^T v_i = 0$ ، از اینرو داریم:

$$\rho(v_i + \epsilon x) = \frac{\lambda_i + \epsilon^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j^2 \lambda_j}{1 + \epsilon^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j^2} \quad (2.122)$$

ولی با استفاده از قضیه دوجمله‌ای برای بسط مخرج رابطه (۲.۱۲۲) داریم:

$$\rho(v_i + \epsilon x) = \left(\lambda_i + \epsilon^2 \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j^2 \lambda_j \right) \left[1 - \epsilon^2 \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j^2 \right) + \epsilon^4 \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \alpha_j^2 \right)^2 + \dots \right] \quad (2.123)$$

$$\rho(\mathbf{v}_i + \epsilon \mathbf{x}) = \lambda_i + \epsilon^2 \left(\sum_{j=1}^n \alpha_j^2 \lambda_j - \lambda_i \sum_{j=1, j \neq i}^n \alpha_j^2 \right) + \text{higher-order terms} \quad (۲.۱۲۴)$$

بنابراین رابطه (۲.۱۱۸) نتیجه می‌شود. این نتایج را با اختصار در مثالی نشان می‌دهیم.
مثال ۲.۳۷: خارج قسمتهای Rayleigh $\rho(\mathbf{v})$ را برای ماتریس \mathbf{A} مورد استفاده در مثال ۲.۲۹ تعیین کنید. با استفاده از بردارهای \mathbf{v}_1 و \mathbf{v}_2 مثال ۲.۲۹، حالات زیر را در نظر بگیرید:

$$1. \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2; \quad 2. \mathbf{v} = \mathbf{v}_1; \quad 3. \mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + 0.02\mathbf{v}_2.$$

حل:

در حالت ۱ داریم:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\rho(\mathbf{v}) = \frac{[3 \ 1] \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}}{[3 \ 1] \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}} = \frac{1}{2}$$

و بنابراین:

با یادآوری اینکه $\lambda_1 = -2$ و $\lambda_2 = 3$ ، همچنان که انتظار می‌رفت، داریم:

$$\lambda_1 \leq \rho(\mathbf{v}) \leq \lambda_2$$

در حالت ۲، داریم:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\rho(\mathbf{v}) = \frac{[2 \ -1] \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}}{[2 \ -1] \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}} = -2$$

و بنابراین:

و باز هم همان‌گونه که انتظار می‌رفت، داریم $\rho(\mathbf{v}) = \lambda_1$.

سرانجام در حالت ۳، داریم:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.02 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.01 \\ -0.98 \end{bmatrix}$$

$$\rho(\mathbf{v}) = \frac{[2.01 \ -0.98] \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2.01 \\ -0.98 \end{bmatrix}}{[2.01 \ -0.98] \begin{bmatrix} 2.01 \\ -0.98 \end{bmatrix}}$$

$$= -1.99950005$$

و بنابراین:

در اینجا یادآوری می‌کنیم که $\rho(v) > \lambda_1$ می‌باشد و نیز تقریب‌سازی λ_1 توسط $\rho(v)$ به از تقریب‌سازی v_1 توسط v است.

اکنون که خارج قسمت Rayleigh معین گردیده است، می‌توان به مشخص‌سازی مینماکس ویژه مقادیر به عنوان یک اصل بسیار مهم پرداخت. از اصل Rayleigh می‌دانیم که

$$\rho(v) \geq \lambda_1 \quad (2.125)$$

که در آن v هر برداری می‌تواند باشد. به عبارت دیگر، اگر مسئله متغیر بودن v را در نظر بگیریم، همواره خواهیم داشت که: $\rho(v) \geq \lambda_1$ و هنگامی مینیمم حاصل خواهد شد که $v = v_1$ باشد و در این حالت $\rho(v_1) = \lambda_1$ است. فرض کنید اکنون تحدیدی را به v اعمال می‌کنیم، به عنوان مثال v را متعامد بر یک بردار خاص w گرفته و مسئله مینیمم‌سازی $\rho(v)$ را که در معرض چنین تحدیدی قرار دارد در نظر می‌گیریم. بعد از محاسبه مینیمم $\rho(v)$ با شرط $v^T w = 0$ ، می‌توان w را تغییر داد و برای هر w جدید، یک مینیمم جدیدی از $\rho(v)$ را تعیین نمود. در این صورت درخواهیم یافت که مقدار ماکزیمم تمامی مقادیر مینیمم تعیین شده، λ_1 است. نتیجه مذکور را می‌توان به صورت اصل زیر که مشخص‌سازی مینماکس ویژه مقادیر نامیده می‌شود تعمیم داد:

$$\lambda_r = \max \left\{ \min \frac{v^T A v}{v^T v} \right\} \quad r = 1, \dots, n \quad (2.126)$$

با v که در $v^T w_i = 0$ به ازای $i = 1, \dots, r$ صدق می‌کند. در (2.126) بردارهای w_i را انتخاب می‌کنیم و $i = 1, \dots, r-1$ و سپس مینیمم $\rho(v)$ را تعیین می‌نماییم، با این فرض که v تحت شرط $v^T w_i = 0$ و $i = 1, \dots, r-1$ قرار دارد. بعد از محاسبه این مینیمم، بردارهای w_i را تغییر می‌دهیم و همواره یک مینیمم جدیدی را محاسبه می‌نماییم. ماکزیمم مقداری که مقادیر مینیمم به آن می‌رسند λ_r می‌باشد.

اثبات (2.126) به صورت زیر می‌باشد. فرض کنید که:

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \quad (2.127)$$

و سمت راست (2.126) را که R می‌نامیم تعیین کنید:

$$R = \max \left\{ \min \frac{\alpha_1^2 \lambda_1 + \dots + \alpha_r^2 \lambda_r + \alpha_{r+1}^2 \lambda_{r+1} + \dots + \alpha_n^2 \lambda_n}{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_r^2 + \alpha_{r+1}^2 + \dots + \alpha_n^2} \right\} \quad (2.128)$$

ضرایب α_i باید شرایط زیر را ارضا نمایند:

$$w_j^T \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0 \quad j = 1, \dots, r-1 \quad (2.129)$$

با نوشتن مجدد (۲.۱۲۸)، رابطه زیر را به دست می آوریم:

$$R = \max \left\{ \min \left[\lambda_r - \frac{\alpha_1^2(\lambda_r - \lambda_1) + \dots + \alpha_{r-1}^2(\lambda_r - \lambda_{r-1}) + \alpha_{r+1}^2(\lambda_r - \lambda_{r+1}) + \dots + \alpha_n^2(\lambda_r - \lambda_n)}{\alpha_1^2 + \dots + \alpha_r^2 + \alpha_{r+1}^2 + \dots + \alpha_n^2} \right] \right\} \quad (۲.۱۳۰)$$

ولی حال می توان مشاهده کرد که برای شرط $\alpha_{r+1} = \alpha_{r+2} = \dots = \alpha_n = 0$ داریم:

$$R \leq \lambda_r \quad (۲.۱۳۱)$$

و شرط (۲.۱۲۹) را هنوز هم می توان با انتخاب قضاوتی برای α_r ارضا نمود. از سوی دیگر، فرض کنید که اکنون انتخاب می کنیم که $w_j = v_j$ به ازای $j = 1, \dots, r-1$. این امر ایجاب خواهد کرد که به ازای $j = 1, \dots, r-1$ ، $\alpha_j = 0$ باشد، و در نتیجه خواهیم داشت $R = \lambda_r$ ، که اثبات را کامل می کند.

یک خاصیت بسیار مهم را که می توان با استفاده از مشخص سازی مینماکس ویژه مقادیر ایجاد نمود، خاصیت تفکیک سازی ویژه مقدار می باشد. فرض کنید که علاوه بر مسأله $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ ، مسائل زیر را نیز در نظر می گیریم:

$$A^{(m)}\mathbf{v}^{(m)} = \lambda^{(m)}\mathbf{v}^{(m)} \quad (۲.۱۳۲)$$

که در آن $A^{(m)}$ با حذف آخرین m سطر و m ستون ماتریس A به دست می آید. بنابراین $A^{(m)}$ یک ماتریس مستقارن مربعی از مرتبه $(n-m)$ است. همچنین با استفاده از نمادگذاری $\mathbf{v}^{(0)} = \mathbf{v}$ ، $\lambda^{(0)} = \lambda$ ، $A^{(0)} = A$ ، خاصیت تفکیک سازی ویژه مقدار بیان می کند که ویژه مقادیر مسأله $A^{(m+1)}\mathbf{v}^{(m+1)} = \lambda^{(m+1)}\mathbf{v}^{(m+1)}$ ویژه مقادیر مسأله (۲.۱۳۲) را تفکیک می کنند؛ یعنی داریم:

$$\lambda_1^{(m)} \leq \lambda_1^{(m+1)} \leq \lambda_2^{(m)} \leq \lambda_2^{(m+1)} \leq \dots \leq \lambda_{n-m-1}^{(m)} \leq \lambda_{n-m-1}^{(m+1)} \leq \lambda_{n-m}^{(m)} \quad \text{for } m = 0, \dots, n-2 \quad (۲.۱۳۳)$$

برای اثبات (۲.۱۳۳) مسائل $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ و $A^{(l)}\mathbf{v}^{(l)} = \lambda^{(l)}\mathbf{v}^{(l)}$ را در نظر می گیریم. اگر بتوانیم نشان دهیم که خاصیت تفکیک سازی ویژه مقدار برای هر دو مسأله مزبور صادق می باشد، در این صورت خاصیت مزبور برای $m = 1, 2, \dots, n-2$ نیز صادق خواهد بود. بنابراین بویژه می خواهیم ثابت کنیم که:

$$\lambda_r \leq \lambda_r^{(1)} \leq \lambda_{r+1} \quad r = 1, \dots, n-1 \quad (۲.۱۳۴)$$

با استفاده از مشخص سازی مینماکس، داریم:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_{r+1} &= \max \left\{ \min \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \right\} \\ \mathbf{v}^T \mathbf{w}_i &= 0; \quad i = 1, \dots, r; \text{ all } \mathbf{w}_i \text{ arbitrary} \end{aligned} \right\} \quad (2.135)$$

به طور مشابه، داریم:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_r^{(1)} &= \max \left\{ \min \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \right\} \\ \mathbf{v}^T \mathbf{w}_i &= 0; \quad i = 1, \dots, r \\ \mathbf{w}_i \text{ arbitrary for } i &= 1, \dots, r-1 \\ \mathbf{w}_r &= \mathbf{e}_n \end{aligned} \right\} \quad (2.136)$$

که در آن \mathbf{w}_r مقید به این است که مساوی با \mathbf{e}_n باشد تا حتماً آخرین عنصر در \mathbf{v} صفر شود، زیرا \mathbf{e}_n آخرین ستون ماتریس همانی \mathbf{I} است. از آنجا که قید مذکور برای λ_{r+1} می‌تواند شدیدتر باشد و برای $\lambda_r^{(1)}$ نیز شامل گردد، از اینرو داریم:

$$\lambda_r^{(1)} \leq \lambda_{r+1} \quad (2.137)$$

برای تعیین λ_r روابط زیر را استفاده می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_r &= \max \left\{ \min \frac{\mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} \right\} \\ \mathbf{v}^T \mathbf{w}_i &= 0; \quad i = 1, \dots, r-1 \\ \text{all } \mathbf{w}_i \text{ arbitrary} \end{aligned} \right\} \quad (2.138)$$

با مقایسه مشخص‌سازهای $\lambda_r^{(1)}$ و λ_r ، یعنی (۲.۱۳۶) با (۲.۱۳۸)، مشاهده می‌کنیم که برای محاسبه $\lambda_r^{(1)}$ علاوه بر همان قیدهایی را که در محاسبه λ_r استفاده کردیم، قید دیگری نیز داریم (به عنوان مثال، $\mathbf{v}^T \mathbf{e}_n = 0$) از این‌رو داریم:

$$\lambda_r \leq \lambda_r^{(1)} \quad (2.139)$$

ولی (۲.۱۳۷) و (۲.۱۳۹) با هم نتیجه مورد نیاز را که در (۲.۱۳۴) داده شده است ایجاد می‌کنند. حال خاصیت تفکیک‌سازی ویژه مقدار، منجر به نتیجه دیگری می‌گردد. اگر مسائل ویژه مقدار (۲.۱۳۲) را که شامل مسئله $\mathbf{A} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$ نیز می‌باشد به صورت زیر بنویسیم:

$$p^{(m)}(\lambda^{(m)}) = \det (\mathbf{A}^{(m)} - \lambda^{(m)} \mathbf{I}); \quad m = 0, \dots, n-1 \quad (2.140)$$

که در آن $p^{(0)} = p$ ، در این صورت مشاهده می‌کنیم که ریشه‌های چندجمله‌ای $p(\lambda^{(m+1)})$ ریشه‌های $p(\lambda^{(m)})$ را تفکیک می‌کنند. با وجود این، دنباله‌ای از چندجمله‌ای‌های

$i = 1, \dots, q$ و $p_i(x)$ یک دنباله Sturm استورم را تشکیل می‌دهند، البته اگر ریشه‌های چند جمله‌ای $p_{j+1}(x)$ ریشه‌های چند جمله‌ای $p_j(x)$ را تفکیک نمایند. بنابراین خاصیت تفکیک‌سازی ویژه مقدار بیان می‌کند که چند جمله‌ای‌های مشخصه مسائل Sturm $n = 0, 1, \dots, n-1$ را تشکیل می‌دهند. یادآور شویم که در مباحث انجام شده، تمامی ماتریس‌های متقارن را در نظر گرفتیم، به عبارت دیگر، مشخص‌سازی میناکس ویژه مقادیر و خاصیت دنباله Sturm قابل کاربرد برای ماتریس‌های معین مثبت و نامعین می‌باشند. خاصیت دنباله Sturm را به طور وسیع در فصول بعدی مورد استفاده قرار خواهیم داد. (ر.ک. به: بخش‌های ۸.۲.۵، ۱۰.۲.۲، ۱۱.۴.۳ و ۱۱.۶.۴). مثال زیر را در نظر بگیرید:

مثال ۲.۳۸: ویژه مسئله $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ را در نظر بگیرید که در آن داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -7 \\ -4 & 2 & -4 \\ -7 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

ویژه مقادیر A و ماتریسهای $A^{(m)}$ و $m = 1, 2$ را تعیین کنید. نشان دهید که خاصیت تفکیک‌سازی داده شده در (۲.۱۳۳) صادق بوده و چند جمله‌ایهای مشخصه $p(\lambda)$ و $p^{(1)}(\lambda^{(1)})$ ، $p^{(2)}(\lambda^{(2)})$ را رسم نمایید:

حل:

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (5 - \lambda)[(2 - \lambda)(5 - \lambda) - 16] + 4[-4(5 - \lambda) - 28] - 7[16 + 7(2 - \lambda)]$$

داریم:

$$p(\lambda) = (-6 - \lambda)(6 - \lambda)(12 - \lambda)$$

بنابراین:

ویژه مقادیر عبارتند از:

$$\lambda_1 = -6; \quad \lambda_2 = 6; \quad \lambda_3 = 12$$

$$p^{(1)}(\lambda^{(1)}) = \det(A^{(1)} - \lambda^{(1)}I)$$

همچنین داریم:

$$= (5 - \lambda^{(1)})(2 - \lambda^{(1)}) - 16$$

$$p^{(1)}(\lambda^{(1)}) = \lambda^{(1)2} - 7\lambda^{(1)} - 6$$

یا:

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{7}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{73} = -0.7720$$

بنابراین:

$$\lambda_2^{(1)} = \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{73} = 7.772$$

$$p^{(2)}(\lambda^{(2)}) = \det(A^{(2)} - \lambda^{(2)}I)$$

سرانجام داریم:

$$= 5 - \lambda^{(2)}$$

$$\lambda_1^{(2)} = 5$$

بنابراین:

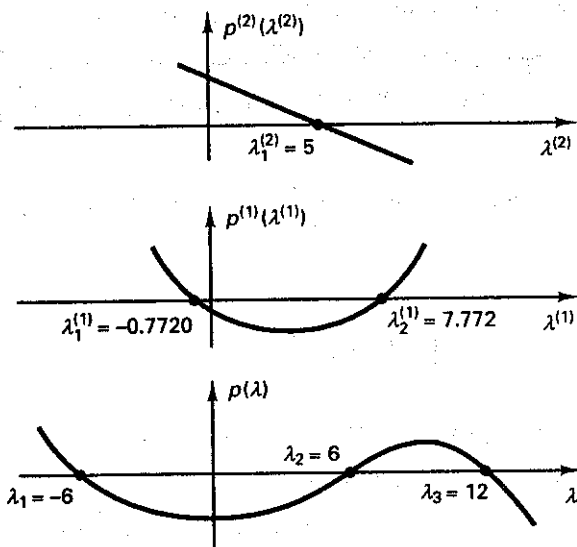
خاصیت تفکیک‌سازی صادق است، زیرا داریم:

$$\lambda_1 \leq \lambda_1^{(1)} \leq \lambda_2 \leq \lambda_2^{(1)} \leq \lambda_3$$

$$\lambda_1^{(1)} < \lambda_1^{(2)} < \lambda_2^{(1)}$$

و

چند جمله‌ای‌های مشخصه در شکل E۲.۳۸ رسم شده‌اند.



شکل E۲.۸ چند جمله‌ای‌های مشخصه

۲.۷ نرمهای برداری و ماتریسی

در مباحث پیشین در مورد بردارها، ماتریس‌ها، ویژه مقادیر و ویژه بردارهای ماتریس‌های متقارن بحث نمودیم و اهمیت عمیق‌تر عناصر موجودیت‌های مذکور را مورد بررسی قرار دادیم. با وجود این، جنبه مهم دیگری تاکنون مورد بحث واقع نشده است. اگر با اعداد منفرد مواجه باشیم، در این صورت می‌توان بزرگی یا کوچکی یک عدد را مشخص کرد. بردارها و ماتریس‌ها توابعی از عناصر زیاد می‌باشند، اما نیاز داریم که "اندازه" آنها را نیز تعیین کنیم. بزرگ اگر اعداد منفرد در یک فرایند تکراری مورد استفاده قرار گیرند، در این صورت همگرایی یک سری عدد مثلاً x_1, x_2, \dots, x_k به یک عدد x به آسانی به وسیله رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - x| = 0$$

(۲.۱۴۱)

یا می‌توان گفت که همگرایی هنگامی حاصل می‌شود که مانند $|x_k - x| = y_k$ به صفر میل کند در حالتی که $k \rightarrow \infty$. همچنین اگر مقادیر ثابت $p \geq 1$ و $c > 0$ را بتوانیم به گونه‌ای پیدا کنیم که:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|x_{k+1} - x|}{|x_k - x|^p} = c \quad (2.142)$$

خواهیم گفت که همگرایی از مرتبه p می‌باشد. اگر $p = 1$ باشد، همگرایی خطی بوده و نرخ همگرایی c است که در آن حالت c باید کوچکتر از ۱ باشد.

در فرایندهای حل تکراری با استفاده از بردارها و ماتریس‌ها نیز تعیین همگرایی ضرورت دارد. با ملاحظه اینکه اندازه یک بردار یا ماتریس باید به مقدار تمامی عناصر در آرایه‌ها بستگی داشته باشد، به تعریف نرم برداری و ماتریسی می‌رسیم. یک نرم، عددی منفرد است که بستگی به مقدار تمامی عناصر بردار یا ماتریس دارد.

تعریف: نرم بردار v از مرتبه n که به صورت $\|v\|$ نوشته می‌شود، یک عدد منفرد است. نرم مذکور تابعی از عناصر v بوده و در شرایط زیر صدق می‌کند:

$$\|v\| \geq 0, \|v\| = 0 \text{ اگر و تنها اگر } v = 0. \quad (2.143)$$

$$\|cv\| = |c| \|v\| \text{ به ازای هر اسکالر } c. \quad (2.144)$$

$$\|v+w\| \leq \|v\| + \|w\| \text{ به ازای بردارهای } v, w. \quad (2.145)$$

رابطه (۲.۱۴۵) نامعادله مثلثی است. سه نوع نرم برداری زیر معمولاً استفاده می‌شوند که نرم‌های برداری نامتناهی، یک و دو نامیده می‌شوند:

$$\|v\|_{\infty} = \max_i |v_i| \quad (2.146)$$

$$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i| \quad (2.147)$$

$$\|v\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^2 \right)^{1/2} \quad (2.148)$$

$\|v\|_2$ همچنین به نرم برداری اقلیدسی نیز معروف است. از نظر هندسی، این نرم مساوی با طول بردار v است. همه سه نرم مذکور حالت‌های خاصی از نرم برداری $\sqrt[n]{\sum_{i=1}^n |v_i|^n}$ می‌باشند که در آن برای رسیدن به روابط (۲.۱۴۶)، (۲.۱۴۷) و (۲.۱۴۸)، به جای p به ترتیب ∞ ، ۱ و ۲ قرار داده می‌شود. باید یادآور شد که هریک از نرم‌های (۲.۱۴۶) الی (۲.۱۴۸) شرایط (۲.۱۴۳) الی (۲.۱۴۵) را ارضا می‌کنند.

حال می‌توان همگرایی دنباله‌ای از بردارهای $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ به یک بردار x را تعیین نمود. یعنی برای همگرا شدن دنباله‌ای از بردارها به بردار x ، به ازای هریک از نرم‌های برداری لازم و کافی است که:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k - x\| = 0 \quad (۲.۱۴۹)$$

مرتبه همگرایی p و در حالت $p=1$ ، نرخ همگرایی c ، به طریق مشابه (۲.۱۴۲) محاسبه می‌گردند، ولی از نرم‌ها استفاده می‌شود، یعنی داریم:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x_{k+1} - x\|}{\|x_k - x\|^p} = c \quad (۲.۱۵۰)$$

با ملاحظه رابطه بین نرم‌های برداری، متوجه می‌شویم که آنها هم‌ارز هستند با علم به این نکته که برای هر دو نرم $\|\cdot\|_{s_1}$ و $\|\cdot\|_{s_2}$ ، دو مقدار ثابت مثبت α_1 و α_2 وجود دارند به گونه‌ای که:

$$\|v\|_{s_1} \leq \alpha_1 \|v\|_{s_2} \quad (۲.۱۵۱)$$

$$\|v\|_{s_2} \leq \alpha_2 \|v\|_{s_1} \quad (۲.۱۵۲)$$

که در آنها s_1 و s_2 نرم‌های ∞ و ۱ را نشان می‌دهند. بنابراین نتیجه می‌شود که:

$$c_1 \|v\|_{s_1} \leq \|v\|_{s_2} \leq c_2 \|v\|_{s_1} \quad (۲.۱۵۳)$$

که در آنها c_1 و c_2 دو مقدار ثابت مثبت بوده که ممکن است به n بستگی داشته باشد و البته در رابطه زیر نیز صدق می‌کنند:

$$\frac{1}{c_2} \|v\|_{s_2} \leq \|v\|_{s_1} \leq \frac{1}{c_1} \|v\|_{s_2}$$

مثال ۲.۳۹: مقادیر ثابت c_1 و c_2 در رابطه (۲.۱۵۳) را تعیین کنید اگر:

اولاً، نرم‌های s_1 و s_2 نرم‌های ∞ و ۱ باشند،

ثانیاً نرم‌های s_1 و s_2 نرم‌های ∞ و ۲ باشند،

سپس نشان دهید که در هر حالت، بردار زیر در رابطه (۲.۱۵۳) صدق می‌کند:

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

حل:

در نخستین حالت به ازای $c_1 = 1$ و $c_2 = n$ داریم:

$$\|v\|_{\infty} \leq \|v\|_1 \leq n \|v\|_{\infty} \quad (\text{الف})$$

و در دومین حالت به ازای $c_1 = 1$ و $c_2 = \sqrt{n}$ داریم:

$$\|v\|_{\infty} \leq \|v\|_2 \leq \sqrt{n} \|v\|_{\infty} \quad (\text{ب})$$

روابط مزبور نشان می دهند که نرمهای ۱ و ۲ هم ارز با نرم ∞ می باشند. به آسانی می توان نشان داد که کران های پایینی و بالایی در $\|v\|_1$ در (الف) و $\|v\|_2$ در (ب) نمی توانند نزدیک تر باشند زیرا علامت های مساوی برای بردارهای $v^T = [1 \ 1 \dots 1]$ و $v^T = e_i$ (و هر مضرب اسکالر مربوط به آن) حاصل می گردد.

اگر (الف) و (ب) را به بردار داده شده v اعمال کنیم، خواهیم داشت:

$$\|v\|_{\infty} = 3$$

$$\|v\|_1 = 1 + 3 + 2 = 6$$

$$\|v\|_2 = \sqrt{1 + 9 + 4} = \sqrt{14}$$

که در روابط (الف) و (ب) صدق می کنند:

$$3 \leq 6 \leq (3)(3); \quad 3 < \sqrt{14} \leq (\sqrt{3})(3)$$

یک نرم ماتریسی را نیز مشابه نرم برداری به صورت زیر تعریف می کنیم.
تعریف: نرم ماتریس A از مرتبه $n \times n$ که به صورت $\|A\|$ نوشته می شود، یک عدد منفرد است. نرم مذکور تابعی از عناصر A بوده و در روابط زیر صدق می کند:

$$\|A\| \geq 0 \text{ و } \|A\| = 0 \text{ اگر و تنها اگر } A = 0 \quad (2.154)$$

$$\|cA\| = |c| \|A\| \text{ به ازای هر اسکالر } c. \quad (2.155)$$

$$\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\| \text{ به ازای ماتریس های } A \text{ و } B. \quad (2.156)$$

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\| \text{ به ازای ماتریس های } A \text{ و } B. \quad (2.157)$$

رابطه (۲.۱۵۶) یک نامعادله مثلثی، هم ارز با (۲.۱۴۵) می باشد. شرط اضافی (۲.۱۵۷) که در تعریف یک نرم برداری تصریح نشده است، باید ارضا شود تا اینکه در هنگام انجام حاصل ضرب های ماتریسی، استفاده از نرمهای ماتریسی امکان پذیر باشد.
نرمهای ماتریسی زیر اغلب مورد استفاده قرار می گیرند:

$$\|A\|_{\infty} = \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (2.158)$$

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (2.159)$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\bar{\lambda}_n}; \quad \bar{\lambda}_n = \text{maximum eigenvalue of } A^T A \quad (2.160)$$

که در آن برای یک ماتریس متقارن A داریم: $\|A\|_{\infty} = \|A\|_1$ و $\|A\|_2 = \max_i |\lambda_i|$ (ر.ک. به: تمرین (۲.۲۱). نرم $\|A\|_2$ ، نرم طیفی ماتریس A نامیده می شود. هر یک از نرمهای مذکور در روابط (۲.۱۵۴) الی (۲.۱۵۷) صدق می کنند. اثبات اینکه رابطه (۲.۱۵۷) به ازای نرم نامتناهی ارضا می شود، در مثال ۲.۴۱ داده شده است.

مثال ۲.۴۰: نرمهای ∞ و 1 و 2 ماتریس A مورد نظر در مثال ۲.۳۸ را محاسبه کنید.
حل:

ماتریس A مورد نظر عبارت است از:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -4 & -7 \\ -4 & 2 & -4 \\ -7 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

با استفاده از تعاریف داده شده در (۲.۱۵۸) الی (۲.۱۶۰) داریم:

$$\|A\|_{\infty} = 5 + 4 + 7 = 16$$

$$\|A\|_1 = 5 + 4 + 7 = 16$$

نرم ۲ مساوی با $|\lambda_3|$ است و از اینرو $\|A\|_2 = 12$ (ر.ک. به: مثال ۲.۳۸).

مثال ۲.۴۱: برای دو ماتریس A و B نشان دهید که رابطه زیر را داریم:

$$\|AB\|_{\infty} \leq \|A\|_{\infty} \|B\|_{\infty}$$

حل:

با استفاده از تعریف نرم ماتریسی نامتناهی (۲.۱۵۸) داریم:

$$\|AB\|_{\infty} = \max_i \sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right|$$

$$\|AB\|_{\infty} \leq \max_i \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}| \quad \text{ولی در این صورت:}$$

$$= \max_i \sum_{k=1}^n \left\{ |a_{ik}| \sum_{j=1}^n |b_{kj}| \right\}$$

$$\leq \left\{ \max_i \sum_{k=1}^n |a_{ik}| \right\} \left\{ \max_k \sum_{j=1}^n |b_{kj}| \right\}$$

و این امر نتیجه مطلوب را اثبات می نماید.

همچون حالت دنباله ای از بردارها، اکنون می توان همگرایی دنباله ای از ماتریسهای $A_1, A_2, A_3, \dots, A_k$ به ماتریس A را تعیین نمود. برای همگرایی به ازای هریک از نرمهای ماتریسی داده شده لازم و کافی است که:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|A_k - A\| = 0 \quad (۲.۱۶۱)$$

در تعریف یک نرم ماتریسی به رابطه (۲.۱۵۷) نیاز داشتیم تا بتوانیم در هنگام مواجهه با حاصل ضرب های ماتریسی از نرمها استفاده کنیم. به طور مشابه همچنین در هنگام مواجهه با حاصل ضرب ماتریس ها با بردارها نیز نرمهای مذکور را به کار بریم. در چنین حالتی، برای یافتن

اطلاعات سودمند اعمال نرمها، ضروری است که فقط نرمهای برداری خاصی به همراهی نرمهای ماتریسی خاصی را به کار ببریم. اینکه چه نوع نرم برداری و ماتریسی را باید همراه هم استفاده نمود، به وسیله شرط زیر که به ازای هر ماتریس A و بردار v صادق است تعیین می‌گردد:

$$\|Av\| \leq \|A\| \|v\| \quad (2.162)$$

که در آن $\|Av\|$ و $\|v\|$ با استفاده از نرم برداری و $\|A\|$ با استفاده از نرم ماتریسی تعیین می‌شوند. می‌توان ارتباط نزدیکی را با شرط (۲.۱۵۷) که باید به ازای یک نرم ماتریسی صادق باشد، مشاهده نمود. اگر (۲.۱۶۲) به ازای یک نرم برداری و یک نرم ماتریسی خاصی صادق باشد، گفته می‌شود که دو نرم مذکور سازگار بوده و نیز نرم ماتریسی وابسته به نرم برداری است. نرمهای ۱، ۲ و ∞ یک ماتریس، همان گونه که پیش از این تعریف شد، به ترتیب وابسته به نرمهای برداری ۱، ۲ و ∞ داده شده در (۲.۱۴۶) الی (۲.۱۴۸) می‌باشند. در مثال زیر، ثابت خواهیم کرد که نرمهای ∞ سازگار و وابسته می‌باشند. سازگاری نرمهای ماتریسی و برداری ۱ و ۲ به طریق مشابه اثبات می‌شود.

مثال ۲.۴۲: نشان دهید که برای یک ماتریس A و بردار v داریم:

$$\|Av\|_{\infty} \leq \|A\|_{\infty} \|v\|_{\infty} \quad (\text{الف})$$

حل:

با استفاده از تعاریف نرمهای نامتناهی، داریم:

$$\begin{aligned} \|Av\|_{\infty} &= \max_i \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} v_j \right| \\ &\leq \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| |v_j| \\ &\leq \left\{ \max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right\} \{ \max_j |v_j| \} \end{aligned}$$

و این رابطه (الف) را اثبات می‌نماید.

برای نشان دادن اینکه می‌توان به تساوی رسید، صرفاً ضروری است که حالتی در نظر گرفته شود که در آن v یک بردار واحد کامل بوده و $a_{ij} \geq 0$. در این حالت $\|Av\|_{\infty} = \|A\|_{\infty}$ و $\|v\|_{\infty} = 1$. در فصول آینده با کاربردهای متنوع نرمها مواجه خواهیم شد. یک کاربرد باارزش نرمها، در محاسبه ویژه مقادیر یک ماتریس خود را نشان می‌دهد: اگر مسأله $Av = \lambda v$ را در نظر بگیریم، با گرفتن نرم از هر دو طرف، رابطه زیر را به دست خواهیم آورد:

$$\|Av\| = \|\lambda v\| \quad (2.163)$$

از اینرو با استفاده از (۲.۱۴۴) و (۲.۱۶۲) خواهیم داشت:

$$\|A\| \|v\| \geq |\lambda| \|v\| \quad (2.164)$$

یا

$$|\lambda| \leq \|A\| \quad (2.165)$$

بنابراین، قدر مطلق هر ویژه مقدار ماتریس A کوچکتر یا مساوی هر نرم آن ماتریس می‌باشد. با تعریف شعاع طیفی $\rho(A)$ به صورت زیر^(۳):

$$\rho(A) = \max |\lambda_i| \quad (2.166)$$

خواهیم داشت:

$$\rho(A) \leq \|A\| \quad (2.167)$$

در عمل، نرم ∞ ماتریس A به طریق بسیار آسانی محاسبه می‌شود و از اینرو به طور مؤثرتری در یافتن یک کران بالایی در بزرگترین قدر مطلق حاصل از ویژه مقادیر، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مثال ۲.۴۳: شعاع طیفی ماتریس A مورد نظر در مثال ۲.۳۸ را محاسبه کنید. سپس نشان دهید که

$$\rho(A) \leq \|A\|_{\infty}$$

جواب:

شعاع طیفی مساوی با $\max |\lambda_i|$ است. ویژه مقادیر ماتریس A در مثال ۲.۳۸ محاسبه شده‌اند.

$$\lambda_1 = -6; \quad \lambda_2 = 6; \quad \lambda_3 = 12$$

بنابراین

$$\rho(A) = 12$$

در مثال ۲.۴۰، محاسبه کردیم که $\|A\|_{\infty} = 16$. لذا رابطه $\rho(A) \leq \|A\|_{\infty}$ ارضا می‌شود. یک کاربرد مهم دیگر نرم‌ها هنگامی مشخص می‌شود که پایداری فرمول‌بندی‌های عناصر محدود مورد نظر باشد (ر.ک. به: بخش ۴.۵). فرض کنید که دنباله‌ای از گسسته‌سازی‌های عناصر محدود با یک عنصر مشخص را داریم و نیز در نظر بگیرید یک گسسته‌سازی نمونه معادله زیر را به دست می‌دهد:

$$Ax = b \quad (2.168)$$

اگر به طور تقریبی صحبت کنیم در این صورت برای پایداری می‌خواهیم که یک تغییر کوچک در b تنها موجب تغییری کوچک در x شود. برای تعیین مقدار این تغییرات، فرض کنید که نرم

۳- توجه شود که برای یک ماتریس متقارن A ، داریم: $\rho(A) = \|A\|_2$ ، ولی این نتیجه در حالت کلی برای یک ماتریس نامتقارن صادق نیست؛ به عنوان مثال در نظر بگیرید که

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \alpha \neq 0$$

$||\cdot||_L$ را برای تعیین اندازه جوابها و نرم $||\cdot||_R$ را برای تعیین اندازه عبارت‌های سمت راست انتخاب می‌کنیم.

تعریف: فرض کنید که ماتریس A از مرتبه $n \times n$ یک ماتریس غیرتکین است. ثابت پایداری A را نسبت به نرمهای $||\cdot||_L$ و $||\cdot||_R$ به عنوان کوچکترین ثابت ممکن S_{LR} به گونه‌ای تعریف می‌کنیم که به ازای کلیه بردارهای x و اختلال‌های Δx که در $Ax = b$ و $A\Delta x = \Delta b$ صدق می‌کنند، داشته باشیم:

$$\frac{\|\Delta x\|_L}{\|x\|_L} \leq S_{LR} \frac{\|\Delta b\|_R}{\|b\|_R} \quad (2.169)$$

رابطه مذکور، تغییر نسبی در جواب x (در نرم $||\cdot||_L$) را به عنوان نتیجه‌ای از یک تغییر در بردار نیروی b (در نرم $||\cdot||_R$) کراندار می‌کند و می‌گوییم که دنباله‌ای از گسسته‌سازی‌ها نسبت به نرمهای $||\cdot||_L$ و $||\cdot||_R$ پایدار است اگر ثابت S_{LR} قطع نظر از اینکه n چقدر بزرگ است به طور یکنواخت کراندار شود (ر.ک. به: بخش ۴.۵.۲). مطابق با (۲.۱۶۲) فرض کنید که^(۴):

$$\|A\|_{LR} = \sup_y \frac{\|Ay\|_R}{\|y\|_L} \quad (2.170)$$

و

$$\|A^{-1}\|_{RL} = \sup_z \frac{\|A^{-1}z\|_L}{\|z\|_R} \quad (2.171)$$

با استفاده از $y = x$ در (۲.۱۷۰)، رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\|A\|_{LR} \geq \frac{\|b\|_R}{\|x\|_L} \quad (2.172)$$

و با استفاده از $z = \Delta b$ در (۲.۱۷۱)، رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$\|A^{-1}\|_{RL} \geq \frac{\|\Delta x\|_L}{\|\Delta b\|_R} \quad (2.173)$$

بنابراین داریم:

۴- در نمایش زیر منظور از "sup"، "کوچکترین کران بالایی" و منظور از "inf"، "بزرگترین کران پایینی" می‌باشد.

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|_L}{\|\mathbf{x}\|_L} \leq \|\mathbf{A}\|_{LR} \|\mathbf{A}^{-1}\|_{RL} \frac{\|\Delta \mathbf{b}\|_R}{\|\mathbf{b}\|_R} \quad (2.174)$$

و بنابراین:

$$S_{LR} = \|\mathbf{A}\|_{LR} \|\mathbf{A}^{-1}\|_{RL} \quad (2.175)$$

در تعیین S_{LR} ، استفاده از نرم‌های مناسب حائز اهمیت می‌باشد و با داشتن یک نرم $\|\cdot\|_L$ ، انتخاب طبیعی برای نرم R ، یک نرم دوگان $\|\cdot\|_L$ است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|\mathbf{z}\|_{DL} = \sup \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{z}}{\|\mathbf{y}\|_L} \quad (2.176)$$

با این انتخاب رابطه زیر حاصل می‌شود (ر.ک. به: مثال ۲.۲۲):

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\|_{LR} &= \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y}} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|_L \|\mathbf{y}\|_L} \\ &= k_A \end{aligned} \quad (2.177)$$

و

$$\begin{aligned} (\|\mathbf{A}^{-1}\|_{RL})^{-1} &= \inf_{\mathbf{x}} \sup_{\mathbf{y}} \frac{\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\|_L \|\mathbf{y}\|_L} \\ &= \gamma_A \end{aligned} \quad (2.178)$$

در این صورت ثابت پایداری S_{LR} به وسیله رابطه زیر مشخص می‌شود:

$$S_{LR} = \frac{k_A}{\gamma_A} \quad (2.179)$$

همچنان‌که پیشتر اشاره شد، برای پایداری یک گسسته‌سازی، ضروری است نشان دهیم که S_{LR} در (۲.۱۷۹)، هنگامی که شبکه عناصر محدود تعریف می‌شود، کراندار باقی می‌ماند. نتیجه مذکور تقریباً یک نتیجه کلی است. بحث ما در بخش ۴.۵ مربوط به یک فرم خاص \mathbf{A} خواهد بود؛ به عنوان مثال حالتی که در فرمول‌بندی‌های آمیخته تغییر مکان / فشار (u/p) پیش می‌آید. در این حالت شرط پایداری منجر به عبارات خاصی می‌شود که به طور ویژه مربوط به فرمول‌بندی‌های u/p می‌باشند و این عبارات را در بخش ۴.۵.۲ ارائه خواهیم کرد.

۲.۸ تمرین‌ها

۲.۱ نتیجه زیرین مورد نیاز را با کاراترین روش - یعنی با حداقل تعداد عملیات ضرب - تعیین کنید. تعداد ضربهای مورد استفاده را شمارش نمایید.
فرض کنید که:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$k = 4$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 8 & -1 \\ -2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

و $B^T A k C B$ را محاسبه کنید.

۲.۲ (الف) A^{-1} را تعیین کنید در صورتی که:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

و نیز زمانی که A به صورت زیر می‌باشد:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(ب) دترمینانهای هر دو ماتریس مزبور را تعیین کنید.

۲.۳ سه بردار زیر را در نظر بگیرید:

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -7 \\ 1 \\ 6 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

سه بردار مزبور را به عنوان ستونهای ماتریس A استفاده کرده و رتبه و هسته ماتریس مذکور را تعیین نمایید.

- ۲.۴ ماتریس A را در نظر بگیرید. مقدار ثابت k را به گونه‌ای تعیین کنید که رتبه ماتریس A ، ۲ شود و سپس هسته ماتریس A را تعیین نمایید.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1+k & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- ۲.۵ دو بردار زیر را که دستگاه مختصات دکارتی سه‌بعدی با بردارهای پایه e_i تعریف شده‌اند، در نظر بگیرید.

$$u = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}; \quad v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

- (الف) زاویه بین دو بردار مذکور را تعیین کنید.
- (ب) فرض کنید که از یک پایه جدید نظیر پایه پریم‌دار مثال ۲.۲۴ استفاده شود. در این صورت مؤلفه‌های هر دو بردار را در پایه جدید تعیین نمایید.
- (پ) زاویه بین این دو بردار را در پایه جدید به دست آورید.
- ۲.۶ یک ماتریس بازتاب به صورت $P = I - \frac{2}{vTv} vv^T$ ، $\alpha = \frac{2}{vTv}$ تعریف می‌شود که در آن v یک بردار (از مرتبه n) عمود بر صفحه بازتاب است.
- (الف) نشان دهید که P یک ماتریس متعامد می‌باشد.
- (ب) بردار Pu را در نظر بگیرید که در آن u نیز یک بردار از مرتبه n می‌باشد. نشان دهید که عمل P روی u به گونه‌ای است که مؤلفه u عمود بر صفحه بازتاب، جهت عکس خود را دارا می‌باشد و مؤلفه u در صفحه بازتاب تغییر داده نمی‌شود.
- ۲.۷ مؤلفه‌های تانسور تنش در دستگاه مختصات x_1 و x_2 شکل E۲.۲۵ در یک نقطه عبارتند از:

$$\tau = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ -6 & 20 \end{bmatrix}$$

- (الف) پایه جدیدی را ایجاد کنید که در آن مؤلفه‌های غیرقطری صفر باشند و مؤلفه‌های قطری جدید را پیدا کنید.

- (ب) تنش مؤثر به صورت $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2} S_{ij} S_{ij}}$ تعریف می‌شود که در آن S_{ij} مؤلفه‌های تانسور تنش انحراف‌دار می‌باشند، $S_{ij} = \tau_{ij} - \tau_m \delta_{ij}$ و τ_m تنش میانگین است، $\tau_m = \frac{\tau_{ii}}{3}$. ثابت کنید که $\bar{\sigma}$ یک اسکالر می‌باشد. سپس به طور صریح برای مقادیر داده شده τ نشان دهید که $\bar{\sigma}$ در پایه‌های قدیم و جدید عدد یکسانی است.

۲.۸ ستون q به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$q = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

که در آن (x_1, x_2) مختصات یک نقطه می‌باشند. ثابت کنید که q یک بردار نیست.

۲.۹ مؤلفه‌های تانسور کرنش Green - Lagrange در دستگاه مختصات دکارتی به صورت

زیر تعریف می‌شوند: (برای جزییات بیشتر ر.ک. به بخش ۶.۲.۲)

$$\epsilon = \frac{1}{2}(X^T X - I)$$

که در آن مؤلفه‌های گرادیان تغییر شکل X عبارتند از:

$$X_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

و x_j, u_i به ترتیب تغییر مکانها و مختصات می‌باشند. ثابت کنید که تانسور کرنش Green - Lagrange یک تانسور از مرتبه دوم است.

۲.۱۰ تانسور مصالح در (۲.۶۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت: [ر.ک. به: (۶.۱۸۵)]

$$C_{ijrs} = \lambda \delta_{ij} \delta_{rs} + \mu (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}) \quad (\text{الف})$$

که در آن λ و μ مقادیر ثابت Lamè می‌باشند:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

این رابطه تنش - کرنش را می‌توان به صورت ماتریسی نیز که در جدول ۴.۳ استفاده شده است نوشت، اما در جدول به طور ضمنی از کرنش مهندسی استفاده شده است. (مؤلفه‌های کرنش نرمال تانسوری مساوی مؤلفه‌های کرنش نرمال مهندسی می‌باشند، اما مؤلفه‌های کرنشی برشی تانسوری نصف مؤلفه‌های مهندسی هستند).

(الف) ثابت کنید که C_{ijrs} یک تانسور از مرتبه چهارم است.

(ب) حالت تنش مسطح را در نظر گرفته و از عبارت (الف)، عبارت موجود در جدول ۴.۳ را استخراج کنید.

(پ) حالت تنش مسطح را در نظر گرفته و (۲.۶۶) را به صورت ماتریسی $C' = TCT^T$ بنویسید که در آن C در جدول ۴.۳ داده شده و T را استخراج کنید. (همچنین ر.ک. به:

تمرین ۴.۳۹)

۲.۱۱ ثابت کنید که رابطه (۲.۷۰) صادق است.

۲.۱۲ بردارهای پایه هموردا که در یک دستگاه مختصات دکارتی ارائه شده‌اند عبارتند از:

$$\mathbf{g}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{g}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

بردارهای نیرو و تغییر مکان در این پایه عبارتند از:

$$\mathbf{R} = 3\mathbf{g}_1 + 4\mathbf{g}_2; \quad \mathbf{u} = -2\mathbf{g}_1 + 3\mathbf{g}_2$$

(الف) صرفاً از پایه هموردا استفاده نموده و $\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}$ را محاسبه کنید.

(ب) $\mathbf{R} \cdot \mathbf{u}$ را با استفاده از پایه هموردا برای \mathbf{R} و پایه پادوردا برای \mathbf{u} محاسبه کنید.

۲.۱۳ فرض کنید که پایه هموردا با \mathbf{g}_1 و \mathbf{g}_2 در تمرین ۲.۱۲ مشخص شده است. مؤلفه‌های تانسور تنش و کرنش را در پایه دکارتی به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} 100 & 10 \\ 10 & 200 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0.05 \\ 0.05 & 0.02 \end{bmatrix}$$

مؤلفه‌های $\tilde{\tau}^{mn}$ و $\tilde{\epsilon}_{mn}$ را تعیین نموده و به طور صریح نشان دهید که حاصلضرب $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\epsilon}$ مساوی حالتی است که در یک طرف مؤلفه‌های دکارتی تنش و کرنش استفاده می‌شوند و در طرف دیگر مؤلفه‌های تنش پادوردا و کرنش هموردا به کار می‌روند.

۲.۱۴ \mathbf{a} و \mathbf{b} را تانسورهای مرتبه دوم فرض کرده و \mathbf{A} و \mathbf{B} را ماتریس‌های تبدیل در نظر بگیرید. ثابت کنید که:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{B}^T) = (\mathbf{A}^T\mathbf{a}\mathbf{B}) \cdot \mathbf{b}.$$

(راهنمایی: رابطه مذکور هنگامی به آسانی اثبات می‌گردد که در آن کمیت‌ها به صورت مؤلفه‌ای نوشته شوند).

۲.۱۵ ویژه مسأله $\lambda \mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{v}$ را در نظر بگیرید که در آن:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

(الف) ویژه مقادیر و ویژه بردارهای یکامتعامل شده را به دست آورید و \mathbf{A} را به صورت بنویسید. (۲.۱.۹)

(ب) \mathbf{A}^6 , \mathbf{A}^{-1} و \mathbf{A}^{-2} را محاسبه کنید.

۲.۱۶ ویژه مسأله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

کوچکترین ویژه مقدار و ویژه بردار متناظر عبارتند از:

$$\lambda_1 = 1; \quad \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

همچنین $\lambda_2 = 2, \lambda_3 = 4$. خارج قسمت Rayleigh $\rho(\mathbf{v})$ را تعیین کنید در صورتی که:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + 0.1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

و نشان دهید که $\rho(\mathbf{v})$ به λ_1 نزدیکتر از \mathbf{v} به \mathbf{v}_1 می‌باشد.

۲.۱۷ ویژه مسأله زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 8 \end{bmatrix} \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

ویژه مقادیر ماتریسهای \mathbf{A} و $\mathbf{A}^{(m)}$ و $m = 1, 2$ را تعیین کنید که در آن $\mathbf{A}^{(m)}$ با حذف m سطر و m ستون آخر ماتریس \mathbf{A} به دست می‌آید. چند جمله‌ای‌های مشخصه متناظر را رسم نمایید (ر.ک. به: مثال ۲.۳۸).

۲.۱۸ ثابت کنید که نرمهای ۱ و ۲ بردار \mathbf{v} هم‌ارز می‌باشند. سپس به طور صریح این هم‌ارزی را برای بردار زیر نشان دهید:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$$

۲.۱۹ رابطه (۲.۱۵۷) را برای نرم ۱ اثبات نمایید.

۲.۲۰ ثابت کنید که $\|\mathbf{A}\mathbf{v}\|_1 \leq \|\mathbf{A}\|_1 \|\mathbf{v}\|_1$.

۲.۲۱ ثابت کنید که برای یک ماتریس متقارن A داریم: $\|A\|_2 = \rho(A)$ (راهنمایی: از رابطه (۲.۱۸) استفاده نمایید).

۲.۲۲ ثابت کنید که (۲.۱۷۷) و (۲.۱۷۸) برای حالتی که نرم دوگان L را برای نرم R استفاده می‌کنیم، صادق‌اند.

فصل سوم

برخی مفاهیم بنیادی تحلیل مهندسی و مقدمه‌ای بر روش عناصر محدود

۳.۱ مقدمه

لازمه تحلیل یک سیستم مهندسی، ایده‌آل‌سازی سیستم به صورتی که بتوان آن را حل نمود، فرمول‌بندی مدل ریاضی، حل مدل مذکور و تفسیر نتایج می‌باشد (ر.ک. به بخش ۱.۲). هدف اصلی این فصل بحث در مورد برخی تکنیک‌های کلاسیک می‌باشد که برای فرمول‌بندی و حل مدل‌های ریاضی سیستم‌های مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرند (همچنین رجوع شود به [A] S. H. Crandall). بحث مذکور پایه ارزشمندی را برای ارائه روش‌های عناصر محدود در فصل‌های بعدی فراهم خواهد نمود. دو رسته مدل‌های ریاضی در نظر گرفته می‌شوند: مدل‌های پارامتر متمرکز و مدل‌های مبتنی بر مکانیک محیط‌های پیوسته. مدل‌های مذکور مدل‌های ریاضی "گسسته سیستم" و "پیوسته سیستم" نیز نامیده می‌شوند.

در یک مدل ریاضی پارامتر متمرکز، پاسخ واقعی سیستم مستقیماً به وسیله حل تعداد محدودی متغیر حالت توصیف می‌گردد. در این فصل، در مورد برخی روش‌های عمومی که برای به دست آوردن معادلات حاکم مدل‌های پارامتر متمرکز به کار گرفته می‌شوند بحث خواهیم نمود. مسائل حالت پایا، انتشار و ویژه مقدار را ملاحظه خواهیم کرد و به اختصار در مورد طبیعت جواب‌های این مسائل نیز بحث خواهیم نمود.

برای یک مدل ریاضی مبتنی بر مکانیک محیط‌های پیوسته نحوه به دست آوردن

فرمول‌بندی معادلات حاکم مانند حالتِ مدل پارامتر متمرکز می‌باشد، ولی به جای یک مجموعه از معادلات جبری برای یافتن متغیرهای حالتِ مجهول، معادلات دیفرانسیل بر پاسخ سیستم، حاکم می‌باشند. حل کامل معادلات دیفرانسیل که همراه با ارضا تمامی شرایط مرزی باشد، تنها برای مدل‌های ریاضی نسبتاً ساده امکان‌پذیر است ولی غالباً باید از روش‌های عددی استفاده شود. روش‌های مذکور، در اساس، مدل ریاضی پیوسته سیستم را به صورت یک ایده‌آل‌سازی گسسته درمی‌آورد که می‌تواند به طریق مشابه مدل‌های پارامتر متمرکز حل شود. در این فصل، برخی روش‌های مهم کلاسیک را که در تبدیل مدل‌های ریاضی "پیوسته سیستم" به مدل‌های عددی پارامتر متمرکز به کار برده می‌شوند، به اختصار شرح می‌دهیم و به طور مجمل نشان خواهیم داد که چگونه روش‌های کلاسیک مذکور شالوده روش‌های نوین عناصر محدود را فراهم می‌نمایند.

در عمل، تحلیلگر باید تصمیم بگیرد که یک سیستم مهندسی به وسیله یک مدل ریاضی پارامتر متمرکز نمایش داده شود، یا بوسیله یک مدل ریاضی پیوسته سیستم، و نیز باید تمامی ویژگی‌های مدل را انتخاب نماید. به علاوه اگر یک مدل ریاضی معینی انتخاب شود، در این صورت تحلیلگر باید تصمیم بگیرد که چگونه مدل ریاضی مذکور را برای یافتن پاسخ، به روش عددی حل نماید. این جایگاهی است که ارزش روش‌های عناصر محدود مشخص می‌شود؛ به عبارت دیگر، تکنیک‌های عناصر محدود به همراه کامپیوتر، حل مدل‌های ریاضی پیوسته سیستم را به طریقی سیستماتیک امکان‌پذیر می‌سازند و در حقیقت امکان بسط عملی و کاربرد روش‌های کلاسیک ارائه شده در این فصل را در حل سیستم‌های بسیار پیچیده مهندسی فراهم می‌نمایند.

۳.۲ حل مدل‌های ریاضی "گسسته سیستم"

در این بخش به مطالعه مدل‌های ریاضی گسسته یا پارامتر متمرکز می‌پردازیم. اساس یک مدل ریاضی پارامتر متمرکز این است که حالت سیستم را می‌توان مستقیماً با دقت کافی به وسیله مقادیر تعدادی محدود (و معمولاً کوچکی) از متغیرهای حالت توصیف نمود. برای حل این نوع سیستم، انجام مراحل زیر ضروری است:

۱. ایده‌آل‌سازی سیستم: سیستم واقعی به عنوان مجموعه همبسته عناصر، ایده‌آل‌سازی می‌شود.

۲. تعادل عناصر: شرایط تعادل هر عنصر برحسب متغیرهای حالت ایجاد می‌شوند.

۳. سوار کردن عناصر: شرایط اتصال متقابل عناصر مورد استفاده قرار می‌گیرند تا

مجموعه‌ای از معادلات همزمان برحسب متغیرهای حالت مجهول ایجاد شود.

۴. محاسبه پاسخ: معادلات همزمان، جهت پیدا کردن متغیرهای حالت حل می‌شوند و با استفاده از شرایط تعادل عناصر، پاسخ هر عنصری محاسبه می‌گردد.

مراحل مذکور در تحلیل انواع مختلفی از مسائلی که مورد نظر هستند دنبال می‌شوند: مسائل حالت پایا، مسائل انتشار و مسائل ویژه مقدار. هدف این بخش فراهم نمودن مقدمه‌ای برای نشان دادن چگونگی تحلیل مسائل در زمینه‌های خاص مذکور و بحث مختصری در مورد طبیعت راه حل‌ها می‌باشد. باید اذعان کرد که تمامی انواع مختلف تحلیل مسائل مهندسی مورد ملاحظه قرار نمی‌گیرند؛ ولی بخش اعظمی از مسائل طبیعتاً در این عرصه‌ها جای می‌گیرند. در مثالهای این بخش، مسائل سازه‌ای، الکتریکی، جریان سیالات و انتقال حرارت را در نظر می‌گیریم و تأکید می‌کنیم که در تحلیل هر یک از مسائل مزبور، گام‌های اساسی یکسانی دنبال می‌شوند.

۳.۲.۱ مسائل حالت پایا

ویژگی اصلی یک مسأله حالت پایا این است که پاسخ سیستم با زمان تغییر نمی‌کند. بنابراین، متغیرهای حالتی را که پاسخ سیستم مورد نظر را توصیف می‌نمایند، می‌توان از حل مجموعه‌ای از معادلات که در آنها زمان بعنوان یک متغیر دخالته ندارد به دست آورد. در مثالهای زیر، روش تحلیل را در حل برخی مسائل نشان خواهیم داد. پنج مسأله نمونه ارائه می‌شوند:

۱. سیستم فنر ارتجاعی

۲. سیستم انتقال حرارت

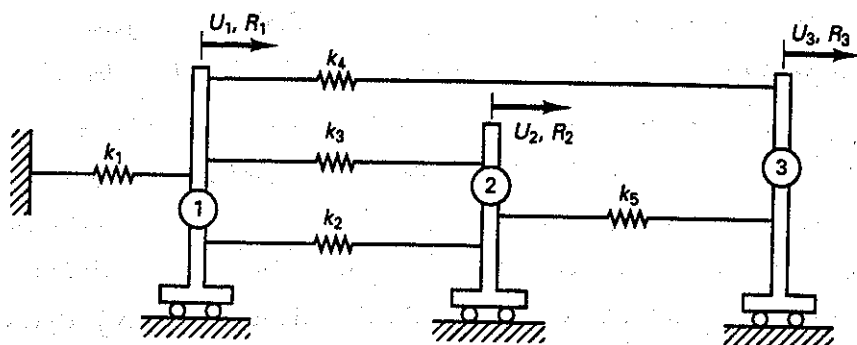
۳. شبکه هیدرولیکی

۴. شبکه DC

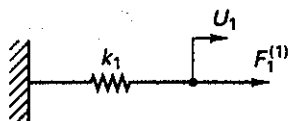
۵. سیستم فنر ارتجاعی غیرخطی

تحلیل هر مسأله‌ای کاربرد مراحل عمومی تحلیل را نشان می‌دهد که به اختصار در بخش ۳.۲ شرح داده شدند. چهار مسأله نخست شامل تحلیل سیستمهای خطی می‌باشد، در حالی که سیستم فنر ارتجاعی غیرخطی پاسخ غیرخطی به بارهای وارده را نشان می‌دهد. تمامی مسائل بخوبی تعریف می‌شوند و جواب منحصر به فردی برای پاسخ هر سیستم وجود دارد.

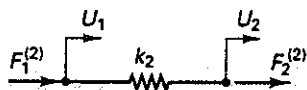
مثال ۳.۱: شکل ۳.۱ یک سیستم متشکل از ۳ گاری صلب را در صفحه افقی نشان می‌دهد که به وسیله سیستمی از فنرهای ارتجاعی خطی به همدیگر اتصال یافته‌اند. تغییر مکانهای گاری‌ها را محاسبه نموده و نیروهای موجود در فنرها را برای بارگذاری نشان داده شده محاسبه نمایید



(الف) آرایش فیزیکی



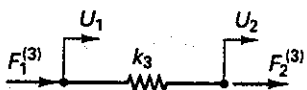
$$k_1 U_1 = F_1^{(1)}$$



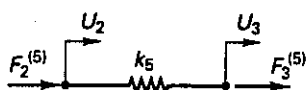
$$k_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \end{bmatrix}$$



$$k_4 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{(4)} \\ F_3^{(4)} \end{bmatrix}$$



$$k_3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{(3)} \\ F_2^{(3)} \end{bmatrix}$$



$$k_5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2^{(5)} \\ F_3^{(5)} \end{bmatrix}$$

(ب) روابط تعادل عناصر

شکل ۳.۱ E سیستم گاریهای صلب اتصال یافته به وسیله فنرهای خطی

حل:

تحلیل را با دنبال نمودن مراحل ۱ تا ۴ ارائه شده در بخش ۳.۲ انجام می‌دهیم. تغییر مکان‌های U_1, U_2, U_3 را به عنوان متغیرهای حالت که پاسخ سیستم را مشخص می‌نمایند انتخاب می‌کنیم. تغییر مکانهای مذکور از موقعیت اولیه گاریها اندازه گرفته می‌شوند که در آن فنرها در حالت آزاد و بدون کشش می‌باشند. عناصر انفرادی فنی و شرایط تعادل آنها در شکل

(ب) ۳.۱ E نشان داده می‌شوند.

برای ایجاد معادلات حاکم به ازای متغیرهای حالت، شرایط اتصال متقابل عناصر مورد استفاده قرار می‌گیرند که متناظر با تعادل ایستایی هریک از سه گاری می‌باشند:

$$F_1^{(1)} + F_1^{(2)} + F_1^{(3)} + F_1^{(4)} = R_1$$

$$F_2^{(2)} + F_2^{(3)} + F_2^{(5)} = R_2 \quad (\text{الف})$$

$$F_3^{(4)} + F_3^{(5)} = R_3$$

حال می‌توان نیروهای انتهایی عنصری $F_i^{(j)}$ ؛ $i = 1, 2, 3$ ؛ $j = 1, \dots, 5$ را با استفاده از شرایط تعادل عناصر که در شکل (ب) ۳.۱ E داده شده‌اند جایگذاری نمود. در این جا متناظر با مؤلفه‌های تغییر مکان U_1, U_2, U_3 می‌توان برای عنصر شماره ۱ نوشت:

$$\begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}^{(1)} \mathbf{U} = \mathbf{F}^{(1)}$$

یا

برای عنصر شماره ۲:

$$\begin{bmatrix} k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^{(2)} \\ F_2^{(2)} \\ 0 \end{bmatrix}$$

یا $\mathbf{K}^{(2)} \mathbf{U} = \mathbf{F}^{(2)}$ و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. بنابراین شرایط اتصال متقابل عناصر در (الف) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\mathbf{KU} = \mathbf{R} \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{U}^T = [U_1 \quad U_2 \quad U_3]$$

که در آن

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2 + k_3 + k_4) & -(k_2 + k_3) & -k_4 \\ -(k_2 + k_3) & (k_2 + k_3 + k_5) & -k_5 \\ -k_4 & -k_5 & (k_4 + k_5) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}^T = [R_1 \quad R_2 \quad R_3]$$

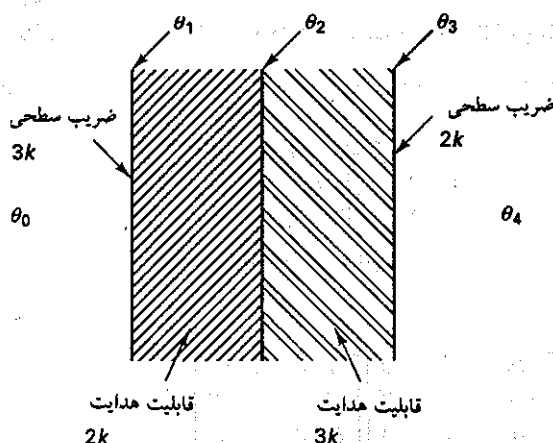
این نکته باید یادآوری شود که ماتریس ضریب \mathbf{K} را می‌توان با استفاده از رابطه زیر به دست آورد:

$$\mathbf{K} = \sum_{i=1}^5 \mathbf{K}^{(i)} \quad (\text{پ})$$

که در آن $\mathbf{K}^{(i)}$ ماتریس‌های سختی عنصری‌اند. به فرایند جمع برای یافتن ماتریس سختی کل سازه در (پ) با استفاده از جمع مستقیم ماتریس‌های سختی عناصر، روش مستقیم خطی اطلاق می‌شود.

تحلیل سیستم با حل (ب) برای یافتن متغیرهای حالت U_1 , U_2 , U_3 و سپس با محاسبه نیروهای عنصری از روابط تعادل عناصر داده شده در شکل E ۳.۱ کامل می گردد.

مثال ۳.۲: دیواری همان گونه که در شکل E ۳.۱ نشان داده شده است از دو دال همگن که با همدیگر در تماس هستند ساخته شده است. در شرایط حالت پایا، دمای دیوار به وسیله دماهای سطح خارجی θ_1 و θ_3 و دمای سطح مشترک θ_2 مشخص می شود. معادلات تعادل مسأله را برحسب دماهای مذکور تعیین کنید در صورتی که دماهای محیطی θ_0 و θ_4 معلوم باشند.



شکل E ۳.۲ دال تحت اثر شرایط مرزی دمایی

حل:

قابلیت هدایت در واحد سطح برای دالهای منفرد و ضرایب سطحی در شکل E ۳.۲ داده شده اند. قانون هدایت حرارتی $q/A = k\Delta\theta$ است که در آن q جریان حرارتی کل، A سطح، $\Delta\theta$ ، میزان افت دما در جهت جریان حرارتی و k قابلیت هدایت یا ضریب سطحی می باشند. متغیرهای حالت در این تحلیل θ_1 , θ_2 , و θ_3 می باشند. با استفاده از قانون هدایت حرارتی، معادلات تعادل عناصر عبارتند از:

$$\begin{aligned} q_1 &= 3k(\theta_0 - \theta_1) && \text{برای سطح سمت چپ در واحد سطح داریم:} \\ q_2 &= 2k(\theta_1 - \theta_2) && \text{برای دال سمت چپ داریم:} \\ q_3 &= 3k(\theta_2 - \theta_3) && \text{برای دال سمت راست داریم:} \\ q_4 &= 2k(\theta_3 - \theta_4) && \text{و برای سطح سمت راست داریم:} \end{aligned}$$

جهت پیدا کردن معادلات حاکم، برحسب متغیرهای حالت، از شرط تعادل جریان حرارتی استفاده می کنیم یعنی $q_1 = q_2 = q_3 = q_4$. بنابراین:

$$3k(\theta_0 - \theta_1) = 2k(\theta_1 - \theta_2)$$

$$2k(\theta_1 - \theta_2) = 3k(\theta_2 - \theta_3)$$

$$3k(\theta_2 - \theta_3) = 2k(\theta_3 - \theta_4)$$

با نوشتن معادلات مذکور به صورت ماتریسی، رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} 5k & -2k & 0 \\ -2k & 5k & -3k \\ 0 & -3k & 5k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k\theta_0 \\ 0 \\ 2k\theta_4 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

معادلات تعادل مذکور را می‌توان به روش سیستماتیک با استفاده از روش مستقیم سختی نیز استخراج نمود. با استفاده از این تکنیک، همچون مثال ۳.۱ و با استفاده از روابط تعادل یک عنصر نمونه می‌توان نوشت:

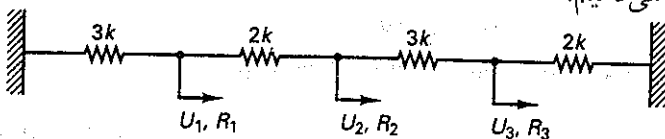
$$\bar{k} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix}$$

که در آن q_i ، q_j جریانات حرارتی در عنصر، و θ_i ، θ_j دماهای انتهایی عنصر هستند. برای سیستم نشان داده شده در شکل ۳.۲، دو عنصر هدایتی داریم (هر دال یک عنصر می‌باشد)، بنابراین رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{bmatrix} 2k & -2k & 0 \\ -2k & 5k & -3k \\ 0 & -3k & 3k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3k(\theta_0 - \theta_1) \\ 0 \\ 2k(\theta_4 - \theta_3) \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

از آنجا که θ_1 ، θ_3 مجهول هستند، روابط تعادل (ب) مجدداً برای حل مرتب می‌شوند تا روابط (الف) به دست آیند.

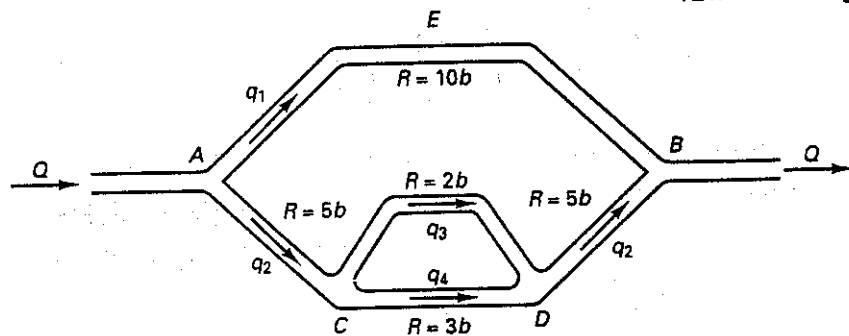
تشابه بین تحلیل تغییر مکان و نیرو در سیستم فنری مثال ۳.۱ و تحلیل دما و انتقال حرارت در مثال ۳.۲ قابل توجه می‌باشد. ماتریس‌های ضرایب در هر دو تحلیل بسیار شبیه هم بوده و می‌توانند به طریقه‌ای کاملاً سیستماتیک به دست آیند. جهت تأکید بر وجود تشابه در تحلیل‌های مذکور، در شکل ۳.۱ یک مدل فنری را که ماتریس ضریب مسئله انتقال حرارتی بر آن حاکم است نشان می‌دهیم.



شکل ۳.۱ مجموعه همبسته عناصر فنری که ماتریس ضریب مسئله انتقال حرارت در شکل ۳.۲ بر آن حاکم است

در مثالهای بعدی، تحلیل‌های یک مسأله ساده جریان و یک سیستم ساده الکتریکی را در نظر می‌گیریم که مجدداً هر دو مسأله مشابه مسائل فنر و انتقال حرارت تحلیل می‌شوند.

مثال ۳.۳: معادلاتی را که بر فشار حالت پایا و توزیع جریان در شبکه هیدرولیکی نشان داده شده در شکل ۳.۳ E حاکم هستند ایجاد کنید. فرض کنید که سیال تراکم ناپذیر بوده و افت فشار در یک شاخه متناسب با دبی q در درون آن شاخه می‌باشد، $\Delta p = Rq$ ، که در آن R ضریب مقاومت شاخه است.



شکل ۳.۳ E شبکه لوله‌ای

حل:

در این تحلیل شاخه‌های انفرادی شبکه لوله‌ای را به عنوان عناصر در نظر می‌گیریم. فشار در نقاط A, C, D را که با p_A, p_C, p_D نشان داده می‌شوند به عنوان متغیرهای حالت مجهول انتخاب می‌کنیم که توزیع جریان و فشار را در سیستم مشخص می‌نمایند و فرض می‌کنیم که فشار در B صفر است. بنابراین برای عناصر سیستم مذکور داریم:

$$q_1 = \frac{p_A}{10b}; \quad q_3 = \frac{p_C - p_D}{2b} \quad (\text{الف})$$

$$q_2|_{AC} = \frac{p_A - p_C}{5b}; \quad q_2|_{DB} = \frac{p_D}{5b}; \quad q_4 = \frac{p_C - p_D}{3b}$$

شرایط اتصال متقابل عناصر، پیوستگی جریان را ایجاب می‌کنند، بنابراین:

$$Q = q_1 + q_2 \quad (\text{ب})$$

$$q_2|_{AC} = q_3 + q_4; \quad q_2|_{DB} = q_3 + q_4$$

با جایگزینی (الف) در (ب) و با نوشتن معادلات حاصل به صورت ماتریسی، روابط زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -6 & 31 & -25 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_A \\ p_C \\ p_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10bQ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 9 & -6 & 0 \\ -6 & 31 & -25 \\ 0 & -25 & 31 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_A \\ p_C \\ p_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30bQ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{پ})$$

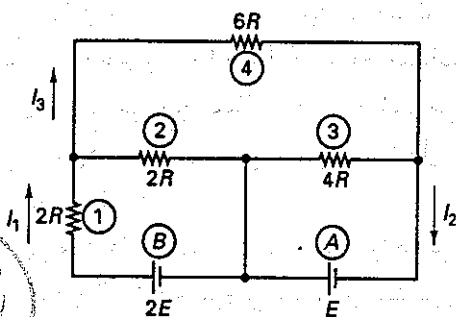
تحلیل شبکه لوله‌ای با حل (پ) برای یافتن p_D , p_C , p_A کامل می‌شود و سپس روابط تعادل عناصر در (الف) را می‌توان برای یافتن توزیع دبی به کار گرفت.

روابط تعادل (پ) را می‌توان - همچون مثالهای فنر و انتقال حرارت - با استفاده از روش مستقیم سختی نیز به دست آورد. با استفاده از این تکنیک، همچون مثال ۳.۱، تحلیل را با استفاده از روابط تعادل عنصر نمونه به صورت زیر دنبال می‌کنیم:

$$\frac{1}{R} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_i \\ p_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix}$$

که در آن q_i , q_j دبی‌های سیال در عنصر و p_i , p_j فشارهای انتهای عنصری می‌باشند.

مثال ۳.۴: شبکه dc نشان داده شده در شکل ۳.۴ را در نظر بگیرید. شبکه با مقاومت‌های نشان داده شده در معرض ورودی‌های ولتاژ ثابت E و $2E$ به ترتیب در A و B می‌باشند. توزیع جریان حالت پایا در شبکه را تعیین نمایید.



شکل ۳.۴ شبکه DC

حل:

در این تحلیل، جریان‌های I_1 , I_2 , I_3 را به عنوان متغیرهای حالت مجهول استفاده می‌کنیم. عناصر سیستم، مقاومت‌ها می‌باشند و شرایط تعادل عناصر با اعمال قانون Ohm به

مقاومت‌ها به دست می‌آیند. برای مقاومت \bar{R} که جریان I را حمل می‌کند، طبق قانون Ohm داریم:

$$\Delta E = \bar{R}I$$

که در آن ΔE افت ولتاژ در مقاومت می‌باشد.

قانون اتصال متقابل عناصر که باید ارضا شود، قانون ولتاژ Kirchhoff برای هر حلقه بسته در شبکه می‌باشد:

$$2E = 2RI_1 + 2R(I_1 - I_3)$$

$$E = 4R(I_2 - I_3)$$

$$0 = 6RI_3 + 4R(I_3 - I_2) + 2R(I_3 - I_1)$$

با نوشتن این معادلات به صورت ماتریسی، روابط زیر حاصل می‌شوند:

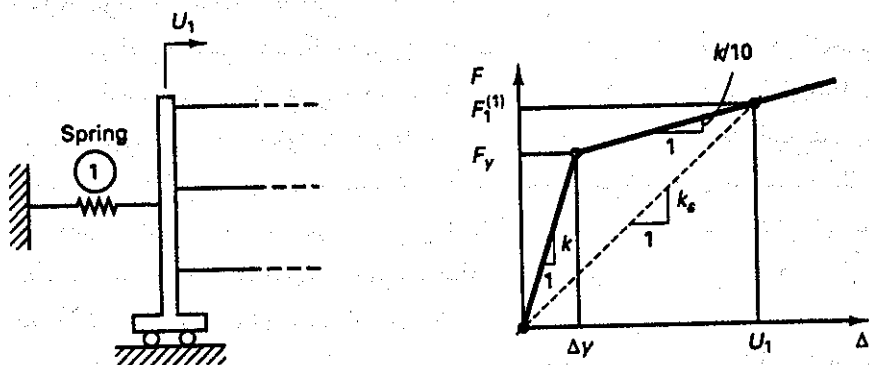
$$\begin{bmatrix} 4R & 0 & -2R \\ 0 & 4R & -4R \\ -2R & -4R & 12R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2E \\ E \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

تحلیل با حل معادلات مذکور برای یافتن I_1 , I_2 , I_3 کامل می‌شود. توجه شود که معادلات تعادل (الف) را می‌توانستیم با استفاده از روش مستقیم سختی همچون مثالهای ۳.۱ الی ۳.۳ نیز به دست آوریم.

بار دیگر باید یادآوری شود که مراحل تحلیل در مسائل سازه‌ای، انتقال حرارت، جریان سیال و الکتریکی بسیار شبیه هم بوده و احتمالاً در موقع استفاده از روش مستقیم سختی در هر مسئله، مشابهت اساسی در تحلیل این مسائل بخوبی نمایان می‌شود. این تشابه دلالت بر این نکته می‌کند که برخی روش‌های بنیادی عددی تقریباً در تحلیل هر مسئله فیزیکی قابل کاربرد خواهد بود (ر.ک. به: فصول ۴ و ۷).

در هر یک از این مثال‌ها با یک سیستم خطی مواجه بودیم؛ به عبارت دیگر، ماتریس ضریب ثابت است و بنابراین اگر توابع نیرویی سمت راست در یک مقدار ثابت α ضرب شوند، پاسخ سیستم نیز در α ضرب خواهد شد. در این فصل ابتدا سیستم‌های خطی را در نظر می‌گیریم ولی همان‌گونه که در مثال زیر نشان داده شده است، در تحلیل غیرخطی نیز همان مراحل پیشین که به اختصار ارائه گردیدند قابل کاربرد می‌باشند (همچنین ر.ک. به: فصول ۷ و ۶).

مثال ۳.۵: سیستم فنر-گاری در شکل ۳.۱ را در نظر بگیرید و فرض کنید که حالا فنر ① دارای رفتار غیرخطی نشان داده شده در شکل ۳.۵ می‌باشد. در مورد چگونگی اصلاح معادلات تعادل داده شده در مثال ۳.۱ برای این تحلیل بحث نمایید.



شکل ۳.۵ E فنر ۱ از سیستم فنر - گاری با مشخصه ارتجاعی غیرخطی

حل:

تا آنجا که $U_1 \leq \Delta y$ است، معادلات تعادل در مثال ۳.۱ با $k_1 = k$ قابل استفاده می‌باشند. ولی، اگر بارها بگونه‌ای باشند که $U_1 > \Delta y$ شود؛ به عبارت دیگر $F_1^{(1)} > F_y$ باشد، ضروری است که یک مقدار مختلفی برای k_1 استفاده شود و این مقدار بستگی به نیروی $F_1^{(1)}$ که در عنصر عمل می‌کند دارد. با نشان دادن مقدار سختی به وسیله k_s ، همچون شکل ۳.۵ E، پاسخ سیستم برای هر باری به وسیله معادلات تعادل زیر توصیف می‌شود:

$$\mathbf{K}_s \mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (\text{الف})$$

که در آن ماتریس ضریب کاملاً مانند مثال ۳.۱ ایجاد می‌شود ولی به جای k_1 از k_s استفاده می‌گردد:

$$\mathbf{K}_s = \begin{bmatrix} (k_s + k_2 + k_3 + k_4) & -(k_2 + k_3) & -k_4 \\ -(k_2 + k_3) & (k_2 + k_3 + k_5) & -k_5 \\ -k_4 & -k_5 & (k_4 + k_5) \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

گرچه پاسخ سیستم را با استفاده از این روش می‌توان محاسبه نمود، که در آن به \mathbf{K}_s ماتریس سکانت اطلاق می‌شود، با وجود این چنان که در فصل ششم خواهیم دید در تحلیل عملی عمومی از یک شیوه نمونه‌ای با یک ماتریسی سختی مماسی استفاده می‌کنیم.

تحلیل‌های مزبور روش عمومی تحلیل را نشان می‌دهند: انتخاب متغیرهای حالت مجهول که پاسخ سیستم مورد نظر را مشخص می‌کنند، شناسایی عناصر که با هم سیستم کامل را تشکیل می‌دهند، ایجاد شرایط تعادل عناصر و سرانجام سوار کردن عناصر با استفاده از

شرایط پیوستگی متقابل عناصر.

در این جا ذکر چند نکته ضروری است. نخست باید پذیرفت که در انتخاب متغیرهای حالت، تا حدودی آزادی عمل وجود دارد. به عنوان مثال در تحلیل گاری‌ها در مثال ۳.۱ می‌توانستیم نیروهای مجهول در فنرها را به عنوان متغیرهای حالت انتخاب کنیم. نکته دوم این است که معادلاتی که از آنها متغیرهای حالت محاسبه می‌شوند می‌توانند معادلات خطی یا غیرخطی باشند و ماتریس ضریب می‌تواند دارای یک حالت عمومی باشد. با وجود این بسیار مطلوب است که با یک ماتریس ضریب متقارن معین مثبت کار کنیم زیرا در چنان حالاتی حل معادلات به روش عددی بسیار کارا می‌باشد (ر.ک. به: بخش ۸.۲).

در حالت کلی، مشخصات فیزیکی یک مسأله تعیین می‌کنند که آیا می‌توان حل عددی را به صورتی درآورد که منجر به یک ماتریس ضریب متقارن مثبت معین شود یا نه. ولی حتی اگر ممکن باشد، یک ماتریس ضریب مثبت معین تنها هنگامی به دست می‌آید که متغیرهای حل مناسبی انتخاب شوند و نیز در تحلیل غیرخطی، یک خطی سازی مناسبی باید در روش حل تکراری انجام گیرد. بدین دلیل است که در عمل استفاده از فرمول‌بندی‌های عمومی برای تمامی انواع مسائل (به عنوان مثال تحلیل سازه‌ای، انتقال حرارت و غیره - ر.ک. به: بخش‌های ۴.۲، ۷.۲ و ۷.۳) به گونه‌ای که برای هر تحلیلی منجر به یک ماتریس ضریب متقارن و معین مثبت شود، بسیار ارزش دارد.

در بحث پیشین از روش مستقیم سوار نمودن معادلات تعادل که بر سیستم حاکم هستند استفاده نمودیم. نکته مهم این است که معادلات تعادل حاکم برحسب متغیرهای حالت را می‌توان در بسیاری از تحلیل‌ها با استفاده از فرمول‌بندی اکسترموم و یا وردشی به دست آورد. یک مسأله اکسترموم شامل تعیین مجموعه (یا مجموعه‌هایی) از مقادیر (متغیرهای حالت) U_i است که به ازای آنها یک تابعک داده شده $\Pi(U_1, \dots, U_n)$ ماکزیمم، مینیمم یا یک نقطه زینی است. شرط به دست آوردن معادلات برحسب متغیرهای حالت عبارت است از:

$$\delta \Pi = 0 \quad (3.1)$$

و از آنجا که:

$$\delta \Pi = \frac{\partial \Pi}{\partial U_1} \delta U_1 + \dots + \frac{\partial \Pi}{\partial U_n} \delta U_n \quad (3.2)$$

باید داشته باشیم:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U_i} = 0 \quad \text{for } i = 1, \dots, n \quad (3.3)$$

یادآوری می‌شود که δU_i "تغییرات در متغیرهای حالت U_i را نمایش می‌دهد که اختیاری

می‌باشند، جز اینکه آنها باید در شرایط مرزی و متناظر با آنها صفر باشند^(۱) در این صورت مشتق دوم Π نسبت به متغیرهای حالت تعیین خواهد کرد که آیا جواب، متناظر با یک ماکزیمم، یک مینیمم و یک نقطهٔ زینی است. در حل مدل‌های پارامتر متمرکز، می‌توان ملاحظه کرد که Π بگونه‌ای تعریف می‌شود که روابط (۳.۳)، معادلات تعادل حاکم را ایجاد می‌کنند^(۲). به عنوان مثال، در تحلیل خطی سازه‌ها، هنگامی که تغییر مکانها به عنوان متغیرهای حالت مورد استفاده قرار می‌گیرند، Π پتانسیل کلی (یا انرژی پتانسیل کلی) می‌باشد:

$$\Pi = \mathcal{U} - \mathcal{W} \quad (3.4)$$

که در آن \mathcal{U} انرژی کرنشی سیستم و \mathcal{W} پتانسیل کلی بارها می‌باشد. در این حالت یافتن جواب متغیرهای حالت، متناظر با مینیمم Π می‌باشد.

مثال ۳.۶: یک فنر ساده با سختی k و بار وارده P را در نظر بگیرید و در مورد نحوهٔ استفاده از روابط (۳.۱) و (۳.۴) بحث نمایید.

حل:

u را تغییر مکان فنر تحت بار P در نظر بگیرید. در این صورت داریم:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2}ku^2; \quad \mathcal{W} = Pu$$

و

$$\Pi = \frac{1}{2}ku^2 - Pu$$

توجه شود که به ازای بار داده شده P ، می‌توان Π را به عنوان تابعی از u رسم نمود. با استفاده از رابطه (۳.۱)، اگر u را به عنوان تنها متغیر در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$\delta \Pi = (ku - P) \delta u; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial u} = ku - P$$

که معادله تعادل را به دست می‌دهد:

$$ku = P \quad (\text{الف})$$

با استفاده از (الف) برای تعیین \mathcal{W} ، در حالت تعادل داریم: $\mathcal{W} = ku^2$ ؛ i.e. به عبارت دیگر

$\mathcal{W} = 2\mathcal{U}$ و $\Pi = -\frac{1}{2}ku^2 = -\frac{1}{2}Pu$. همچنین $\frac{\partial^2 \Pi}{\partial u^2} = k$ و بنابراین در حالت تعادل، Π ، مینیمم

(۱) به طور خیلی دقیق، تغییرات در متغیرهای حالت باید در شرایط مرزی اساسی و متناظر با آنها صفر باشند. در بخش ۳.۳.۲ در این مورد بیشتر بحث خواهد شد.

(۲) در این طریقه، همانگونه که در فصول ۴ و ۷ بیشتر اشاره خواهد شد، یک فرمول‌بندی وردشی ویژه در نظر گرفته می‌شود.

مقدار خود را دارا می‌باشد.

مثال ۳.۷: تحلیل سیستم گاریهای صلب در مثال ۳.۱ را در نظر بگیرید. Π را تعیین نموده و شرط (۳.۱) را برای به دست آوردن معادلات تعادل حاکم استفاده نمایید.

حل:

با استفاده از نمادگذاری تعریف‌شده در مثال ۳.۱ داریم:

$$u = \frac{1}{2} U^T K U \quad (\text{الف})$$

و

$$W = U^T R \quad (\text{ب})$$

که در آن می‌توانستیم انرژی کرنشی کلی در (الف) را به صورت زیر نیز بنویسیم:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} U^T \left(\sum_{i=1}^5 K^{(i)} \right) U \\ &= \frac{1}{2} U^T K^{(1)} U + \frac{1}{2} U^T K^{(2)} U + \dots + \frac{1}{2} U^T K^{(5)} U \\ &= u_1 + u_2 + \dots + u_5 \end{aligned}$$

که در آن u_i انرژی کرنشی ذخیره شده در i امین عنصر می‌باشد.

حال با استفاده از (الف) و (ب)، رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\Pi = \frac{1}{2} U^T K U - U^T R \quad (\text{پ})$$

با اعمال ۳.۱، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$K U = R$$

با به دست آوردن جواب U و سپس با جایگزینی در (پ)، درمی‌یابیم که Π که متناظر با تغییر مکانهای حالت تعادل سیستم است به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\Pi = -\frac{1}{2} U^T R$$

از آنجا که با استفاده از روش حل مستقیم و روش وردشی معادلات تعادل یکسانی ایجاد شدند، این سؤال مطرح می‌شود که استفاده از یک روش وردشی چه امتیازاتی دارد. فرض کنید که برای یک مسأله مورد نظر Π تعریف می‌شود. در این صورت معادلات تعادل را می‌توان به آسانی با وارد نمودن اثر تمامی عناصر در Π و با استفاده از شرط مانا بودن (۳.۱) ایجاد نمود. اساساً، شرط مزبور به طور خودکار شرایط اتصال متقابل را ایجاد می‌نماید. بنابراین تکنیک وردشی می‌تواند بسیار مؤثر باشد، چون با استفاده از این روش معادلات تعادل حاکم بر سیستم را می‌توان به صورت "کاملاً مکانیکی" ایجاد کرد. مزیت روش وردشی هنگامی بیشتر نمایان

می‌شود که حل عددی یک سیستم پیوسته مورد نظر باشد (ر.ک. به: بخش ۳.۳.۲). ولی اشکال اصلی یک روش وردشی این است که در آن عموماً میزان فهم فیزیکی فرمول‌بندی مسأله کمتر از حالت به کارگیری روش مستقیم می‌باشد. بنابراین به محض اینکه معادلات تعادل سیستم با استفاده از روش وردشی ایجاد شدند، تفسیر فیزیکی معادلات مذکور جهت مشخص نمودن خطاهای احتمالی حل و نیز جهت به دست آوردن فهم کامل‌تر از مفهوم فیزیکی معادلات، تعیین کننده می‌باشد.

۳.۲.۲ مسائل انتشار

مشخصه اصلی یک مسأله انتشار یا دینامیکی این است که پاسخ سیستم مورد نظر با زمان تغییر می‌کند. برای تحلیل یک سیستم، در اساس، همان روش‌های به کار رفته در تحلیل یک مسأله حالت پایا مورد استفاده قرار می‌گیرند ولی متغیرهای حالت و روابط تعادل عناصر به زمان بستگی دارند. هدف تحلیل محاسبه متغیرهای حالت برای تمامی زمان خواهد بود.

پیش از بحث در مورد مسائل واقعی انتشار، حالتی را در نظر می‌گیریم که اثر زمان در روابط تعادل عناصر ناچیز است، ولی بردار بار تابعی از زمان می‌باشد. در این حالت، پاسخ سیستم با استفاده از معادلات حاکم بر پاسخ حالت پایا به دست می‌آید، اما بردار بار وابسته به زمان جانشین بردار بار مورد استفاده در تحلیل حالت پایا می‌شود. از آنجا که در اساس چنین تحلیلی هنوز یک تحلیل حالت پایا، اما با شرایط حالت پایا در هر زمان دلخواه، می‌باشد، به آن تحلیل حالت شبه پایا اطلاق می‌شود.

در یک مسأله واقعی انتشار، روابط تعادل عناصر وابسته به زمان است و این موجب تفاوت اساسی در مشخصات پاسخ سیستم در مقایسه با مسائل حالت پایا می‌گردد. دو مثال زیرین فرمول‌بندی معادلات تعادل حاکم در مسائل انتشار را نشان می‌دهند. روشهای حل معادلات مذکور در فصل ششم ارائه گردیده‌اند.

مثال ۳.۸: سیستم گاری‌های صلب را که در مثال ۳.۱ تحلیل شدند در نظر بگیرید. فرض کنید که بارها وابسته به زمان بوده و معادلاتی را که بر پاسخ دینامیکی سیستم حاکم می‌باشند تعیین کنید.

حل:

برای تحلیل فرض کنید که فنرها بدون جرم بوده و اینکه گاری‌ها دارای جرمهای m_1, m_2, m_3 می‌باشند (که معادل تمرکز دادن جرم توزیع شده فنرها، در دو نقطه انتهایی می‌باشد). بنابراین با استفاده از اطلاعات داده شده در مثال ۳.۱ و استفاده از اصل d'Alembert، شرایط اتصال متقابل عناصر منجر به ایجاد معادلات زیر می‌گردد:

$$F_1^{(1)} + F_1^{(2)} + F_1^{(3)} + F_1^{(4)} = R_1(t) - m_1 \ddot{U}_1$$

$$F_2^{(2)} + F_2^{(3)} + F_2^{(5)} = R_2(t) - m_2 \ddot{U}_2$$

$$F_3^{(4)} + F_3^{(5)} = R_3(t) - m_3 \ddot{U}_3$$

$$\ddot{U}_i = \frac{d^2 U_i}{dt^2}; \quad i = 1, 2, 3 \quad \text{که در آن}$$

بنابراین رابطه زیر را به عنوان معادلات تعادل حاکم بر سیستم به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R}(t) \quad (\text{الف})$$

که در آن \mathbf{U} , \mathbf{K} و \mathbf{R} در مثال ۳.۱ تعریف شده و \mathbf{M} ماتریس جرم سیستم می‌باشد:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

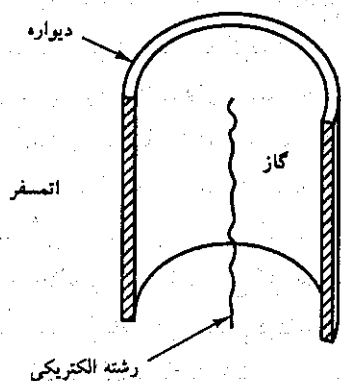
معادلات تعادل (الف)، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی از مرتبه دوم زمان را نمایش می‌دهند. برای حل این معادلات، ضروری است که شرایط اولیه در \mathbf{U} و $\dot{\mathbf{U}}$ مشخص شوند، به عبارت دیگر داشتن ${}^0\mathbf{U}$ و ${}^0\dot{\mathbf{U}}$ ضرورت دارد که در آن:

$${}^0\mathbf{U} = \mathbf{U}|_{t=0}; \quad {}^0\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{U}}|_{t=0}$$

پیش از این به تحلیل حالت شبه پایا اشاره شد. اگر پاسخ گاریها را در نظر بگیریم، ملاحظه می‌شود که تحلیل چنان سیستمی دلالت بر این نکته دارد که بارها خیلی آهسته تغییر می‌کنند و از اینرو از اثرات جرم می‌توان صرف نظر کرد. بنابراین برای به دست آوردن پاسخ حالت شبه پایا، معادلات تعادل (الف) در مثال ۳.۸ باید با شرط $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ حل شوند.

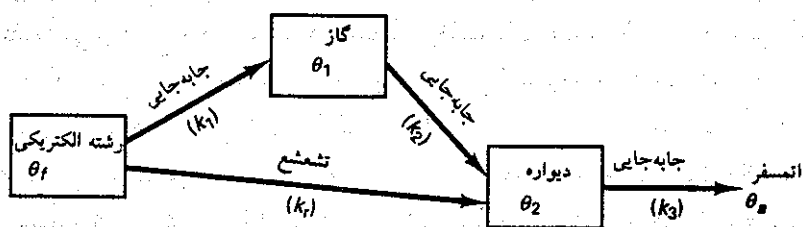
مثال ۳.۹: شکل ۳.۹ E یک حالت ایده‌ال جریان گذرای حرارت در یک لوله الکترون را نشان می‌دهد. یک رشته الکتریکی به وسیله یک جریان الکتریکی تا دمای θ_f گرم می‌شود، گرما از رشته الکتریکی به گاز اطراف آن منتقل می‌شود و به دیواره می‌تابد که آن نیز با جابه‌جایی گرما از گاز، گرما دریافت می‌کند. دیواره نیز حرارت را به فضای پیرامون خود که دارای دمای θ_a است جابجا می‌نماید. مطلوب است فرمول‌بندی معادلات تعادل حاکم بر سیستم جریان حرارت. حل:

در این تحلیل دمای گاز θ_f و دمای گاز دیواره θ_2 را به عنوان متغیرهای حالت مجهول انتخاب می‌کنیم. معادلات تعادل سیستم با استفاده از تعادل جریان حرارت برای گاز و دیواره حاصل می‌گردد. با استفاده از ضرایب انتقال حرارت داده شده در شکل ۳.۹ E، برای گاز رابطه زیر را به دست می‌آوریم:



$$C_1 = \text{ظرفیت حرارتی گاز}$$

$$C_2 = \text{ظرفیت حرارتی دیوار}$$



شکل ۳.۹ ایده‌آل‌سازی یک لوله الکترن در سیستم انتقال حرارت

$$C_1 \frac{d\theta_1}{dt} = k_1(\theta_f - \theta_1) - k_2(\theta_1 - \theta_2)$$

و برای دیوار نیز رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$C_2 \frac{d\theta_2}{dt} = k_r((\theta_f)^4 - (\theta_2)^4) + k_2(\theta_1 - \theta_2) - k_3(\theta_2 - \theta_a)$$

دو معادله مذکور را می‌توان به صورت ماتریسی نوشت:

$$C\dot{\theta} + K\theta = Q \quad (\text{الف})$$

که در آن:

$$C = \begin{bmatrix} C_1 & 0 \\ 0 & C_2 \end{bmatrix}; \quad K = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) \end{bmatrix}$$

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} k_1 \theta_f \\ k_r((\theta_f)^4 - (\theta_2)^4) + k_3 \theta_a \end{bmatrix}$$

مشاهده می‌کنیم که به علت شرط مرزی تشعشع، معادلات تعادل جریان حرارت در θ غیرخطی می‌باشند.

در این جا عبارت مربوط به شرط مرزی تشعشع در بردار بار جریان حرارتی Q ملحوظ گردیده است. حل معادلات مذکور را می‌توان به همان‌گونه که در بخش ۹.۶ توصیف شده است انجام داد.

در مثالهای پیشین حالت‌های بسیار خاصی را در نظر گرفتیم، با وجود این مثالهای مذکور چگونگی فرمول‌بندی مسائل انتشار سیستم‌های گسسته جهت تحلیل را به طریقه‌ای کاملاً عمومی نشان می‌دهند. اساساً روشهای مشابهی مانند روش‌های مورد استفاده در تحلیل مسائل حالت پایا به کار گرفته می‌شوند، ولی "بارهای وابسته به زمان" که ناشی از "مقاومت در برابر تغییر (اینرسی)" عناصر و نیز اینرسی کل سیستم می‌باشند ایجاد می‌گردند. مقاومت در برابر تغییر یا اینرسی سیستم باید در تحلیل دینامیکی در نظر گرفته شود.

بر اساس استدلالها و نکات پیشین به نظر می‌رسد که می‌توان نتیجه گرفت که تحلیل یک مسأله انتشار یک بسط بسیار ساده تحلیل مسأله متناظر حالت پایا می‌باشد. در بحث پیشین فرض کردیم که سیستم گسسته داده شده است و بنابراین درجات آزادی یا متغیرهای حالت را مستقیماً می‌توان مشخص نمود. در عمل، انتخاب یک سیستم گسسته مناسب که شامل تمامی مشخصات مهم سیستم فیزیکی واقعی باشد معمولاً ساده و آسان نیست؛ و در حالت کلی برای پیش‌بینی پاسخ دینامیکی باید مدل گسسته‌ای را انتخاب نمود که متفاوت از مدل انتخاب شده برای تحلیل حالت پایا باشد. بحث مزبور نشان می‌دهد که به محض اینکه یک مدل گسسته برای یک مسأله انتشار انتخاب گشت، فرمول‌بندی معادلات تعادل حاکم را به همان روش تحلیل پاسخ حالت پایا می‌توان دنبال کرد به جز اینکه بارهای اینرسی ایجاد می‌شوند که علاوه بر بارهای اعمال شده خارجی بر روی سیستم عمل می‌کنند (ر.ک. به: بخش ۴.۲.۱). این نکته ما را به آنجا سوق می‌دهد که انتظار داشته باشیم که شیوه‌های حل معادلات تعادل دینامیکی یک سیستم کاملاً بر اساس تکنیکهایی باشند که برای حل معادلات تعادل حالت پایا به کار گرفته می‌شوند (ر.ک. به: بخش ۹.۲).

۳.۲.۳ مسائل ویژه مقدار

در بحث پیشین در مورد مسائل حالت پایا و انتشار، وجود یک جواب منحصر به فرد برای پاسخ سیستم را در نظر داشتیم. مشخصه اصلی یک مسأله ویژه مقدار این است که برای پاسخ سیستم جواب منحصر به فردی وجود ندارد و هدف تحلیل، محاسبه جوابهای مختلف ممکن می‌باشد. مسائل ویژه مقدار در هر دو تحلیل دینامیکی و حالت پایا پیش می‌آیند.

مسائل ویژه مقدار متنوع و مختلفی را می‌توان در تحلیل مهندسی فرمول‌بندی کرد در این کتاب نخست با مسأله "ویژه مقدار" تعمیم یافته مواجه هستیم که به صورت زیر می‌باشد:

$$Av = \lambda Bv \quad (3.5)$$

که در آن A و B ماتریس متقارن بوده و λ یک اسکالر و v یک بردار می‌باشد. اگر λ و v در (۳.۵) صدق کنند، آنها به ترتیب یک ویژه مقدار و یک ویژه بردار نامیده می‌شوند.

در تحلیل حالت پایا، هنگامی که بررسی پایداری فیزیکی یک سیستم مورد نظر ضروری باشد، یک مسأله ویژه مقدار به صورت رابطه (۳.۵) فرمول‌بندی می‌شود. سؤالی که پرسیده می‌شود و منجر به یک مسأله ویژه مقدار می‌گردد، به این صورت است که: با فرض اینکه جواب حالت پایای یک سیستم معلوم باشد، آیا جواب دیگری نیز وجود دارد که سیستم بتواند به طرف آن جواب منشعب شود در صورتی که اختلال اندکی در وضعیت تعادل سیستم ایجاد گردد؟ جواب این سؤال بستگی به سیستم مورد نظر و بارهای وارد بر آن سیستم دارد. برای نشان دادن ایده اصلی، مسأله بسیار ساده‌ای را در نظر می‌گیریم:

مثال ۳.۱۰: تیر طره‌ای نشان داده شده در شکل ۳.۱۰ E را در نظر بگیرید. سازه شامل یک فنر دورانی و یک بازوی صلب می‌باشد. پاسخ سیستم را برای بارهای نشان داده شده در شکل تعیین نمایید.

حل:

نخست تنها پاسخ حالت پایا را همان‌گونه که در بخش ۳.۲.۱ بحث شد در نظر می‌گیریم. از آنجا که میله صلب است، تیر طره‌ای یک سیستم یک درجه آزادی بوده و لذا Δ_v را به عنوان متغیر مستقل انتخاب می‌کنیم.

در شرط بارگذاری I، میله در معرض یک نیروی محوری کششی P می‌باشد و لنگر در فنر صفر است. چون میله صلب است از اینرو داریم:

$$\Delta_v = 0 \quad (\text{الف})$$

حال شرط بارگذاری II را در نظر می‌گیریم. با فرض تغییر مکانهای کوچک، در این حالت

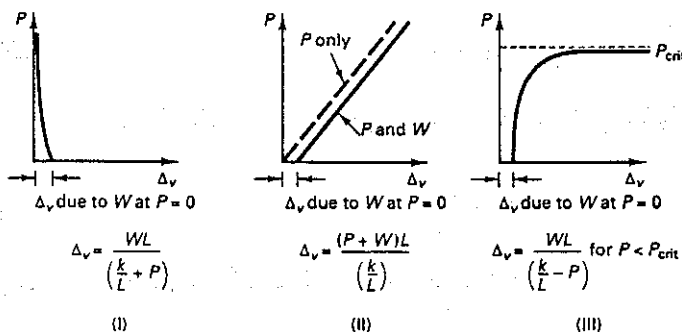
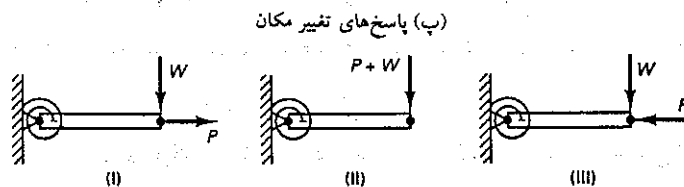
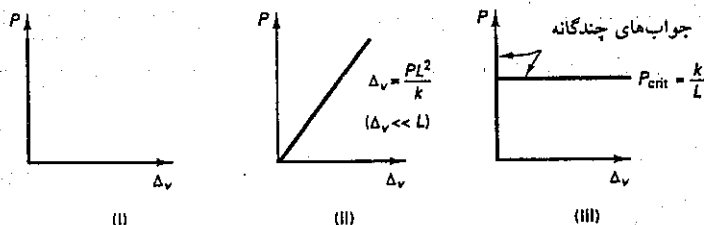
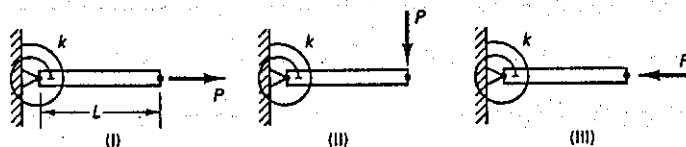
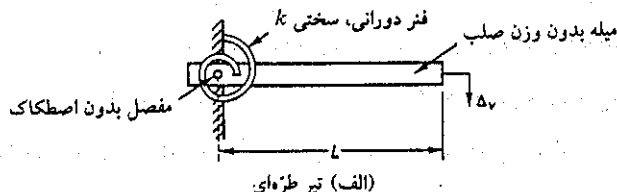
$$\Delta_v = \frac{PL^2}{k} \quad (\text{ب})$$

و سرانجام برای شرط بارگذاری III همچون حالت I داریم:

$$\Delta_v = 0 \quad (\text{پ})$$

حال می‌خواهیم تعیین کنیم که آیا سیستم تحت اثر بارهای مذکور پایدار است یا نه؟ برای

بررسی پایداری، اختلالی را در وضعیت تعادلی تعریف شده سازه در (الف) و (ب) و (پ) ایجاد می‌کنیم و سپس این سؤال را طرح می‌کنیم که آیا یک وضعیت تعادل دیگری امکان پذیر است یا نه؟



فرض کنید که Δ_v در شرایط بارگذاری I و II مثبت ولی کوچک باشد. اگر معادلات تعادل را با در نظر گرفتن این تغییر مکان بنویسیم، مشاهده خواهیم کرد که در شرط بارگذاری I مقدار کوچک غیر صفر Δ_v نمی‌تواند تحمّل شود و در شرط بارگذاری II نیز اثر وارد نمودن Δ_v در تحلیل ناچیز است.

حال شرط بارگذاری III را در نظر بگیرید که در آن داریم: $\Delta_v > 0$. در این حالت برای اینکه بافتار در حال تعادل دیگری با مقدار غیر صفر Δ_v ممکن باشد، معادله تعادل زیر باید ارضا شود:

$$P\Delta_v = k \frac{\Delta_v}{L}$$

اما معادله مذکور به‌ازای هر Δ_v ارضا می‌شود، به شرط اینکه $P = k/L$. بنابراین بار بحرانی P_{crit} که در آن علاوه بر وضعیت تعادل افقی وجود یک وضعیت تعادل دیگری نیز ممکن می‌باشد، عبارت است از:

$$P_{crit} = \frac{k}{L}$$

در یک جمع‌بندی، داریم:

تنها یک وضعیت تعادل افقی برای بار امکان‌پذیر است؛ $P < P_{crit}$
تعادل، پایدار می‌باشد.

وضعیت‌های افقی و تغییر شکل یافته برای میله امکان‌پذیر هستند؛ $P = P_{crit}$
وضعیت تعادل افقی برای $P \geq P_{crit}$ ناپایدار می‌باشد.

برای فهم کاملتر نتایج مزبور فرض می‌کنیم که علاوه بر بار P نشان داده شده در شکل (ب) E ۳.۱، یک بار جانبی کوچک W به سازه همان‌گونه که در شکل (ت) E ۳.۱ نشان داده شده است اعمال می‌گردد. در این صورت اگر تحلیلی از مدل تیر طرّه‌ای تحت اثر بارهای P و W را انجام دهیم، منحنی‌های پاسخ که به صورت شماتیک در شکل (ث) E ۳.۱۰ نشان داده شده‌اند، حاصل می‌گردند. بنابراین مشاهده می‌کنیم که در شرایط بارگذاری I و II، اثر بار W با افزایش P کاهش می‌یابد و سپس ثابت می‌ماند، اما در شرط بارگذاری III، تغییر مکان جانبی Δ_v ، هنگامی که بار P به بار بحرانی P_{crit} نزدیک می‌شود، خیلی سریع افزایش می‌یابد.

تحلیل‌های ارائه شده در مثال ۳.۱۰ هدف اصلی فرمول‌بندی یک ویژه مسأله را نشان می‌دهند و نیز ضمناً پیش‌بینی می‌کنند که آیا آشفته‌گی‌های کوچکی که به بافتار در حال تعادل اعمال می‌گردد موجب افزایش بسیار زیاد جواب در تحلیل پایداری می‌شود یا نه؟ تراز باری که این وضعیت تحت اثر آن پیش می‌آید متناظر با بار بحرانی سیستم می‌باشد. در راه‌حل دوم انجام شده در مثال ۳.۱۰، آشفته‌گی بسیار کوچک به علت بار کوچک W بود که به عنوان مثال، امکان وجود بار افقی در تیر طرّه‌ای را که به صورت کاملاً افقی عمل نمی‌کند، شبیه‌سازی می‌کند. در تحلیل ویژه مقدار، صرفاً یک بافتار تغییر شکل یافته را فرض کرده و بررسی می‌نماییم که آیا باری وجود دارد که در حقیقت چنان بافتاری را به عنوان وضعیت تعادل ممکن بپذیرد یا نه؟ در بخش ۶.۸.۲ خواهیم دید که تحلیل ویژه مقدار، در حقیقت شامل خطی‌سازی پاسخ غیرخطی سیستم می‌باشد و اینکه کاملاً بستگی به این نکته دارد که آیا برای سیستم مورد نظر می‌توان یک بار بحرانی قابل اطمینان محاسبه کرد یا نه؟ راه‌حل ویژه مقدار، بویژه، در تحلیل "موقعیت‌های از نوع تیرستون" در سازه‌های تیری، صفحه‌ای و پوسته‌ای کاربرد دارد.

مثال ۳.۱۱: تجربه نشان می‌دهد که در تحلیل سازه‌ای، بار بحرانی در سازه‌های از نوع ستونی را می‌توان به طور مناسبی با استفاده از فرمول‌بندی مسأله ویژه مقدار تعیین نمود. سیستم تعریف شده در شکل ۳.۱۱ E را در نظر بگیرید. مسأله ویژه مقدار را ایجاد نموده و از طریق حل آن بار بحرانی سیستم را محاسبه نمایید.

حل:

همانطوری که در استخراج معادلات تعادل حالت پایا عمل کردیم (ر.ک. به: بخش ۳.۲.۱)، می‌توان روش مستقیم یا روش وردشی را برای ایجاد معادلات تعادل حاکم بر سیستم به کار برد. در حل این مسأله، هر دو تکنیک را توصیف می‌نماییم.

در روش مستقیم، معادلات تعادل حاکم را مستقیماً با در نظر گرفتن تعادل سازه در بافتار تغییر شکل یافته خود ایجاد می‌کنیم. با مراجعه به شکل ۳.۱۱ E، تعادل لنگر میله AB ایجاد می‌کند که:

$$PL \sin(\alpha + \beta) = kU_1 L \cos(\alpha + \beta) + k_r \alpha \quad (\text{الف})$$

به طور مشابه، برای بارهای CBA نیاز داریم که:

$$PL[\sin(\alpha + \beta) + \sin \beta] = kU_1 L[\cos(\alpha + \beta) + \cos \beta] + kU_2 L \cos \beta \quad (\text{ب})$$

U_1 و U_2 را به عنوان متغیرهای حالت انتخاب می‌کنیم که به طور کامل پاسخ سازه‌ای سیستم را توصیف می‌کنند. همچنین تغییر مکان‌های کوچک را فرض می‌کنیم که برای آنها داریم:

$$L \sin(\alpha + \beta) = U_1 - U_2; \quad L \sin \beta = U_2$$

$$L \cos(\alpha + \beta) \doteq L; \quad L \cos \beta \doteq L; \quad \alpha \doteq \frac{U_1 - 2U_2}{L}$$

ماتریس‌های ضریب را می‌توان با ضرب سطر اول در ۲- و اضافه نمودن نتیجه به سطر دوم خلاصه‌تر نمود که در این صورت مسأله ویژه مقدار زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{bmatrix} kL + \frac{k_r}{L} & -\frac{2k_r}{L} \\ -\frac{2k_r}{L} & kL + \frac{4k_r}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (\text{پ})$$

قابل ذکر است که معادله دوم در (پ) را می‌توان با در نظر گرفتن تعادل لنگر میله CB نیز به دست آورد.

حال روش وردشی را در نظر می‌گیریم، در این صورت تعیین پتانسیل کلی Π سیستم در بافتار تغییر شکل یافته ضرورت دارد. در این جا داریم:

$$\Pi = \frac{1}{2}kU_1^2 + \frac{1}{2}kU_2^2 + \frac{1}{2}k_r\alpha^2 - PL[1 - \cos(\alpha + \beta) + 1 - \cos \beta] \quad (\text{ت})$$

مانند روش مستقیم، شرط تغییر مکانهای کوچک را فرض می‌کنیم. از آنجا که با استفاده از (۳.۱) می‌خواهیم یک مسأله ویژه مقدار را به صورت رابطه (۳.۵) استخراج کنیم که در آن ماتریس‌های ضریب مستقل از متغیرهای حالت می‌باشند، از اینرو عبارات مثلثانی را به صورت متغیرهای حالت از مرتبه دوم تقریب‌سازی می‌کنیم. بنابراین از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$\cos(\alpha + \beta) \approx 1 - \frac{(\alpha + \beta)^2}{2} \quad (\text{ث})$$

$$\cos \beta \approx 1 - \frac{\beta^2}{2} \quad \text{و}$$

$$\alpha + \beta \approx \frac{U_1 - U_2}{L}; \quad \alpha \approx \frac{U_1 - 2U_2}{L}; \quad \beta \approx \frac{U_2}{L} \quad (\text{ج})$$

با جایگزینی (ث) و (ج) در (ت)، رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\Pi = \frac{1}{2}kU_1^2 + \frac{1}{2}kU_2^2 + \frac{1}{2}k_r\left(\frac{U_1 - 2U_2}{L}\right)^2 - \frac{P}{2L}(U_1 - U_2)^2 - \frac{P}{2L}U_2^2$$

با اعمال اصل مانا داریم:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U_1} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial U_2} = 0$$

که در این صورت معادلات (پ) به دست می‌آیند.

اگر یک تحلیل دینامیکی را در نظر داشته باشیم، شاید ضروری باشد که یک ویژه مسأله بر مبنای حل معادلات تعادل دینامیکی فرمول‌بندی شود. در این صورت، اساساً هدف تحلیل، پیدا نمودن یک تبدیل ریاضی در متغیرهای حالت می‌باشد که به طور مؤثری در حل پاسخ دینامیکی بکار می‌رود (ر.ک. به بخش ۹.۳). بنابراین در تحلیل مسائل فیزیکی، مشخص نمودن ویژه مقادیر و ویژه بردارها با کمیتهای فیزیکی بسیار ارزشمند می‌باشد. (ر.ک. به: بخش ۹.۳). برای نشان دادن نحوه فرمول‌بندی مسائل ویژه مقدار در تحلیل دینامیکی، مثالهای زیر را ارائه می‌کنیم.

مثال ۳.۱۲: تحلیل دینامیکی سیستم گاریهای صلب مورد بحث در مثال ۳.۸ را در نظر بگیرید. شرایط ارتعاش آزاد را فرض کنید و اینکه:

$$U = \phi \sin(\omega t - \psi) \quad (\text{الف})$$

که در آن ϕ یک بردار با مؤلفه‌های مستقل از زمان، ω یک فرکانس زاویه‌ای و ψ زاویه اختلاف فازی می‌باشند. نشان دهید که با فرض مذکور، هنگامی که میخواهیم جواب ϕ و ω را پیدا کنیم، یک ویژه مسأله به صورتی که در (۳.۵) داده شده است، به دست می‌آید.

حل:

معادلات تعادل سیستم با ملاحظه شرایط ارتعاش آزاد به صورت زیر می‌باشند:

$$M\ddot{U} + KU = 0 \quad (\text{ب})$$

که در آن ماتریس‌های M و K بردار U در مثال ۳.۱ و ۳.۸ تعریف شده‌اند. اگر U داده شده در (الف) جواب معادلات (ب) باشد، در این صورت U باید در این معادلات صدق کند:

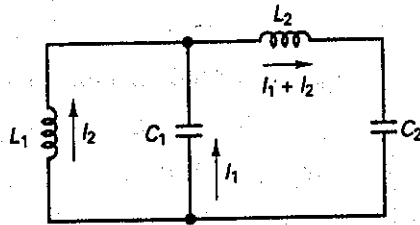
$$-\omega^2 M \phi \sin(\omega t - \psi) + K \phi \sin(\omega t - \psi) = 0$$

بنابراین، برای (الف) به عنوان جواب (ب)، شرط زیر را به دست می‌آوریم:

$$K \phi = \omega^2 M \phi \quad (\text{پ})$$

که یک مسأله ویژه مقدار به صورت (۳.۵) می‌باشد. در بخش ۹.۳ در مورد مشخصات فیزیکی جوابهای ϕ_i و ω_i مسأله (پ) بحث می‌کنیم.

مثال ۳.۱۳: مدار الکتریکی شکل ۳.۱۳ را در نظر بگیرید. مسأله ویژه مقداری را تعیین کنید که با استفاده از آن، فرکانسهای حالت تشدید و مدهای مربوطه را می‌توان محاسبه نمود، در صورتی که $C_1 = C_2 = C$ و $L_1 = L_2 = L$.



شکل ۳.۱۳ مدار الکتریکی

حل:

هدف اول ما استخراج معادلات تعادل دینامیکی سیستم می‌باشد. معادلات تعادل عنصری برای یک القاکن عبارت است از:

$$L \frac{di}{dt} = V \quad (\text{الف})$$

که در آن L ضریب القایی، i جریان موجود در القاکن و V کاهش ولتاژ در القاکن است. برای یک خازن با ظرفیت C ، معادله تعادل عبارت است از:

$$I = C \frac{dV}{dt} \quad (\text{ب})$$

جریان‌های i_1 و i_2 نشان داده شده در شکل ۳.۱۳ را به عنوان متغیرهای حالت انتخاب میکنیم. معادلات تعادل حاکم با استفاده از شرایط اتصال متقابل عناصر که در قانون ولتاژ Kirchhoff ملحوظ شده‌اند به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned} V_{C1} + V_{L2} + V_{C2} &= 0 \\ V_{L1} + V_{L2} + V_{C2} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{پ})$$

با مشتق‌گیری از روابط (الف) و (پ) نسبت به زمان و جایگذاری $L_1 = L_2 = L$ و $C_1 = C_2 = C$ در (پ)، رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$L \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{i}_1 \\ \dot{i}_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{C} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ت})$$

ملاحظه می‌کنیم که این معادلات کاملاً مشابه معادلات تعادل ارتعاش آزاد یک سیستم سازه‌ای می‌باشند. در حقیقت با ملاحظه تشابه زیر:

$$I \longrightarrow \text{تغییر مکان} \quad \frac{1}{C} \longrightarrow \text{سختی} \quad L \longrightarrow \text{جرم}$$

یک ویژه مسأله برای فرکانس‌های حالت تشدید همچون مثال ۳.۱۲ ایجاد می‌شود (و یک سیستم سازه‌ای هم‌ارز را می‌توان بنا نمود).

۳.۲.۴ بحثی در مورد طبیعت جوابها

در بخشهای پیشین در مورد فرمول‌بندی مسائل حالت پایا، انتشار و ویژه مقدار بحث نمودیم و چند مثال ساده ارائه دادیم. در تمامی حالات، یک دستگاه معادلات برحسب متغیرهای حالت مجهول فرمول‌بندی شدند ولی حل نگردیدند. برای حل معادلات از تکنیکهایی استفاده خواهیم نمود که در فصول ۸ الی ۱۱ ارائه خواهند شد. هدف این بخش، بحث مختصری در مورد طبیعت جوابهایی می‌باشند که از محاسبه مسائل حالت پایا، انتشار و یا ویژه مقدار به دست می‌آیند.

برای مسائل حالت پایا و انتشار، شایسته است که بین مسائل خطی و غیرخطی تمایز قائل شویم. در یک تعریف ساده، یک مسئله خطی با این واقعیت مشخص می‌شود که پاسخ سیستم به تناسب با مقدار بارهای وارده به صورت خطی تغییر می‌کند. همان‌گونه که با جزییات بیشتر در بخش ۶.۱ شرح داده خواهد شد، سایر مسائل غیرخطی هستند. برای نشان دادن برخی مشخصه‌های اساسی پاسخ که در تحلیل‌های خطی حالت پایا، انتشار و ویژه مقدار به دست می‌آیند، به عنوان یک پیش‌درآمد مثال زیر را در نظر می‌گیریم:

مثال ۳.۱۴: یک سیستم ساده سازه‌ای متشکل از مجموعه‌ای همبسته از میله‌های صلب بدون وزن، فنرها و جرمهای متمرکز را که در شکل ۳.۱۴ E نشان داده شده است در نظر می‌گیریم. عناصر در نقاط A, B و C با استفاده از مفصل‌های بدون اصطکاک به همدیگر متصل شده‌اند. مطلوب است تحلیل سیستم گسسته برای بارگذاری نشان داده شده، در صورتی که تغییر مکانها و سرعتهای اولیه صفر باشند.

حل:

پاسخ سیستم به وسیله دو متغیر حالت U_1 و U_2 که در شکل (ب) ۳.۱۴ E نشان داده شده‌اند توصیف می‌شود. برای تصمیم‌گیری در مورد نوع تحلیلی که مناسب باشد، باید اطلاعات کافی در مورد مشخصه‌های سازه و بارهای وارده F و P داشته باشیم. فرض کنید که مشخصات سازه‌ای و بارهای وارده به گونه‌ای هستند که تغییر مکان‌های مجموعه همبسته عناصر نسبتاً کوچک می‌باشند:

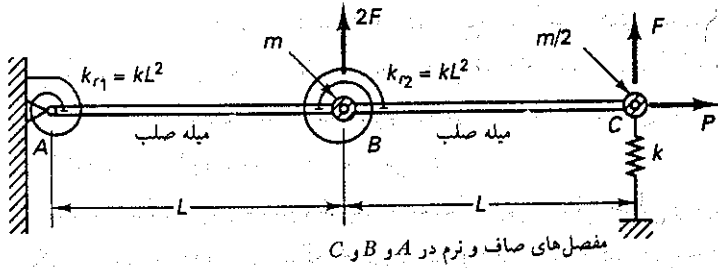
$$\frac{U_1}{L} < \frac{1}{10} \quad \text{and} \quad \frac{U_2}{L} < \frac{1}{10}$$

در این صورت می‌توان فرض کرد که:

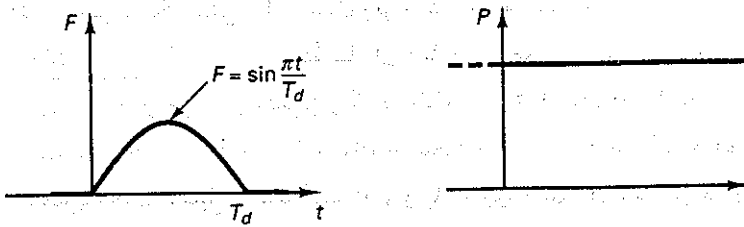
$$\cos \alpha = \cos \beta = \cos(\beta - \alpha) = 1$$

$$\sin \alpha = \alpha; \quad \sin \beta = \beta \quad (\text{الف})$$

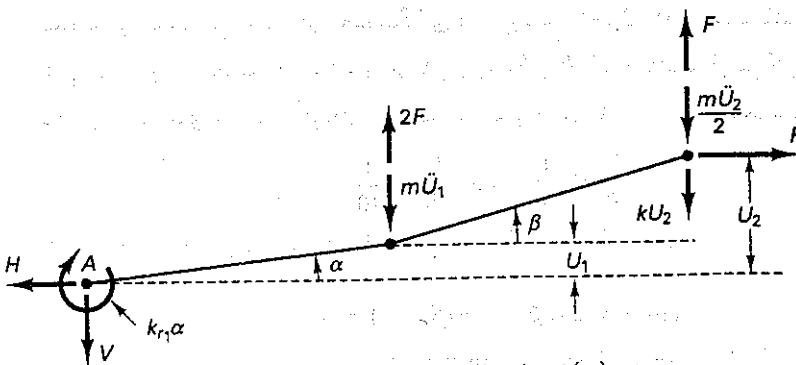
$$\alpha = \frac{U_1}{L}; \quad \beta = \frac{U_2 - U_1}{L}$$



(الف) سیستم گسسته



(ب) شرایط بارگذاری



(پ) نیروهای خارجی در یافتار تغییر شکل یافته

شکل ۳.۱۴ یک سیستم دو درجه آزادی

معادلات تعادل حاکم همانند مثال ۳.۱۱ استخراج می‌شوند، ولی نیروهای اینرسی را نیز در تحلیل وارد می‌کنیم (ر.ک. به: مثال ۳.۸)؛ در این صورت رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U}_1 \\ \ddot{U}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \left(5k + \frac{2P}{L}\right) & -\left(2k + \frac{P}{L}\right) \\ -\left(2k + \frac{P}{L}\right) & \left(2k + \frac{P}{L}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2F \\ F \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

پاسخ سیستم باید بستگی به مقادیر نسبی k و m و P/L داشته باشد. برای به دست آوردن یک معیار در مورد اینکه آیا یک تحلیل ایستایی باید انجام گیرد یا یک تحلیل دینامیکی، فرکانسهای طبیعی سیستم را محاسبه می‌کنیم. فرکانسهای مذکور با استفاده از حل مسأله ویژه مقدار زیر به دست می‌آیند:

$$\begin{bmatrix} \left(5k + \frac{2P}{L}\right) & -\left(2k + \frac{P}{L}\right) \\ -\left(2k + \frac{P}{L}\right) & \left(2k + \frac{P}{L}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{m}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} \quad (\text{پ})$$

حل (پ) نتایج زیر را به دست می‌دهد (ر.ک. به: بخش ۲.۵):

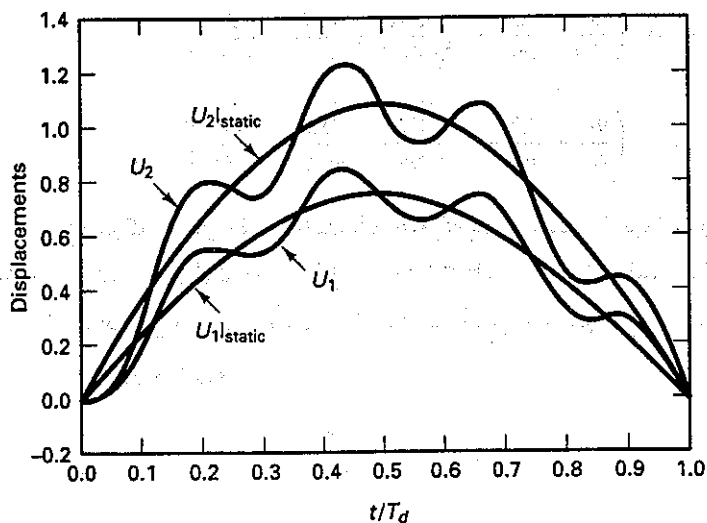
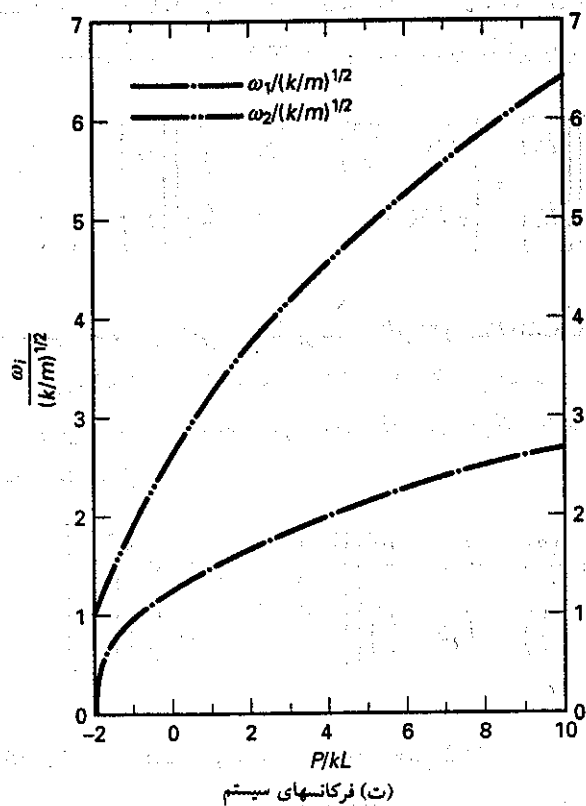
$$\omega_1 = \left(\frac{9k}{2m} + \frac{2P}{mL} - \sqrt{\frac{33k^2}{4m^2} + \frac{8Pk}{m^2L} + \frac{2P^2}{m^2L^2}} \right)^{1/2}$$

$$\omega_2 = \left(\frac{9k}{2m} + \frac{2P}{mL} + \sqrt{\frac{33k^2}{4m^2} + \frac{8Pk}{m^2L} + \frac{2P^2}{m^2L^2}} \right)^{1/2}$$

یادآوری می‌کنیم که به ازای مقادیر ثابت k و m فرکانسهای طبیعی (رادیان بر واحد زمان) تابعی از P/L می‌باشند و همان‌گونه که در شکل (ت) ۳.۱۴ نشان داده شده است فرکانسهای طبیعی با افزایش P/L ، افزایش می‌یابند. i امین زمان تناوب طبیعی سیستم، T_i ، از رابطه $T_i = 2\pi/\omega_i$ به دست می‌آید؛ بنابراین داریم:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}; \quad T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2}$$

پاسخ سیستم، هنگامی که برحسب زمانهای تناوب طبیعی سیستم تعیین می‌گردد، بستگی به مدت اعمال بار دارد. از آنجا که P ثابت است، مدت اعمال بار توسط T_d تعیین می‌شود. برای



نشان دادن مشخصات پاسخ سیستم، حالت خاصی را فرض می‌کنیم که $k = m = P/L = 1$ و سه مقدار مختلف برای T_d را در نظر می‌گیریم.

حالت (i) $T_d = 4T_1$: پاسخ سیستم برای این حالت اعمال بار در شکل (ث) ۳.۱۴، حالت i، نشان داده می‌شود. یادآوری می‌کنیم که پاسخ دینامیکی سیستم تقریباً نزدیک به پاسخ ایستایی آن است و اگر $T_1 < T_d$ باشد، در این صورت این دو پاسخ بسیار به هم نزدیک خواهند شد.

حالت (ii) $T_d = (T_1 + T_2)/2$: پاسخ سیستم همان‌گونه که در شکل (ث) ۳.۱۴، حالت ii نشان داده شده است. واقعاً دینامیکی می‌باشد. صرف‌نظر کردن از اثرات نیروهای اینرسی کاملاً غیرمناسب خواهد بود.

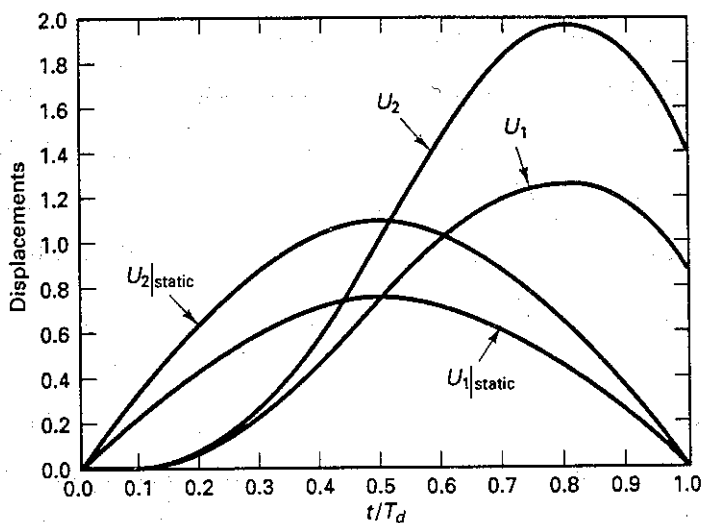
حالت (iii) $T_d = 1/4 T_2$: در این حالت، مدت اعمال بار در مقایسه با زمانهای تناوب سیستم، نسبتاً کوتاه می‌باشد. پاسخ سیستم واقعاً دینامیکی بوده و همان‌گونه که در شکل (ث) ۳.۱۴، حالت iii نشان داده شده است، اثرات نیروهای اینرسی در تحلیل باید در نظر گرفته شود. پاسخ سیستم حدوداً نزدیک به پاسخ ایجاد شده ناشی از اعمال شرایط بار ضربه‌ای می‌باشد و اگر $T_2 \gg T_d$ باشد در این صورت دو پاسخ مذکور بسیار به هم نزدیک خواهند شد.

برای مشخص نمودن برخی شرایط که به ازای آنها سازه ناپایدار می‌شود، از رابطه (ب) در می‌یابیم که سختی سازه با افزایش مقادیر P/L افزایش می‌یابد (و بدین علت است که با افزایش P/L فرکانسها نیز افزایش پیدا می‌کنند). بنابراین برای اینکه سازه ناپایدار شود، به مقدار منفی P نیاز داریم، به عبارت دیگر P باید فشاری باشد. حال فرض می‌کنیم که P به آهستگی کاهش پیدا می‌کند (P در فشار افزایش می‌یابد) و نیز F بسیار کوچک می‌باشد. در این حالت، یک تحلیل ایستایی مناسب بوده و برای به دست آوردن معادلات تعادلات حاکم از روابط (ب) می‌توان از اثر نیروی F صرف‌نظر کرد. در این صورت داریم:

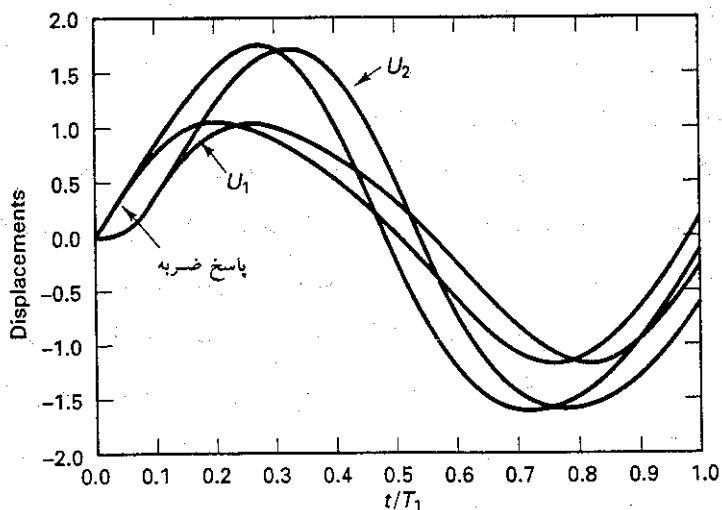
$$\begin{bmatrix} 5k & -2k \\ -2k & 2k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \frac{P}{L} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$$

حل این مسئله ویژه مقدار دو مقدار برای P/L را به دست می‌دهد. به علت علامت قراردادی برای P ، ویژه مقدار بزرگتر، بار بحرانی را به دست می‌دهد:

$$P_{crit} = -2kL$$



(ج) تحلیل سیستم: حالت ii



(ج) تحلیل سیستم: حالت iii (در اینجا تغییر مکانهای واقعی از ضرب مقادیر داده شده در $2T_d/\pi$ حاصل می‌شوند و پاسخ ضربه با استفاده از $U_1 = U_2 = 4T_d/\pi$ و مساوی صفر قرار دادن بارهای خارجی محاسبه می‌شود)

شکل E ۳.۱۴ (ادامه)

یادآوری می‌شود که در این تراز بار، کوچک‌ترین فرکانس سیستم صفر می‌باشد (ر.ک. به:

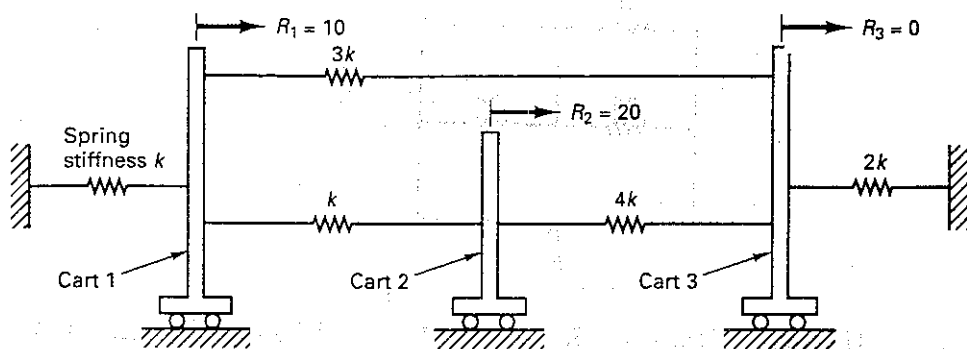
شکل (ت) E ۳.۱۴).

گرچه در این مثال یک سیستم سازه‌ای را در نظر گرفتیم، با وجود این اغلب، مشخصات حل که در مثال مذکور ارائه شدند مستقیماً در تحلیل انواع دیگری از مسائل نیز مشاهده می‌شوند. همان‌گونه که به طریقه‌ای مقدماتی در مثال مذکور نشان داده شد، این نکته حائز اهمیت است که یک تحلیل‌گر قادر باشد در مورد نوع تحلیلی که مورد نیاز می‌باشد تصمیم بگیرد: آیا یک تحلیل حالت پایا کافی است یا باید یک تحلیل دینامیکی انجام گیرد و آیا امکان دارد که سیستم ناپایدار شود یا نه؟ در فصول ششم و نهم در مورد برخی عوامل مهم که در تصمیم‌گیری تحلیل‌گر تأثیر می‌گذارند بحث خواهیم نمود.

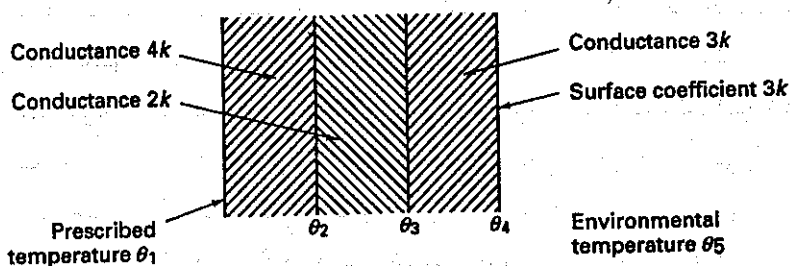
علاوه بر تصمیم‌گیری در مورد نوع تحلیلی که باید انجام گیرد، تحلیل‌گر باید یک مدل ریاضی پارامتر متمرکز مناسبی را از سیستم فیزیکی واقعی انتخاب کند. مشخصات این مدل بستگی به نوع تحلیلی دارد که انجام خواهد گرفت، اما در تحلیل‌های پیچیده مهندسی، در بسیاری از حالات یک مدل پارامتر متمرکز ساده، کافی نیست و لذا ضروری است که سیستم با یک مدل ریاضی مبتنی بر مکانیک محیط‌های پیوسته ایده‌آل‌سازی شود. در بخش آینده در مورد استفاده از چنان مدل‌هایی بحث خواهیم کرد.

۳.۲.۵ تمرین‌ها

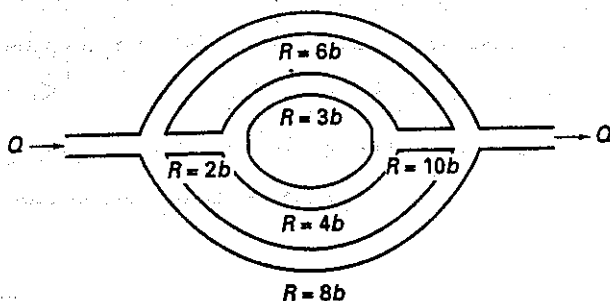
۳.۱ یک سیستم گاری ساده را در شرایط ایستا (حالت پایا) در نظر بگیرید. معادلات تعادل حاکم را ایجاد کنید.



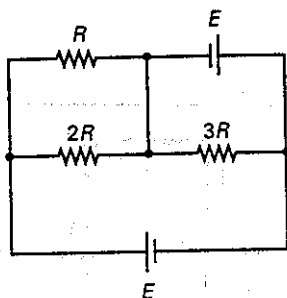
۳.۲ دیواری متشکل از ۳ دال همگن را که با همدیگر در تماس می‌باشند در نظر بگیرید. معادلات تعادل انتقال حرارت در حالت پایا را برای تحلیل این مسأله ایجاد کنید.



۳.۳ تحلیل شبکه هیدرولیکی زیر مورد نظر می‌باشد. معادلات تعادل سیستم را ایجاد کنید در صورتی که $\Delta P = Rq$ و ضریب مقاومت شاخه باشد.



۳.۴ تحلیل شبکه dc زیر مورد نظر می‌باشد. با استفاده از قانون Ohm، معادلات تعادل کاهش جریان - ولتاژ سیستم را ایجاد کنید.

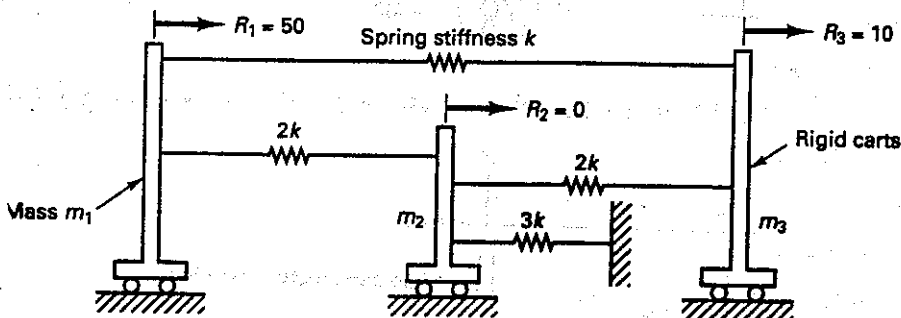
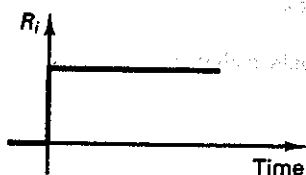


۳.۵ سیستم گاری - فنر تمرین ۳.۱ را در نظر بگیرید. نشانگر وردشی Π پتانسیل کلی سیستم را تعیین کنید.

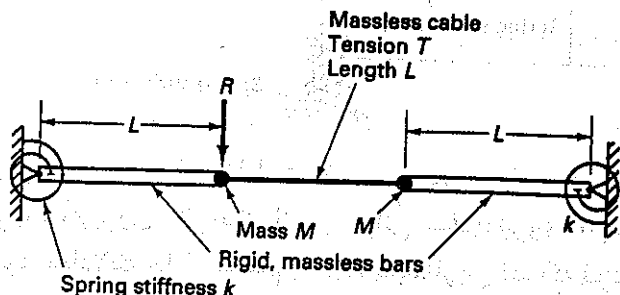
۳.۶ دال مثال ۳.۲ را در نظر بگیرید. یک نشانگر وردشی Π را تعیین کنید به گونه‌ای که دارای این خاصیت باشد که شرط $\delta\Pi = 0$ ، معادلات تعادل حاکم را ایجاد نماید.

۳.۷ معادلات تعادل دینامیکی سیستم گاری‌ها: در تمرین ۳.۱ را به دست آورید در صورتی که گاری‌ها دارای جرمهای m_1 , m_2 , m_3 باشند.

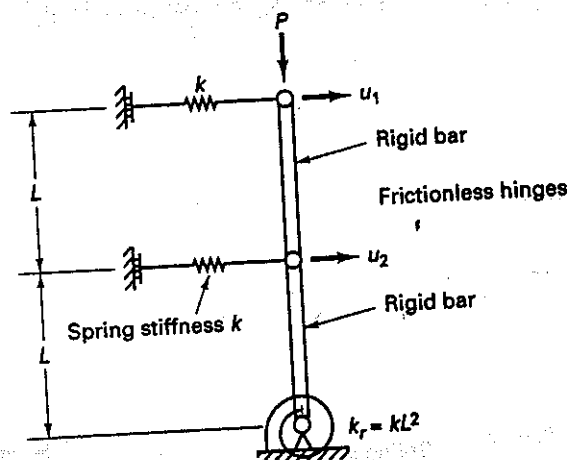
۳.۸ سیستم ساده فنر-گاری را که در شکل زیر نشان داده شده است و در آغاز در حالت سکون قرار دارد، در نظر بگیرید. معادلات حاکم بر پاسخ دینامیکی سیستم را ایجاد کنید.



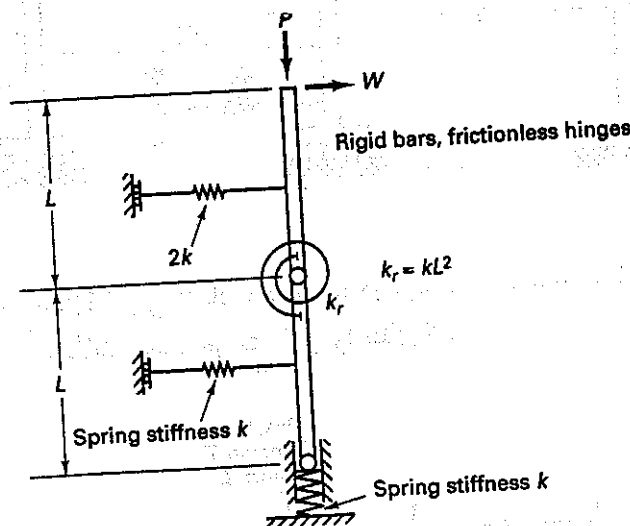
۳.۹ میله صلب و سازه کابلی نشان داده شده در زیر برای پاسخ دینامیکی آن تحلیل خواهد شد. معادلات تعادل حرکت را فرمول بندی کنید.



۳.۱۰ مدل سازه‌ای زیر را در نظر بگیرید. مسأله ویژه مقدراری را تعیین کنید که با استفاده از آن بار بحرانی را بتوان محاسبه نمود. برای پیدا کردن معادلات حاکم از هر دو روش مستقیم و وردشی استفاده کنید.



۳.۱۱ ویژه مسأله حاکم بر پایداری سیستم نشان داده در زیر را ایجاد نمایید.



۳.۱۲ سازه ستونی تمرین ۳.۱۱ در آغاز در حالت سکون قرار دارد و تحت اثر نیروی ثابت P می‌باشد (نیروی P کوچکتر از بار بحرانی است). نیروی W بطور ناگهانی بر آن وارد می‌شود. معادلات تعادل سیستم را ایجاد کنید. فرض کنید که فترها بدون جرم بوده و اینکه میله‌ها دارای جرم m در واحد طول می‌باشند.

۳.۱۳ تحلیل مثال ۳.۹ را در نظر بگیرید. فرض کنید که $\theta = \Phi e^{-\lambda x}$ و $Q = 0$ ، است و ویژه مسئله متناظر با Φ و λ را ایجاد نمایید.

۳.۱۴ دیوار متشکل از سه دال همگن را در تمرین ۳.۲ در نظر بگیرید. معادلات انتقال حرارتی را برای یک تحلیل گذرا فرمول‌بندی کنید، در صورتی که توزیع اولیه دما معلوم باشد و θ_1^{new} تغییر نماید. سپس فرض کنید که $\theta = \Phi e^{-\lambda x}$ و $Q = 0$ ، و یک ویژه مسئله متناظر با Φ و λ را ایجاد نمایید. فرض کنید که برای یک سطح مقطع واحد، هر دالی یک ظرفیت حرارتی کلی c را دارا می‌باشد و اینکه برای هر دال، ظرفیت حرارتی را می‌توان در وجوه آن متمرکز نمود.

۳.۳ حل مدل‌های ریاضی "پیوسته سیستم"

مراحل اساسی در حل یک مدل ریاضی پیوسته سیستم کاملاً مشابه مراحل حل هستند که در حل یک مدل پارامتر متمرکز به کار گرفته شدند (ر.ک. به: بخش ۳.۲). ولی به جای کار کردن با عناصر گسسته، توجه خود را معطوف به عناصر دیفرانسیلی نمونه می‌کنیم، با این منظور که بتوانیم معادلات دیفرانسیل را که شرایط تعادل عناصر، روابط مشخصه و شرایط اتصال متقابل عناصر را نشان می‌دهند، پیدا کنیم. معادلات دیفرانسیل مذکور باید در سرتاسر میدان سیستم صادق باشند و پیش از حل و محاسبه جوابها، باید با شرایط مرزی و در تحلیل دینامیکی نیز با شرایط اولیه تکمیل شوند.

همانند حالت تحلیل مدل‌های گسسته، در روش مختلف را می‌توان برای ایجاد معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم دنبال نمود: روش مستقیم و روش وردشی. در این بخش هر دو روش را مورد بحث قرار خواهیم داد (همچنین ر.ک. به: [A] R. Courant and D. Hilbert). روش وردشی را با جزئیات بیشتری شرح خواهیم داد، زیرا هم‌چنان که در بخش ۳.۳.۴ اشاره خواهد شد، روش مذکور به عنوان اساس روش عناصر محدود تلقی می‌شود.

۳.۳.۱ فرمول‌بندی دیفرانسیلی

در فرمول‌بندی دیفرانسیلی، شرایط تعادل و روابط مشخصه عناصر دیفرانسیلی نمونه را برحسب متغیرهای حالت ایجاد می‌نماییم. ملاحظات مذکور منجر به یک دستگاه معادلات دیفرانسیل برحسب متغیرهای حالت می‌شوند و امکان دارد که شرایط سازگاری (یعنی شرایط اتصال متقابل عناصر دیفرانسیلی) در این معادلات دیفرانسیل قبلاً رعایت شده باشند (به عنوان مثال با در نظر گرفتن صرف این واقعیت که جواب پیوسته خواهد بود). در حالت کلی، این

معادلات باید با معادلات دیفرانسیل کمکی تکمیل شوند. معادلات دیفرانسیلی کمکی قیده‌های مناسبی را بر متغیرهای حالت اعمال می‌کنند تا اینکه تمامی شرایط سازگاری ارضا شوند. سرانجام برای تکمیل فرمول‌بندی مسأله، تمامی شرایط مرزی و در یک تحلیل دینامیکی شرایط اولیه نیز بیان می‌شوند.

در تحلیل ریاضی، طبقه‌بندی معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسأله مفید می‌باشد. معادله دیفرانسیل جزئی عمومی از مرتبه دوم را در میدان x, y در نظر می‌گیریم:

$$A(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \phi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \quad (۳.۶)$$

که در آن u متغیر حالت مجهول می‌باشد. برحسب ضرایب موجود در (۳.۶) معادله دیفرانسیل بیضوی، سهموی یا هذلولوی است:

$$B^2 - AC \begin{cases} < 0 & \text{بیضوی} \\ = 0 & \text{سهموی} \\ > 0 & \text{هذلولوی} \end{cases}$$

طبقه‌بندی مذکور هنگامی ایجاد می‌گردد که معادله (۳.۶) با استفاده از روش مشخصه‌ها حل شود، زیرا در این صورت مشاهده می‌شود که مشخصه حل به وجه بارزی برای سه رسته معادلات مذکور، متفاوت می‌باشد. همچنین این تفاوت‌ها هنگامی آشکار می‌گردند که معادلات دیفرانسیل با مسائل فیزیکی مختلفی که بر آنها حاکم‌اند مشخص شوند. در ساده‌ترین صورت، سه نوع معادله مذکور را می‌توان به ترتیب با معادله لاپلاس، معادله هدایت حرارتی و معادله موج مشخص نمود. مثالهای زیر نشان خواهند داد که چگونه معادلات مذکور در حل مسائل فیزیکی به وجود می‌آیند.

مثال ۳.۱۵: یک سد ایده‌آل‌سازی شده که در شکل ۳.۱۵ ب نشان داده شده است بر روی خاک نفوذپذیر قرار دارد. معادله دیفرانسیل حاکم حالت پایای جریان آب در خاک زیر سد را فرمول‌بندی کنید و شرایط مرزی متناظر را به دست آورید.

حل:

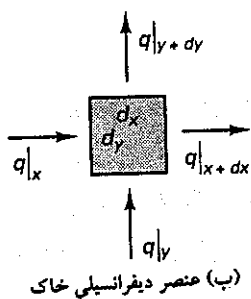
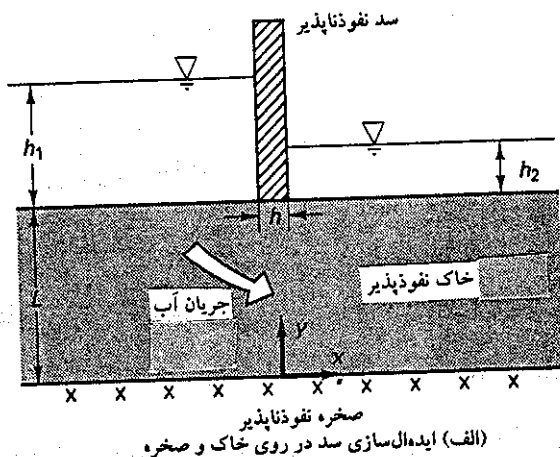
برای یک عنصر نمونه با عرض و طول dx و dy (و ضخامت واحد)، کل دبی وارده به عنصر باید مساوی با کل دبی خروجی از عنصر باشد.
بنابراین داریم:

$$(q|_y - q|_{y+dy}) dx + (q|_x - q|_{x+dx}) dy = 0$$

یا:

$$-\frac{\partial q_y}{\partial y} dy dx - \frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy = 0$$

(الف)



شکل E ۳.۱۵ مسأله دویعدی جریان آب در زیر سد

با استفاده از قانون Darcy، دبی برحسب پتانسیل کلی ϕ به صورت زیر داده می‌شود:

$$q_x = -k \frac{\partial \phi}{\partial x}; \quad q_y = -k \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (\text{ب})$$

که در آن یک نفوذپذیری یکنواخت k را فرض می‌کنیم. با جایگذاری (ب) در (الف) معادله لاپلاس را به دست می‌آوریم:

$$k \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (\text{پ})$$

قابل ذکر است که مشابه این معادله در تحلیل انتقال حرارت و در حل پتانسیل

الکترواستاتیکی و سایر مسائل میدانی نیز به دست می‌آید (ر.ک. به: فصل هفتم).
شرایط مرزی در خاک، شرایط مرزی بدون جریان در $x = -\infty$ و $x = +\infty$ می‌باشند:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=-\infty} = 0; \quad \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=+\infty} = 0 \quad (\text{ت})$$

و در سطح مشترک سنگ و خاک:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (\text{ث})$$

و در سطح مشترک سد و خاک:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=L} = 0 \quad \text{for } -\frac{h}{2} \leq x \leq +\frac{h}{2} \quad (\text{ج})$$

بعلاوه، پتانسیل کلی در سطح مشترک آب و خاک به صورت زیر از پیش اعمال می‌شود:

$$\phi(x, L)|_{x < -(h/2)} = h_1; \quad \phi(x, L)|_{x > (h/2)} = h_2 \quad (\text{چ})$$

معادلات دیفرانسیل (پ) و شرایط مرزی (ت) تا (چ) پاسخ حالت پایای جریان آب در خاک زیر سد را تعریف می‌کنند.

مثال ۳.۱۶: یک دال طولیل نشان داده شده در شکل ۳.۱۶ دارای دمای اولیه ثابت θ_i می‌باشد و سطح دال در $x = 0$ ناگهان در معرض یک جریان حرارتی ورودی یکنواخت ثابت قرار می‌گیرد. سطح دال در $x = L$ در دمای θ_b نگه داشته شده و سطح موازی صفحه x, z عایق بندی می‌گردد. با فرض شرایط جریان حرارتی یک بعدی، نشان دهید که معادله تعادل حاکم بر مسأله، معادله هدایت حرارتی زیر می‌باشد:

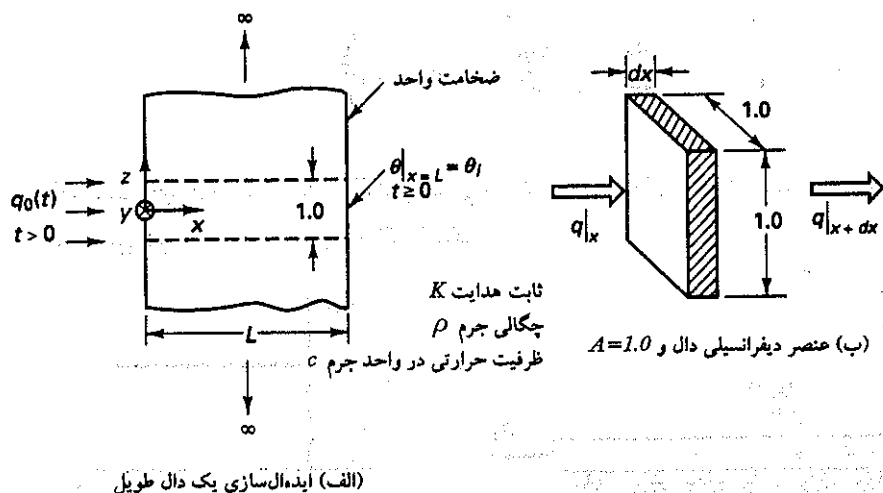
$$k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

که پارامترهای آن در شکل ۳.۱۶ E تعریف شده و دمای θ ، متغیر حالت می‌باشد. همچنین شرایط مرزی و شرایط اولیه را بیان کنید.

حل:

یک عنصر دیفرانسیلی نمونه از دال را در نظر می‌گیریم (ر.ک. به: شکل (ب) ۳.۱۶ E). شرایط تعادل عنصری به این صورت است که دبی حرارتی خالص ورودی به عنصر باید مساوی نرخ گرمای ذخیره شده در عنصر باشد. بنابراین:

$$qA|_x - \left(qA|_x + A \left. \frac{\partial q}{\partial x} \right|_x dx \right) = \rho A c \left. \frac{\partial \theta}{\partial t} \right|_x dx \quad (\text{الف})$$



شکل ۳.۱۶ E مسئله هدایت حرارتی یک‌بعدی

رابطه مشخصه به وسیله قانون هدایت حرارتی Fourier مشخص می‌شود:

$$q = -k \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (\text{ب})$$

با جایگذاری (ب) در (الف)، رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (\text{پ})$$

در این حالت، شرایط اتصال متقابل عناصر در این فرض در نظر گرفته شده است که دمای θ تابع پیوسته‌ای از x می‌باشد و شرایط سازگاری کمکی دیگری را نمی‌توان به کار برد.

شرایط مرزی عبارتند از:

$$\frac{\partial \theta}{\partial x}(0, t) = -\frac{q_0(t)}{k} \quad ; \quad t > 0 \quad (\text{ت})$$

و شرط اولیه عبارت است از:

$$\theta(L, t) = \theta_i \quad (\text{ث})$$

$$\theta(x, 0) = \theta_i$$

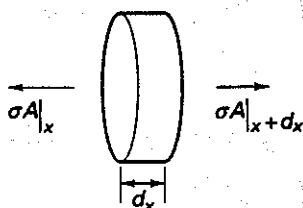
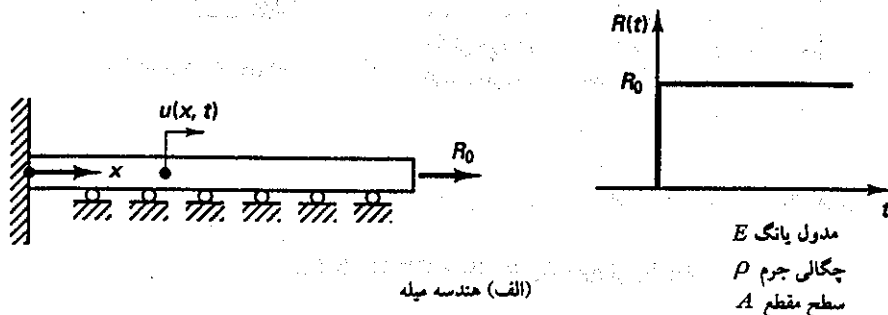
حال فرمول‌بندی مسئله کامل می‌شود و حل (پ) با اعمال شرایط مرزی (ت) و شرایط

اولیه (ث)، پاسخ دمای دال را به دست می‌دهد.

مثال ۳.۱۷: میله نشان داده شده در شکل ۳.۱۷ E در ابتداء در حالت سکون بوده و بار $R(t)$ ناگهان بر انتهای آزاد آن وارد می‌شود. نشان دهید که معادله دیفرانسیل حاکم بر مسئله، معادله موج می‌باشد:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

که متغیرهای آن در شکل E ۳.۱۷ تعریف می‌شوند و تغییر مکان میله، u ، متغیر حالت می‌باشد. همچنین شرایط مرزی و شرایط اولیه را بیان کنید.



شکل E ۳.۱۷ میله تحت اثر بار پله‌ای

حل:

با استفاده از اصل d'Alembert، شرایط تعادل نیرویی عنصر در یک عنصر دیفرانسیلی

نمونه عبارتند از:

$$\sigma A|_x + A \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx - \sigma A|_{x+dx} = \rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dx \quad (\text{الف})$$

رابطه مشخصه به صورت زیر می‌باشد:

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{ب})$$

با ترکیب (الف) و (ب) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{پ})$$

شرایط اتصال متقابل عناصر تأمین می‌شوند زیرا فرض می‌نماییم که تغییر مکان u پیوسته بوده و شرایط سازگاری کمکی دیگری را نمی‌توان به کار برد.

شرایط مرزی عبارتند از:

$$\begin{aligned} u(0, t) &= 0 \\ EA \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) &= R_0 \end{aligned} \quad ; \quad t > 0 \quad (\text{ت})$$

و شرایط اولیه عبارتند از:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{ث})$$

با داشتن شرایط (ت) و (ث) فرمول‌بندی مسأله کامل می‌شود و (پ) را می‌توان برای یافتن پاسخ تغییر مکان میله حل نمود.

اگرچه در این مثالها، مسائل خاصی را که معادلات دیفرانسیل بیضوی، سهموی و هذلولوی بر آنها حاکم می‌باشند در نظر گرفتیم، ولی فرمول‌بندی‌های مسأله، به طریقه‌ای کاملاً کلی، برخی مشخصات اساسی را نشان می‌دهند. در مسائل بیضوی (ر.ک. به: مثال ۳.۱۵) مقادیر متغیرهای حالت مجهول (یا مشتقات معمولی آنها) در مرز داده می‌شوند. بدین سبب است که مسائل مذکور، مسائل مقدار مرزی نامیده می‌شوند و این نکته در مورد این‌گونه مسائل باید ذکر شود که جواب در یک نقطه عمومی داخلی بستگی به اطلاعات موجود در تمام نقاط مرزی دارد. تغییری صرفاً در یک مقدار مرزی در کل جواب تأثیر می‌گذارد، به عنوان مثال، در مثال ۳.۱۵ جواب کامل ϕ بستگی به مقدار واقعی h_I دارد. معادلات دیفرانسیل بیضوی عموماً بر پاسخ سیستمهای حالت پایا حاکم‌اند.

با مقایسه معادلات دیفرانسیل داده شده در مثالهای ۳.۱۵ الی ۳.۱۷، یادآوری می‌شود که برعکس معادله بیضوی، معادلات سهموی و هذلولوی (به ترتیب مثالهای ۳.۱۶ و ۳.۱۷) شامل زمان به عنوان یک متغیر مستقل‌اند و بنابراین مسائل انتشار را تعریف می‌نمایند. در ضمن مسائل مذکور، مسائل مقدار اولیه نامیده می‌شوند زیرا جواب بستگی به شرایط اولیه دارد. قابل ذکر است که مشابه استخراج معادلات تعادل دینامیکی مدل‌های پارامتر متمرکز، معادلات دیفرانسیل حاکم مسائل انتشار از معادلات حالت پایا با وارد نمودن اثر "مقاومت در برابر تغییر" (اینرسی) عناصر دیفرانسیلی به دست می‌آیند. برعکس، معادلات دیفرانسیل سهموی و هذلولوی در مثالهای ۳.۱۶ و ۳.۱۷، هنگامی به صورت معادلات بیضوی درمی‌آیند که از عبارت‌های وابسته به زمان صرف‌نظر شود. در این صورت، مسائل مقدار اولیه به مسائل مقدار مرزی با جوابهای حالت پایا تبدیل می‌شوند.

پیش از این گفته شد که جواب یک مسأله مقدار مرزی بستگی به اطلاعات موجود در

تمامی نقاط مرزی دارد. در این جا یک تفاوت اساسی در تحلیل مسأله انتشار پدید می آید؛ به عنوان مثال، اگر مسائل انتشار را در نظر بگیریم، ممکن است جواب در یک نقطه داخلی صرفاً به شرایط مرزی بخشی از مرز و شرایط اولیه در بخشی از میدان داخلی بستگی داشته باشد.

۳.۳.۲ فرمول بندی های وردشی

روش وردشی برای ایجاد معادلات تعادل حاکم بر یک سیستم، هنگامی که در مورد تحلیل سیستم های گسسته بحث می کردیم، به عنوان یک روش جایگزین برای روش مستقیم معرفی گردید (ر.ک. به: بخش ۳.۲.۱). همان گونه که توصیف شد، اساس روش این است که پتانسیل کلی Π سیستم محاسبه می شود و با استفاده از شرط مانا بودن Π ، مشتق آن نسبت به متغیرهای حالت مساوی صفر قرار داده می شود، $\delta \Pi = 0$. و نیز اشاره کردیم که تکنیک وردشی می تواند در تحلیل سیستم های گسسته مؤثر باشد، با وجود این مشاهده خواهیم نمود که این روش بویژه یک مکانیزم نیرومندی را برای تحلیل سیستم های پیوسته فراهم می نماید. علت اصلی مؤثر بودن روش مذکور، در چگونگی ایجاد شرایط مرزی (به عنوان مثال، شرایط مرزی طبیعی که در زیر تعریف می شوند) و نحوه در نظر گرفتن این شرایط در موقع استفاده از روش وردشی، نهفته است.

برای نشان دادن فرمول بندی وردشی در مثالهای زیر فرض می کنیم که پتانسیل کلی Π داده شده است و توصیف اینکه چگونه یک Π مناسب را می توان تعیین نمود به بعد از ارائه مثالها موکول می کنیم.

به پتانسیل کلی Π ، تابع مسأله نیز اطلاق می شود. فرض کنید که در تابع بالاترین مشتق یک متغیر حالت (نسبت به یک مختص فضایی) از مرتبه m است، به عبارت دیگر، عملگر حداکثر شامل مشتقات از مرتبه m می باشد. چنین مسأله ای را مسأله وردشی C^{m-1} می نامیم. با در نظر گرفتن شرایط مرزی مسأله دو رده از شرایط مرزی را مشخص می نماییم: شرایط مرزی اساسی و شرایط مرزی طبیعی.

به شرایط مرزی اساسی، شرایط مرزی هندسی نیز اطلاق می شود، زیرا در مکانیک سازه ای، شرایط مرزی اساسی متناظر با تغییر مکانها و دوران های از پیش تعیین شده می باشند. مرتبه مشتقات در شرایط مرزی اساسی در یک مسأله C^{m-1} ، حداکثر $m-1$ است.

رده دوم شرایط مرزی، یعنی شرایط مرزی طبیعی، شرایط مرزی نیروی نیز نامیده می شوند، زیرا در مکانیک سازه ای، شرایط مرزی طبیعی متناظر با نیروها و لنگرهای مرزی از پیش تعیین شده می باشند. بالاترین مشتقات در چنین شرایط مرزی از مرتبه m تا $2m-1$ می باشند.

چنان که ملاحظه خواهیم کرد این نوع طبقه‌بندی مسائل وردشی و شرایط مرزی همراه با آنها در طراحی راه‌حل‌های عددی بسیار مفید می‌باشد.

در فرمول‌بندی وردشی، از نماد وردشی δ ، که قبلاً به اختصار در (۳.۱) به کار بردیم، استفاده خواهیم کرد. برخی خواص عملیاتی این نماد را یادآوری می‌نماییم، برای جزییات بیشتر، از جمله به [A] R. Courant and D. Hilbert مراجعه شود. فرض کنید که یک تابع F به ازای یک مقدار داده شده x بستگی به v (متغیر حالت)، dv/dx ، \dots ، $d^p v/dx^p$ دارد که در آن $p = 1, 2, \dots$ در این صورت اولین وردش F به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial v} \delta v + \frac{\partial F}{\partial (dv/dx)} \delta \left(\frac{dv}{dx} \right) + \dots + \frac{\partial F}{\partial (d^p v/dx^p)} \delta \left(\frac{d^p v}{dx^p} \right) \quad (3.7 \text{ الف})$$

عبارت مذکور به صورت زیر توضیح داده می‌شود. با $v(x)$ یک تابع $\epsilon \eta(x)$ را همراه می‌کنیم که در آن ϵ یک مقدار ثابت بوده (مستقل از x) و $\eta(x)$ یک تابع اختیاری است، ولی به حد کافی یک تابع هموار است به گونه‌ای که در شرایط مرزی اساسی و متناظر با آن صفر می‌باشد. $\eta(x)$ را یک وردش در v می‌نامیم، به عبارت دیگر $\delta v(x) = \eta(x)$ (در این صورت البته $\epsilon \eta(x)$ یک وردش در v می‌باشد) و برای مشتقات مورد نیاز نیز داریم:

$$\frac{d^n \eta}{dx^n} = \frac{d^n \delta v}{dx^n} = \delta \left(\frac{d^n v}{dx^n} \right)$$

به عبارت دیگر، وردش یک مشتق v مساوی با مشتق وردش در v می‌باشد. در این صورت عبارت (الف ۳.۷) از تعیین رابطه زیر نتیجه می‌شود:

$$\delta F = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F \left[v + \epsilon \eta, \frac{d(v + \epsilon \eta)}{dx}, \dots, \frac{d^p(v + \epsilon \eta)}{dx^p} \right] - F \left(v, \frac{dv}{dx}, \dots, \frac{d^p v}{dx^p} \right)}{\epsilon} \quad (3.7 \text{ ب})$$

با در نظر گرفتن (الف ۳.۷)، یادآوری می‌کنیم که عبارت δF شبیه عبارت دیفرانسیل کلی dF است، به عبارت دیگر، عملگر وردشی δ مانند عملگر دیفرانسیل نسبت به متغیرهای v و dv/dx ، \dots ، $d^p v/dx^p$ عمل می‌کند. این معادلات را می‌توان به توابع و متغیرهای وابسته چندگانه بسط داد و در این صورت درمی‌یابیم که قوانین وردشی جمع‌ها و حاصل ضربها و غیره کاملاً مشابه قوانین متناظر در مشتق‌گیری می‌باشند. به عنوان مثال، اگر F و Q را دو تابع محتملاً وابسته به متغیرهای حالت مختلف در نظر بگیریم، در این صورت داریم:

$$\delta(F + Q) = \delta F + \delta Q; \quad \delta(FQ) = (\delta F)Q + F(\delta Q); \quad \delta(F)^n = n(F)^{n-1} \delta F$$

در بسیاری از موارد، توابع عموماً در درون یک علامت انتگرال ظاهر می‌شوند و بنابراین، به عنوان مثال از رابطه زیر نیز استفاده می‌کنیم:

$$\delta \int F(x) dx = \int \delta F(x) dx$$

قواعد مذکور را به طور گسترده‌ای در مشتق‌گیری‌های وردشی به کار خواهیم برد و از یک شرط مهم استفاده خواهیم کرد (که متناظر با خواص η می‌باشد که پیش از این بیان شده است) که عبارت است از: تغییرات در متغیرهای حالت و مشتقات $m-1$ ام آنها باید در شرایط مرزی اساسی و متناظر با آنها صفر باشند، اما در غیر این صورت تغییرات می‌توانند اختیاری باشند.

مثالهای زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۳.۱۸: تابع حاکم بر توزیع دما در دال مورد نظر در مثال ۳.۱۶ به صورت زیر است:

$$\Pi = \int_0^L \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx - \int_0^L \theta q^B dx - \theta_0 q_0 \quad (\text{الف})$$

و شرایط مرزی اساسی عبارت است از:

$$\theta_L = \theta_l \quad (\text{ب})$$

که در آنها:

$$\theta_0 = \theta(0, t) \quad \text{and} \quad \theta_L = \theta(L, t)$$

q^B گرمای تولید شده در واحد حجم است و در سایر موارد نمادگذاری مشابه مثال ۳.۱۶ استفاده می‌شود. شرط مانا بودن Π را برای استخراج معادله هدایت حرارتی حاکم و شرط مرزی طبیعی به کار برید.

حل:

این مسأله یک مسأله وردشی C^0 است، به عبارت دیگر بالاترین مشتق در تابع (الف) از مرتبه ۱ می‌باشد یا $m = 1$ است. بنابراین یک شرط مرزی اساسی که در این جا به وسیله (ب) مشخص می‌شود می‌تواند تنها متناظر با یک دمای از پیش تعیین شده باشد و یک شرط مرزی طبیعی باید متناظر با یک شیب حرارتی از پیش تعیین شده یا ورودی جریان حرارتی مرزی باشد.

برای به کارگیری شرط مانا $\delta \Pi = 0$ ، مستقیماً می‌توان از این واقعیت استفاده نمود که وردش‌ها و مشتق‌گیری‌ها با قواعد مشابهی انجام می‌گیرند. به عبارت دیگر، با استفاده از (الف ۳.۷) رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\int_0^L \left(k \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \left(\delta \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) dx - \int_0^L \delta \theta q^B dx - \delta \theta_0 q_0 = 0 \quad (\text{پ})$$

که در آن همچنین $\frac{\partial \delta \theta}{\partial x} = \delta \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)$ در ضمن نتیجه یکسانی در هنگام استفاده از (ب ۳.۷) به دست می‌آید که در این جا ارائه می‌شود:

$$\begin{aligned}
 \delta \Pi &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[\frac{\left\{ \int_0^L \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 dx - \int_0^L (\theta + \epsilon \eta) q^B dx - (\theta_0 + \epsilon \eta|_{x=0}) q_0 \right\}}{\epsilon} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\left\{ \int_0^L \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx - \int_0^L \theta q^B dx - \theta_0 q_0 \right\}}{\epsilon} \right] \\
 &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int_0^L \left[\epsilon k \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{2} \epsilon^2 k \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right] dx - \int_0^L \epsilon \eta q^B dx - \epsilon \eta|_{x=0} q_0}{\epsilon} \\
 &= \int_0^L k \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} dx - \int_0^L \eta q^B dx - \eta_0 q_0 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

که در آن $\eta_0 = \eta|_{x=0}$ و حالا $\delta\theta$ را جایگزین η خواهیم کرد.
حال با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء^(۳) (پ) را از معادله زیر به دست می‌آوریم:

$$\underbrace{- \int_0^L \left(k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + q^B \right) \delta\theta dx}_{\textcircled{1}} + \underbrace{k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=L} \delta\theta_L}_{\textcircled{2}} - \underbrace{\left[k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} + q_0 \right] \delta\theta_0}_{\textcircled{3}} = 0 \quad (\text{ت})$$

برای استخراج معادلات دیفرانسیل حاکم و شرط مرزی طبیعی از (ت)، از این استدلال استفاده می‌کنیم که تغییرات در θ کاملاً اختیاری می‌باشند به جز اینکه هیچ تغییری در شرایط مرزی اساسی از پیش تعیین شده وجود ندارد. بنابراین از آنجا که θ_L از پیش تعیین شده می‌باشد داریم: $\delta\theta_L = 0$ و عبارت^② در (ت) از بین می‌رود.

حال عبارات^① و^③ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\delta\theta_0 = 0$ مگر اینکه θ_0 غیر صفر باشد (به استثنای $x=0$ که در آن یک جهش ناگهانی به مقدار صفر داریم). اگر تمامی مقادیر غیر صفر $\delta\theta$ در (ت) صدق کنند، ضرورت دارد که داشته باشیم^(۴):

$$k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + q^B = 0 \quad (\text{ث})$$

برعکس، فرض کنید که $\delta\theta$ در هر نقطه‌ای صفر می‌باشد به جز $x=0$. به عبارت دیگر داریم $\delta\theta_0 \neq 0$ ، در این صورت (ت) تنها هنگامی اعتبار دارد که:

(۳) از قضیه دیورژانس استفاده می‌شود (ر.ک. به: مثالهای ۴.۲ و ۷.۱).

(۴) در حقیقت بر این نکته به طور ضمنی اشاره می‌کنیم که حدهای انتگرال‌گیری از 0 تا L نیستند بلکه از 0^+ تا L^- می‌باشند.

$$k \frac{\partial \theta}{\partial x} \Big|_{x=0} + q_0 = 0 \quad (\text{ج})$$

عبارت (ج) شرط مرزی طبیعی را نمایش می‌دهد.

معادله دیفرانسیل حاکم بر مسأله انتشار از (ث) به دست می‌آید، با مشخص نمودن این نکته که:

$$q^B = -\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (\text{چ})$$

$$k \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad \text{بنابراین (ث) به صورت زیر درمی‌آید:}$$

باید دانست تا هنگامی که اثر ظرفیت حرارتی در فرمول‌بندی (چ) وارد نشده است، معادلات مانند یک مسأله حالت پایا استخراج می‌شوند (و با q^B وابسته به زمان به عنوان یک مسأله شبه حالت پایا). بنابراین، همان‌گونه که پیش از این بیان شد، فرمول‌بندی مسأله انتشار را می‌توان از معادله حاکم بر پاسخ حالت پایا با در نظر گرفتن "عبارت اینرسی" وابسته به زمان به دست آورد.

مثال ۳.۱۹: تابعک و شرط مرزی اساسی حاکم بر مسأله انتشار موج در میله مورد نظر در مثال ۳.۷ عبارتند از:

$$\Pi = \int_0^L \frac{1}{2} EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \int_0^L u f^B dx - u_L R \quad (\text{الف})$$

$$u_0 = 0 \quad (\text{ب})$$

که در آن از نمادگذاری مشابه مثال ۳.۱۷ استفاده می‌شود، $u_0 = u(0, t)$ و $u_L = (L, t)$ نیروی جسمی در واحد طول میله است. نشان دهید که با استفاده از شرط مانا بودن Π ، معادله دیفرانسیل حاکم بر مسأله انتشار و شرایط مرزی طبیعی را می‌توان استخراج نمود.

حل:

مانند مثال ۳.۱۸، مراحل حل را دنبال می‌کنیم. شرط مانا $\delta \Pi = 0$ نتیجه زیر را به دست می‌دهد:

$$\int_0^L \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\delta \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx - \int_0^L \delta u f^B dx - \delta u_L R = 0$$

با نوشتن $\delta \frac{\partial u}{\partial x}$ به جای $\delta (\partial u / \partial x)$ و با یادآوری اینکه EA ثابت می‌باشد و با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$-\int_0^L \left(EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f^B \right) \delta u dx + \left[EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=L} - R \right] \delta u_L - EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} \delta u_0 = 0$$

اساساً برای به دست آوردن معادله دیفرانسیل حاکم و شرط مرزی طبیعی، از استدلال مشابه مثال ۳.۱۸ استفاده می‌کنیم؛ به عبارت دیگر از آنجا که δu_0 صفر بوده ولی δu در سایر نقاط اختیاری

می‌باشد، از اینرو باید داشته باشیم:

$$EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f^B = 0 \quad (\text{پ})$$

$$EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=L} = R \quad (\text{ت})$$

در این مسأله داریم: $f^B = A\rho \partial^2 u / \partial t^2$ و بنابراین (پ) به صورت معادله دیفرانسیل حاکم بر مسأله درمی‌آید:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}; \quad c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

شرط مرزی طبیعی در (ت) ارائه گردیده است.

سرانجام، قابل ذکر است که مسأله (الف) و (ب) یک مسأله وردشی C^0 می‌باشد، به عبارت دیگر در این حالت $m=1$ است.

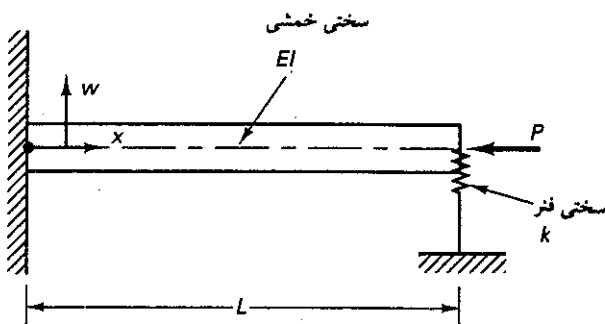
مثال ۳.۲۰: تابعک حاکم بر کمناش ایستایی ستون شکل ۳.۲۰ عبارت است از:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - \frac{P}{2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} k w_L^2 \quad (\text{الف})$$

که در آن $w_L = w|_{x=L}$ و شرایط مرزی اساسی عبارتند از:

$$w|_{x=0} = 0, \quad \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \quad (\text{ب})$$

از شرط مانا $\delta \Pi = 0$ برای استخراج معادله دیفرانسیل حاکم و شرایط مرزی طبیعی استفاده نمایید.



شکل ۳.۲۰ ستون تحت اثر یک بار فشاری

حل:

این مسأله یک مسأله وردشی C^1 می‌باشد، به عبارت دیگر $m = 2$ ، چرا که بالاترین مشتق در تابع از مرتبه ۲ است.

شرط مانا $\delta \Pi = 0$ نتیجه زیر را به دست می‌دهد:

$$\int_0^L EI w'' \delta w'' dx = EI w'' \delta w' \Big|_0^L - EI \int_0^L w''' \delta w' dx$$

که در آن از نمادگذاری $w' = dw/dx$ و غیره استفاده می‌کنیم. اما $\delta w'' = d(\delta w')/dx$ و EI ثابت است. بنابراین با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\int_0^L EI w'' \delta w'' dx - P \int_0^L w' \delta w' dx + k w_L \delta w_L = 0$$

اگر انتگرال‌گیری جزء به جزء $\int_0^L w''' \delta w' dx$ را ادامه بدهیم و همچنین از $\int_0^L w' \delta w' dx$ انتگرال جزء به جزء بگیریم، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\underbrace{\int_0^L (EI w^{iv} + P w'') \delta w dx}_{\textcircled{1}} + \underbrace{(EI w'' \delta w') \Big|_L}_{\textcircled{2}} - \underbrace{(EI w'' \delta w') \Big|_0}_{\textcircled{3}} - \underbrace{[(EI w''' + P w') \delta w] \Big|_L}_{\textcircled{4}} + \underbrace{[(EI w''' + P w') \delta w] \Big|_0}_{\textcircled{5}} + \underbrace{k w_L \delta w_L}_{\textcircled{6}} = 0 \quad (\text{پ})$$

از آنجا که تغییرات در w و w' در شرایط مرزی اساسی باید صفر باشند، از اینرو داریم: $\delta w_0 = 0$ و $\delta w'_0 = 0$. نتیجه می‌شود که عبارات $\textcircled{3}$ و $\textcircled{5}$ صفر هستند. تغییرات در w و w' در سایر نقاط اختیاری می‌باشند، از اینرو برای ارضا (پ) با استفاده از استدلال‌های پیشین (ر.ک. به: مثال ۳.۱۸) نتیجه می‌گیریم که معادلات زیر باید ارضا شوند:

$$EI w^{iv} + P w'' = 0 \quad \text{عبارت ۱:} \quad (\text{ت})$$

$$EI w'' \Big|_{x=L} = 0 \quad \text{عبارت ۲:} \quad (\text{ث})$$

$$(EI w''' + P w' - k w) \Big|_{x=L} = 0 \quad \text{عبارات ۴ و ۶:} \quad (\text{ج})$$

معادله دیفرانسیل حاکم بر مسأله در (ث) داده می‌شود و شرایط مرزی در روابط (ث) و (ج) ارائه شده‌اند. باید یادآوری کرد که شرایط مرزی مذکور، متناظر با شرایط فیزیکی تعادل لنگر و برش در $x = L$ می‌باشند.

در مثالهای پیشین نشان دادیم که چگونه با استفاده از مانا بودن تابع مسأله، می‌توان معادله دیفرانسیل حاکم بر مسأله و شرایط مرزی طبیعی را استخراج نمود. حال به یادآوری چند نکته می‌پردازیم.

بر اساس نکته نظر صرفاً مبتنی بر سودمندی، نکات ذیل را در ارتباط با فرمول بندی وردشی می توان بیان نمود:

۱. روش وردشی می‌تواند روش نسبتاً ساده‌ای را برای ایجاد معادلات حاکم بر سیستم فراهم نماید. سهولت مذکور در استفاده از یک اصل وردشی عمدتاً در نتیجه این واقعیت است که در فرمول‌بندی وردشی به جای اینکه کمیت‌های برداری (نظیر نیروها، تغییر مکانها و غیره) استفاده شوند، کمیت‌های اسکالر (نظیر انرژی‌ها، پتانسیل‌ها و غیره) در نظر گرفته می‌شوند.

۲. یک روش وردشی می‌تواند به طور مستقیم منجر به معادلات حاکم بر سیستم و شرایط مرزی شود. به عنوان مثال، اگر یک سیستم پیچیده در نظر گرفته شود، فرمول‌بندی وردشی این مزیت را دارد که در آن برخی متغیرها که وارد نمودن آنها در یک فرمول‌بندی مستقیم ضرورت دارد، در نظر گرفته نمی‌شوند (مانند نیروهای داخلی که کار خالصی را انجام نمی‌دهند).

۳. روش وردشی در فهم عمیق مسأله به طور مؤثری کمک می‌نماید و نیز کنترل مستقلی را در فرمول‌بندی مسأله فراهم می‌کند.

۴. اگر تحلیل‌گر به جای فرمول‌بندی دیفرانسیلی مسأله در روی فرمول‌بندی وردشی عمل کند، در این صورت برای راه‌حل‌های تقریبی، در حالات زیادی می‌تواند رده‌های بیشتری از توابع آزمون را به کار گیرد؛ به عنوان مثال، لازم نیست که توابع آزمون شرایط مرزی طبیعی را ارضا نماید، زیرا این شرایط مرزی بطور ضمنی در تابع در نظر گرفته شده‌اند (ر.ک. به: بخش ۳.۳.۴).

آخرین نکته پیامدهای بسیار مهمی دارد و بیشترین موفقیت روش عناصر محدود منوط به این واقعیت است که با به کارگیری یک فرمول‌بندی وردشی، رده‌های بیشتری از توابع را می‌توان مورد استفاده قرار داد. این موضوع را با جزئیات بیشتر در بخش بعدی و بخش ۳.۳.۴ مورد بررسی قرار خواهیم داد.

۳.۳.۳ روش‌های باقی مانده وزن دار؛ روش Ritz

در بخش‌های پیشین، در مورد فرمول‌بندی‌های دیفرانسیلی و وردشی معادلات تعادل حاکم بر سیستم‌های پیوسته بحث کردیم. هنگامی که با سیستم‌های نسبتاً ساده مواجه هستیم، معادلات مذکور را می‌توان به روش بسته فرم با استفاده از تکنیک‌های انتگرال‌گیری، تفکیک‌سازی متغیرها و غیره حل نمود. برای سیستم‌های پیچیده‌تر، شیوه‌های حل تقریبی را باید به کار بست. هدف این بخش، بررسی برخی تکنیک‌های کلاسیک است که در آنها خانواده‌ای از توابع آزمون برای پیدا کردن یک جواب تقریبی مورد استفاده قرار می‌گیرند. بعداً مشاهده خواهیم کرد که این تکنیک‌ها ارتباط بسیار نزدیکی با روش عناصر محدود دارند و در حقیقت روش عناصر

محدود را می‌توان به عنوان بسط روش‌های کلاسیک مزبور در نظر گرفت. تحلیل یک مسأله حالت پایا را با استفاده از فرمول‌بندی دیفرانسیلی آن در نظر بگیرید:

$$L_{2m}[\phi] = r \quad (3.8)$$

که در آن L_{2m} یک عملگر دیفرانسیلی خطی و ϕ متغیر حالتی می‌باشد که باید محاسبه گردد و r تابع نیرویی است. جواب این مسأله باید شرایط مرزی را نیز به صورت زیر تأمین نماید:

$$B_i[\phi] = q_i|_{\text{at boundary } S_i}; \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.9)$$

به طور خاص، با عملگرهای متقارن و مثبت معین مواجه خواهیم بود که شرط تقارن زیر را تأمین می‌کنند:

$$\int_D (L_{2m}[u])v \, dD = \int_D (L_{2m}[v])u \, dD \quad (3.10)$$

و نیز شرط مثبت معین بودن زیر را نیز ارضا می‌نمایند:

$$\int_D (L_{2m}[u])u \, dD > 0 \quad (3.11)$$

که در آن D میدان عملگر و u و v هر نوع تابعی می‌باشند که شرایط مرزی اساسی و طبیعی همگن را تأمین می‌کنند. برای روشن نمودن مفهوم روابط (۳.۸) الی (۳.۱۱)، مثال زیر را ملاحظه می‌کنیم.

مثال ۳.۲۱: پاسخ حالت پایای میله نشان داده شده در شکل ۳.۱۷ E با استفاده از حل معادله دیفرانسیل زیر تعیین می‌گردد:

$$-EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{الف})$$

که باید شرایط مرزی زیر نیز تأمین شوند:

$$u|_{x=0} = 0; \quad EA \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = R \quad (\text{ب})$$

عملگرها و توابع (۳.۸) و (۳.۹) را مشخص نموده و کنترل کنید که آیا عملگر L_{2m} متقارن و مثبت معین است یا نه؟
حل:

با مقایسه (۳.۸) با (الف)، مشاهده می‌کنیم که در این مسأله:

$$L_{2m} = -EA \frac{\partial^2}{\partial x^2}; \quad \phi = u; \quad r = 0$$

به طور مشابه، با مقایسه (۳.۹) با (ب)، درمی‌یابیم که:

$$B_1 = 1; \quad q_1 = 0$$

$$B_2 = EA \frac{\partial}{\partial x}; \quad q_2 = R$$

برای مشخص نمودن اینکه آیا عملگر L_{2m} متقارن و مثبت معین است یا نه، حالت $R = 0$ را در نظر می‌گیریم. مفهوم فیزیکی این نکته، این است که ما صرفاً با خود سازه سر و کار داریم نه با بار وارد بر آن. برای (۳.۱۰) داریم:

$$\begin{aligned} \int_0^L -EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v \, dx &= -EA \frac{\partial u}{\partial x} v \Big|_0^L + \int_0^L EA \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \, dx \\ &= -EA \frac{\partial u}{\partial x} v \Big|_0^L + EA u \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_0^L - \int_0^L EA \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} u \, dx \end{aligned} \quad (پ)$$

از آنجا که شرایط مرزی عبارتند از: $u = v = 0$ در $x = 0$ و $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ در $x = L$ ، از اینرو داریم:

$$\int_0^L -EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v \, dx = \int_0^L -EA \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} u \, dx$$

و در نتیجه عملگر، متقارن است. همچنین می‌توان مستقیماً نتیجه گرفت که عملگر مثبت معین نیز هست، زیرا از (پ) رابطه زیر را پیدا می‌کنیم:

$$\int_0^L -EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u \, dx = \int_0^L EA \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \, dx$$

در ادامه، در مورد استفاده از روشهای کلاسیک باقی مانده وزن‌دار و روش Ritz در حل مسائل حالت پایای خطی همانند روابط (۳.۸) و (۳.۹) بحث می‌کنیم، ولی مفاهیم مشابهی را نیز می‌توان در تحلیل مسائل انتشار و ویژه مسائل و در تحلیل پاسخ غیرخطی به کار برد (ر.ک. به: مثالهای ۳.۲۳ و ۳.۲۴).

گام اساسی در تحلیل‌های باقی مانده وزن‌دار و Ritz، فرض یک جواب به صورت زیر می‌باشد:

$$\bar{\phi} = \sum_{i=1}^n a_i f_i \quad (۳.۱۲)$$

که در آن توابع آزمون مستقل خطی و a_i ضرایبی هستند که با حل مسأله تعیین می‌شوند. در ابتدا روشهای باقی مانده وزن‌دار را در نظر می‌گیریم. این تکنیک‌ها مستقیماً روی روابط (۳.۸) و (۳.۹) عمل می‌کنند. با استفاده از این روشها، توابع f_i در (۳.۱۲) را به گونه‌ای انتخاب می‌کنیم که تمام شرایط مرزی موجود در (۳.۹) را تأمین نمایند و سپس باقی مانده را

محاسبه می‌کنیم:

$$R = r - L_{2m} \left[\sum_{i=1}^n a_i f_i \right] \quad (۳.۱۳)$$

برای جواب کامل، مشخص است که این باقی مانده مساوی صفر می‌باشد. یک تقریب مطلوب به جواب کامل می‌تواند به طور ضمنی دلالت بر این نکته کند که R در تمام نقاط میدان حل کوچک است. تفاوت روشهای متنوع باقی مانده وزن دار در معیارهایی نهفته است که آن روشها برای محاسبه a_i به کار می‌برند، به گونه‌ای که R کوچک شود. در تمامی این تکنیکها a_i را به گونه‌ای تعیین می‌کنیم که موجب از بین رفتن یک متوسط وزن دار از R شود. روش Galerkin. در این تکنیک، پارامترهای a_i از n معادله زیر تعیین می‌شوند:

$$\int_D f_i R \, dD = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (۳.۱۴)$$

که در آن D میدان جواب است.

روش کمترین مربعات. در این تکنیک، انتگرال مربع باقی مانده نسبت به پارامترهای a_i مینیمم سازی می‌شود،

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \int_D R^2 \, dD = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (۳.۱۵)$$

با جایگزینی (۳.۱۳)، n معادله همزمان زیر برحسب پارامترهای a_i به دست می‌آیند:

$$\int_D R L_{2m} [f_i] \, dD = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (۳.۱۶)$$

روش هم مکان. در این روش، باقی مانده R در n نقطه متمایز در میدان حل مساوی صفر داده می‌شود تا n معادله همزمان برحسب پارامترهای a_i به دست می‌آیند. مکان n نقطه می‌تواند تا حدودی اختیاری بوده و یک مدل یکنواخت ممکن است مناسب باشد، ولی معمولاً تحلیل گر باید از قضاوت خود در استفاده از مکانهای مناسب استفاده نماید.

روش زیر میدان. میدان کامل حل به n زیر میدان تقسیم می‌شود و انتگرال باقی مانده در (۳.۱۳) روی هر زیر میدان مساوی صفر قرار داده می‌شود تا n معادله برحسب پارامترهای a_i ایجاد شود.

گام مهم در استفاده از روش باقی مانده وزن دار، حل معادلات همزمان برای یافتن پارامترهای a_i می‌باشد. یادآوری می‌کنیم که از آنجا که L_{2m} یک عملگر خطی است، در تمامی روشهای مذکور، یک مجموعه خطی از معادلات برحسب پارامترهای a_i ایجاد می‌شود. در روش Galerkin، اگر عملگر L_{2m} متقارن (و نیز مثبت معین) باشد، در این صورت ماتریس ضریب نیز متقارن (و نیز مثبت معین) است. در روش کمترین مربعات، صرف نظر از خواص عملگر L_{2m} ، همواره یک ماتریس ضریب متقارن ایجاد می‌شود. ولی در روشهای هم مکان و

زیر میدان، امکان دارد که ماتریسهای ضریب غیرمتقارن ایجاد گردند. بنابراین در تحلیل عملی، معمولاً روشهای Galerkin و کمترین مربعات رجحان دارند.

در استفاده از روشهای باقی‌مانده وزن‌دار، جهت مینیمم‌سازی خطای مابین جواب آزمون در (۳.۱۲) و جواب واقعی مسئله، مستقیماً روی (۳.۸) و (۳.۹) عمل می‌کنیم. حال اگر روش تحلیل Ritz (منسوب به W. Ritz [A]) را در نظر بگیریم، تفاوت اساسی آن با روشهای باقی‌مانده وزن‌دار این است که در روش Ritz روی تابع متناظر با مسئله (۳.۸) و (۳.۹) عمل می‌کنیم. فرض کنید Π تابع مسئله وردشی C^{m-1} است که هم‌ارز با فرمول‌بندی دیفرانسیلی داده شده در (۳.۸) و (۳.۹) می‌باشد. در روش Ritz توابع آزمون $\bar{\phi}$ داده شده در (۳.۱۲) را در Π جایگزین می‌کنیم و با استفاده از شرط مانا بودن Π و $\delta \Pi = 0$ [ر.ک. به: (۳.۱)] n معادله همزمان برحسب پارامترهای a_i را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.17)$$

نکته مهم دیگر انتخاب توابع آزمون f_i در (۳.۱۲) است. در تحلیل Ritz ضرورت دارد که این توابع تنها در شرایط مرزی اساسی و نه شرایط مرزی طبیعی ارضا شوند. دلیل این شرط ساده در توابع آزمون این است که شرایط مرزی طبیعی به طور ضمنی در تابع Π منظور شده‌اند. فرض کنید که عملگر متناظر با مسئله وردشی، متقارن و مثبت معین باشد. در این حالت، اکسترموم واقعی Π ، مینیمم مقدار خود را دارا می‌باشد و با استفاده از (۳.۱۷)، نقض شرایط تعادل داخلی و نقض شرایط مرزی طبیعی را (به عبارتی) مینیمم‌سازی می‌کنیم (ر.ک. به: بخش ۴.۳). بنابراین برای همگرایی در یک تحلیل Ritz، ضروری است که توابع آزمون تنها شرایط مرزی اساسی را تأمین نمایند و این واقعیتی است که انتظار آن می‌رفت، زیرا می‌دانیم که جواب کامل نیز شرایط مرزی طبیعی را تأمین می‌کند. واقعیت امر این است که اگر چند تابع آزمون را فرض کنیم، می‌توان انتظار داشت که اگر این توابع، شرایط مرزی طبیعی را نیز تأمین کنند، در این صورت در بسیاری حالات، جواب دقیق‌تر حاصل خواهد شد. انتخاب چنین توابعی می‌تواند بسیار دشوار باشد و غالباً مؤثرترین روش این است که از تعداد زیادی از توابع که تنها شرایط مرزی اساسی را تأمین می‌کنند استفاده نمود. استفاده از روش Ritz را در مثالهای زیر نشان خواهیم داد.

مثال ۳.۲۲: یک میله ساده را که در یک انتهای خود گیردار بوده ($x = 0$) و تحت اثر یک نیروی متمرکز در انتهای دیگر ($x = 180$) می‌باشد و در شکل ۳.۲۲ E نشان داده شده است در نظر بگیرید. با استفاده از نمادگذاری داده شده در شکل، پتانسیل کلی سازه عبارت است از:

$$\Pi = \int_0^{180} \frac{1}{2} EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - 100u|_{x=180} \quad (\text{الف})$$

و شرط مرزی اساسی $u|_{x=0} = 0$ می باشد.

۱. توزیع های تغییر مکان و تنش کامل را در میله محاسبه کنید.

۲. توزیع تغییر مکان و تنش را با استفاده از روش Ritz و با فرض های زیر برای تغییر مکان

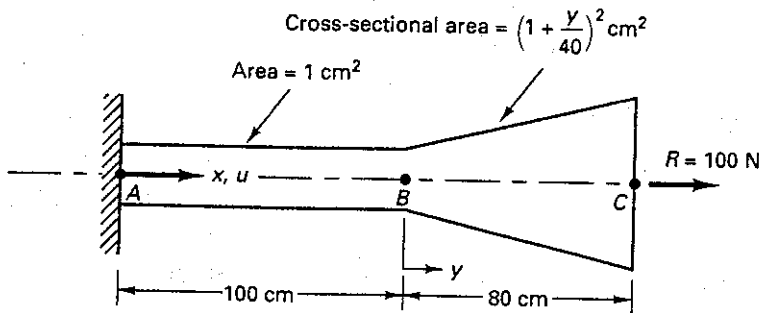
محاسبه نمایید:

$$u = a_1 x + a_2 x^2 \quad (ب)$$

$$u = \frac{x u_B}{100}; \quad 0 \leq x \leq 100$$

$$u = \left(1 - \frac{x - 100}{80}\right) u_B + \left(\frac{x - 100}{80}\right) u_C; \quad 100 \leq x \leq 180 \quad (پ)$$

که در آنها u_B و u_C تغییر مکانهای نقاط B و C می باشند.



شکل ۳.۲۲ میله تحت اثر یک نیروی انتهایی متمرکز

حل:

برای محاسبه تغییر مکانهای کامل در سازه، از شرط مانا بودن Π استفاده می کنیم تا معادلات دیفرانسیل حاکم و شرط مرزی طبیعی ایجاد شوند. در این صورت داریم:

$$\delta \Pi = \int_0^{180} \left(EA \frac{du}{dx} \right) \delta \left(\frac{du}{dx} \right) dx - 100 \delta u|_{x=180} \quad (ت)$$

با قرار دادن $\delta \Pi = 0$ و استفاده از انتگرال گیری جزء به جزء روابط زیر را به دست می آوریم (ر.ک. به: مثال ۳.۱۹):

$$\frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) = 0 \quad (ث)$$

$$EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=180} = 100 \quad (\text{ج})$$

حل (ث) با اعمال شرط مرزی طبیعی (ج) و شرط مرزی اساسی $u|_{x=0} = 0$ نتایج زیر را به دست می‌دهد:

$$u = \frac{100}{E}x; \quad 0 \leq x \leq 100$$

$$u = \frac{10000}{E} + \frac{4000}{E} - \frac{4000}{E \left(1 + \frac{x-100}{40}\right)}; \quad 100 \leq x \leq 180$$

بنابراین تنش‌های کامل در میله عبارتند از:

$$\sigma = 100; \quad 0 \leq x \leq 100$$

$$\sigma = \frac{100}{\left(1 + \frac{x-100}{40}\right)^2}; \quad 100 \leq x \leq 180$$

حال برای انجام تحلیل‌های Ritz، مشاهده می‌کنیم که فرض‌های تغییر مکان در (ب) و (پ) شرط مرزی اساسی را تأمین می‌نمایند ولی شرط مرزی طبیعی را تأمین نمی‌کنند. با جایگذاری (ب) در (الف) رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\Pi = \frac{E}{2} \int_0^{100} (a_1 + 2a_2x)^2 dx + \frac{E}{2} \int_{100}^{180} \left(1 + \frac{x-100}{40}\right)^2 (a_1 + 2a_2x)^2 dx - 100u|_{x=180}$$

با استفاده از $\delta \Pi = 0$ ، معادلات زیر را بر حسب a_1 و a_2 به دست می‌آوریم:

$$E \begin{bmatrix} 0.4467 & 115.6 \\ 115.6 & 34075.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 3240 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

$$a_1 = \frac{129}{E}; \quad a_2 = -\frac{0.341}{E}$$

بنابراین تحلیل Ritz یک جواب تقریبی را نتیجه می‌دهد:

$$u = \frac{129}{E}x - \frac{0.341}{E}x^2 \quad (\text{ح})$$

$$\sigma = 129 - 0.682x; \quad 0 \leq x \leq 180 \quad (\text{خ})$$

حال اگر از توابع Ritz ارائه شده در (پ) استفاده کنیم، در این صورت داریم:

$$\Pi = \frac{E}{2} \int_0^{100} \left(\frac{1}{100}u_B\right)^2 dx + \frac{E}{2} \int_{100}^{180} \left(1 + \frac{x-100}{40}\right)^2 \left(-\frac{1}{80}u_B + \frac{1}{80}u_C\right)^2 dx - 100u_C$$

مجددأ با استفاده از $\delta\Pi = 0$ رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{E}{240} \begin{bmatrix} 15.4 & -13 \\ -13 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_B \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix} \quad (د)$$

بنابراین داریم:

$$u_B = \frac{10,000}{E}; \quad u_C = \frac{11,846.2}{E}$$

$$\sigma = 100; \quad 0 \leq x \leq 100$$

$$\sigma = \frac{1846.2}{80} = 23.08; \quad 100 \leq x \leq 180$$

در بخش چهارم خواهیم دید (ر.ک. به مثال ۴.۵) که تحلیل Ritz را می‌توان یک تحلیل عناصر محدود در نظر گرفت.

مثال ۳.۲۳: دالِ مثال ۳.۱۶ را در نظر بگیرید. فرض کنید که:

$$\theta(t) = \theta_1(t) + \theta_2(t)x + \theta_3(t)x^2 \quad (\text{الف})$$

که در آن $\theta_1(t)$, $\theta_2(t)$ و $\theta_3(t)$ پارامترهای تعیین نشده می‌باشند. تحلیل Ritz را برای ایجاد معادلات تعادل انتقال حرارتی حاکم استفاده نمایید.

حل:

تابع حاکم بر توزیع دما در دال عبارت است از (ر.ک. به: مثال ۳.۱۸):

$$\Pi = \int_0^L \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx - \int_0^L \theta q^B dx - \theta|_{x=0} q_0 \quad (\text{ب})$$

و شرط مرزی اساسی نیز به صورت زیر می‌باشد:

$$\theta|_{x=L} = \theta_l$$

با جایگذاری فرض دمای (الف) در (ب)، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\Pi = \int_0^L \frac{1}{2} k ((\theta_2)^2 + 4\theta_2\theta_3x + 4(\theta_3)^2x^2) dx - \int_0^L (\theta_1 + \theta_2x + \theta_3x^2) q^B dx - \theta_1 q_0$$

با استفاده از شرط مانا بودن Π ، $\delta\Pi = 0$ ، رابطه زیر را به کار می‌بریم:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_2} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_3} = 0$$

و در نتیجه رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & L^2 \\ 0 & L^2 & \frac{4}{3}L^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_0^L q^B dx + q_0 \\ \int_0^L x q^B dx \\ \int_0^L x^2 q^B dx \end{bmatrix} \quad (\text{پ})$$

در این تحلیل q_0 با زمان تغییر می‌کند، از اینرو دما نیز با زمان تغییر می‌نماید، و اثرات ظرفیت حرارتی می‌تواند حائز اهمیت باشد. با استفاده از رابطه زیر:

$$q^B = -\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} \quad (\text{ت})$$

از آنجا که گرمای دیگری تولید نمی‌شود، با جایگذاری θ از (الف) در (ت) و سپس جایگذاری در (پ)، معادلات زیر را به عنوان معادلات تعادل به دست می‌آوریم:

$$k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & L^2 \\ 0 & L^2 & \frac{4}{3}L^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} + \rho c \begin{bmatrix} L & \frac{1}{2}L^2 & \frac{1}{3}L^3 \\ \frac{1}{2}L^2 & \frac{1}{3}L^3 & \frac{1}{4}L^4 \\ \frac{1}{3}L^3 & \frac{1}{4}L^4 & \frac{1}{5}L^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ث})$$

اینک معادلات تعادل نهایی با اعمال شرط $\theta|_{x=L} = \theta_i$ در معادلات (ث) به دست می‌آیند، به عبارت دیگر:

$$\theta_1(t) + \theta_2(t)L + \theta_3(t)L^2 = \theta_i$$

که می‌تواند با بیان θ_1 در (ث) بر حسب θ_2 و θ_3 حاصل گردد.

مثال ۳.۲۴: پاسخ کمانش ایستایی ستون مثال ۳.۲۰ را در نظر بگیرید. فرض کنید که:

$$w = a_1 x^2 + a_2 x^3 \quad (\text{الف})$$

و از روش Ritz برای فرمول‌بندی معادلات که از آنها می‌توان یک بار تقریبی کمانش را به دست آورد، استفاده کنید.
حل:

تابع حاکم مسأله در مثال ۳.۲۰ به صورت زیر داده شده است:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx - \frac{P}{2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{2} k(w|_{x=L})^2 \quad (\text{ب})$$

یادآوری می‌کنیم که تابع آزمون (الف) برای w ، پیش از این شرایط مرزی اساسی را ارضا می‌نماید (تغییر مکان و شیب صفر در انتهای گیردار). با جایگذاری w در (ب)، رابطه زیر

حاصل می‌شود:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI(2a_1 + 6a_2x)^2 dx - \frac{P}{2} \int_0^L (2a_1x + 3a_2x^2)^2 dx + \frac{1}{2} k(a_1L^2 + a_2L^3)^2$$

با استفاده از شرط مانا $\delta\Pi = 0$ ، به عبارت دیگر:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0; \quad \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0$$

رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\left\{ 2EI \begin{bmatrix} 2L & 3L^2 \\ 3L^2 & 6L^3 \end{bmatrix} + kL^4 \begin{bmatrix} 1 & L \\ L & L^2 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} - PL^3 \begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{3L}{2} \\ \frac{3L}{2} & \frac{9L^2}{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

حل این ویژه مسأله، دو مقدار برای P را نتیجه می‌دهد که به ازای آنها w در (الف) غیر

صفر است. کوچکترین مقدار P جواب تقریبی کمترین بار کمانش سازه را نشان می‌دهد.

در عمل استفاده از روشهای باقی مانده وزن دار ارائه شده در (۳.۱۴) الی (۳.۱۶) دشوار

است زیرا توابع آزمون باید $2m$ بار مشتق پذیر باشند و تمامی شرایط مرزی - اساسی و طبیعی - را ارضا نمایند. از طرف دیگر، در استفاده از روش Ritz که در روی تابع متناظر با مسأله مورد نظر عمل می‌کند، تنها ضروری است که توابع آزمون m بار مشتق پذیر باشند و نیازی به ارضای شرایط مرزی طبیعی نمی‌باشد. ملاحظات مذکور برای تحلیل عملی بسیار مهم‌اند و از اینرو روش Galerkin در عمل به صورت متفاوتی مورد استفاده قرار می‌گیرد، به عنوان مثال، به صورتی که امکان استفاده از توابع مشابه به کار رفته در روش Ritz میسر باشد. در تحلیل مبتنی بر تغییر مکان جامدات و سازه‌ها، این فرم روش Galerkin به عنوان اصل تغییر مکانهای مجازی شناخته می‌شود. اگر از نشانگر وردشی مناسب Π استفاده شود، در این صورت معادلات حاصل از روش Ritz با معادلات به دست آمده از روش Galerkin یکسان خواهند بود.

در بخش آینده به تفصیل درباره موضوع‌های مزبور و جزئیات آنها بحث خواهیم نمود تا

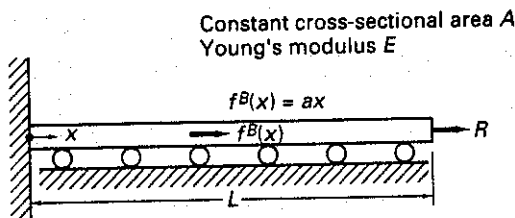
با فهم بیشتری، آمادگی ورود به مبحث روش‌های عناصر محدود فراهم شود.

۳.۳.۴ یک بازنگری: فرمول بندی دیفرانسیلی Galerkin، اصل تغییر مکانهای مجازی، و مقدمه‌ای بر روش حل عناصر محدود

در بخشهای پیشین، برخی فرمول‌بندی‌های کلاسیک دیفرانسیلی و وردشی، برخی روشهای کلاسیک باقی مانده وزن دار و روش Ritz را مطالعه نمودیم. اینک می‌خواهیم درک خود را از

این روش‌های تحلیل - از طریق خلاصه نمودن و جمع‌بندی برخی مفاهیم مهم - ارتقا دهیم و به طور اختصار یک چارچوب ریاضی را برای روش‌های عناصر محدود ارائه نماییم. از روش‌های مذکور در فصل چهارم استفاده بیشتری خواهیم کرد و آنها را بسط خواهیم داد. حال می‌خواهیم هدف مذکور را با تمرکز در روی تحلیل یک مسأله ساده دنبال نماییم.

میله‌ای یک بعدی را که در شکل ۳.۲ نشان داده شده است در نظر می‌گیریم. میله تحت اثر یک بار گسترده $f^B(x)$ و یک بار متمرکز R در انتهای سمت راست می‌باشد.



شکل ۳.۲ میله یکنواخت که تحت اثر نیروی جسمی f^B (نیرو در واحد طول) و بار متمرکز انتهایی R قرار دارد

همان‌گونه که در بخش ۳.۳.۱ بحث گردید، فرمول‌بندی دیفرانسیلی میله، معادلات تعادل را نتیجه می‌دهد:

$$\left\{ \begin{array}{ll} EA \frac{d^2 u}{dx^2} + f^B = 0 & \text{in the bar} \quad (3.18) \\ u|_{x=0} = 0 & (3.19) \\ EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = R & (3.20) \end{array} \right.$$

فرمول‌بندی
دیفرانسیلی

از آنجا که $f^B = ax$ ، جواب را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$u(x) = \frac{-(ax^3/6) + (R + \frac{1}{2}aL^2)x}{EA} \quad (3.21)$$

یادآوری می‌کنیم که (۳.۱۸) یک رابطه تعادل در هر نقطه x در میله است، (۳.۱۹) شرایط مرزی اساسی (یا هندسی) بوده (ر.ک. به: بخش ۳.۲.۲) و (۳.۲۰) شرایط مرزی طبیعی (یا نیرویی) می‌باشد. البته جواب تحلیلی کامل (۳.۲۱)، در هر سه معادله (۳.۱۸) الی (۳.۲۰) صدق می‌کند. همچنین باید دانست که جواب $u(x)$ پیوسته می‌باشد و همان‌گونه که (۳.۱۸) ایجاب می‌کند تابعی است که دوبار مشتق‌پذیر است. در حقیقت می‌توان گفت که جوابهای معادله (۳.۱۸) که به ازای هر بارگذاری پیوسته f^B در (۳.۱۹) و (۳.۲۰) صدق می‌کنند در یک فضای

پیوسته قرار دارند و توابعی دوبار مشتق‌پذیر می‌باشند که (۳.۱۹) و (۳.۲۰) را ارضا می‌نمایند. یک روش دیگر برای حل مسأله مورد نظر، استفاده از فرمول‌بندی وردشی می‌باشد (ر.ک. به: بخش ۳.۲.۲).

فرمول‌بندی وردشی

$$\left\{ \begin{array}{l} \Pi = \int_0^L \frac{1}{2} EA \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L u f^B dx - Ru|_{x=L} \quad (3.22) \\ \delta \Pi = 0 \quad (3.23) \\ \text{with} \quad u|_{x=0} = 0 \quad (3.24) \\ \delta u|_{x=0} = 0 \quad (3.25) \end{array} \right.$$

که در آنها منظور از δ "وردش در" می‌باشد و δu یک وردش اختیاری در u می‌باشد، با این شرط که $\delta u|_{x=0} = 0$. $\delta u(x)$ را می‌توان به عنوان هر نوع تابع پیوسته در نظر گرفت که در شرایط مرزی (۳.۲۵) صدق می‌کند^(۵).

یادآوری می‌کنیم که (۳.۲۲) الی (۳.۲۵) کاملاً هم‌ارز با (۳.۱۸) الی (۳.۲۰) می‌باشند (ر.ک. به: بخش ۳.۳.۲). به عبارت دیگر، با استفاده از (۳.۲۳) و انجام انتگرال‌گیری جزء به جزء و نیز شرط مرزی (۳.۲۵)، روابط (۳.۱۸) و (۳.۲۰) حاصل می‌گردند. بنابراین جواب (۳.۲۲) الی (۳.۲۵) نیز، تابع (۳.۲۱) می‌باشد.

فرمول‌بندی وردشی را می‌توان به صورت زیر استخراج نمود.
از آنجا که (۳.۱۸) برای تمام نقاط میله صدق می‌کند، در این صورت داریم:

$$\left(EA \frac{d^2 u}{dx^2} + f^B \right) \delta u = 0 \quad (3.26)$$

که در آن $\delta u(x)$ یک وردش پیوسته در روی u (یا یک تابع پیوسته اختیاری) با شرط $\delta u|_{x=0} = 0$ می‌باشد. از اینرو داریم:

$$\int_0^L \left(EA \frac{d^2 u}{dx^2} + f^B \right) \delta u dx = 0 \quad (3.27)$$

با انجام انتگرال‌گیری جزء به جزء، رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\int_0^L \frac{d\delta u}{dx} EA \frac{du}{dx} dx = \int_0^L f^B \delta u dx + EA \frac{du}{dx} \delta u \Big|_0^L \quad (3.28)$$

از اینرو با جایگذاری (۳.۲۰) و (۳.۲۵)، به روابط زیر می‌رسیم:

(۵) در متون و کتب ریاضی، به فرمول‌بندی‌های دیفرانسیلی و وردشی، به ترتیب، فرمهای قوی و ضعیف اطلاق می‌شود. همچنین فرمول‌بندی‌های وردشی به عنوان فرمول‌بندی‌های تعمیم یافته نیز شناخته می‌شوند.

اصل تغییر مکان‌های مجازی

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^L \frac{d\delta u}{dx} EA \frac{du}{dx} dx = \int_0^L f^B \delta u dx + R \delta u|_{x=L} \quad (3.29) \\ \text{with } u|_{x=0} = 0; \quad \delta u|_{x=0} = 0 \quad (3.30) \end{array} \right.$$

البته (۳.۲۹)، نتیجه زیر را به دست می‌دهد:

$$\delta \left\{ \int_0^L \left[\frac{EA}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - f^B u \right] dx - Ru|_{x=L} \right\} = 0 \quad (3.31)$$

که همراه با رابطه (۳.۳۰) فرمول‌بندی وردشی ارائه شده در (۳.۲۲) الی (۳.۲۵) را نتیجه می‌دهد.

رابطه (۳.۲۹) همراه با شرط (۳.۳۰) به عنوان اصل تغییر مکانهای مجازی (یا اصل کار مجازی) معروف است که در آن $\delta u(x)$ تغییر مکان مجازی است. در مورد اصل مذکور مفصلاً در بخش ۴.۲ بحث خواهیم کرد؛ یادآوری می‌کنیم که استخراج روابط (۳.۲۶) الی (۳.۳۰) حالت خاصی از مثال ۴.۲ می‌باشد.

اذعان به این نکته که سه فرمول‌بندی مزبور برای تحلیل یک مسئله مورد نظر کاملاً هم‌ارزند، حائز اهمیت می‌باشد، به عبارت دیگر، جواب (۳.۲۱)، جواب (منحصر به فرد)^(۶) $u(x)$ فرمول‌بندی‌های دیفرانسیلی، وردشی و اصل تغییر مکانهای مجازی می‌باشد. یادآوری می‌کنیم که فرمول‌بندی وردشی و اصل کار مجازی تنها شامل مشتقات مرتبه اول توابع u و δu می‌باشند. بنابراین فضای توابعی که ما برای یک جواب آن را جستجو می‌کنیم، به طور آشکار بزرگتر از فضای توابعی است که برای جواب (۳.۱۸) مورد استفاده قرار می‌گیرد [مفهوم فضا را به طور دقیق در (۳.۳۵) تعریف خواهیم کرد] و باید این سؤال مطرح شود که مفهوم و میزان اهمیت اینکه فضای بزرگتری از توابع را، در موقع حل مسئله شکل ۳.۲ از طریق اصل تغییر مکان‌های مجازی، باید استفاده نمود چیست؟

روشن است که فضای توابعی که در اصل تغییر مکانهای مجازی مورد استفاده قرار می‌گیرد، شامل فضای توابعی می‌باشد که در فرمول‌بندی دیفرانسیلی به کار می‌رود، از اینرو کلیه مسائل تحلیلی را که می‌توان با استفاده از فرمول‌بندی دیفرانسیلی (۳.۱۸) الی (۳.۲۰) حل نمود، همچنین می‌توان به طور کامل با استفاده از اصل تغییر مکانهای مجازی نیز حل کرد. در تحلیل میله (و تحلیل سازه‌های عمومی میله‌ای و تیری)، شرایط اضافی که به‌ازای آنها از اصل کار مجازی می‌توان مستقیماً برای یافتن جواب استفاده نمود، نقاطی از میله می‌باشند که بارهای

(۶) منحصر به فرد بودن $u(x)$ در این حالت، به طور وضوح از فرایند ساده انتگرال‌گیری برای یافتن (۳.۲۱) نتیجه می‌شود، ولی اثبات عمومی اینکه جواب یک مسئله ارتجاعی خطی همواره منحصر به فرد می‌باشد در (۴.۸۰) الی (۴.۸۲)، ارائه شده است.

متمرکز در آنها اعمال شده‌اند و یا ناپیوستگی‌هایی می‌باشند که در خواص مصالح و سطح مقطع وجود دارند. در این حالات، مشتق اول $u(x)$ ناپیوسته است و از اینرو فرمول‌بندی دیفرانسیلی باید به گونه‌ای بسط یابد که جوابگوی حالات مذکور باشد (در اساس هر قسمتی از میله که بار متمرکز به آن اعمال نمی‌گردد و هیچ‌گونه ناپیوستگی در خواص مصالح و سطح مقطع وجود ندارد باید به طور جداگانه مورد بررسی قرار بگیرد و سپس با در نظر گرفتن شرایط مرزی این قسمت از میله به قسمت دیگر اتصال داده شود. به عنوان مثال ر.ک. به: (S. H. Crandall, N. C. Dahl and T. J. Lardner [A]). بدین ترتیب در حالات مذکور فرمول‌بندی وردشی و اصل تغییر مکانهای مجازی تا حدودی مستقیم‌تر و تواناتر برای حل مسائل می‌باشند.

در مطالعه خود برای حالات عمومی تنش دو و سه بعدی، تنها مدل‌های ریاضی انرژی کرنشی محدود را در نظر خواهیم گرفت (منظور این است که به عنوان مثال، بارهای متمرکز مذکور، به گونه‌ای که در بخش ۱.۲ (شکل ۱.۴) اشاره شده است و بعداً نیز در بخش ۴.۳۴ مورد بحث قرار خواهد گرفت، باید اعمال شوند) و در این صورت فرمول‌بندی‌های دیفرانسیلی و اصل کار مجازی نیز کاملاً هم‌ارز بوده و جواب یکسانی را به دست می‌دهند (ر.ک. به: فصل چهارم).

ملاحظات مذکور به یک روش عمومی توانا برای فرمول‌بندی حل عددی مسأله شکل ۳.۲ اشاره دارند. (۳.۲۷) را در نظر بگیرید که در آن حالا δu را با تابع آزمایشی v با اعمال شرایط $u = 0$ و $v = 0$ در $x = 0$ جایگزین می‌کنیم:

$$\int_0^L \left(EA \frac{d^2 u}{dx^2} + f^B \right) v \, dx = 0 \quad (3.32)$$

با انجام انتگرال‌گیری جزء به جزء و استفاده از (۳.۲۰) رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\int_0^L \frac{dv}{dx} EA \frac{du}{dx} = \int_0^L f^B v \, dx + Rv|_{x=L} \quad (3.33)$$

رابطه مذکور کاربردی از روش Galerkin با اصل تغییر مکان‌های مجازی است و بیان می‌کند که "برای اینکه $u(x)$ جواب مسأله باشد، به ازای توابع دلخواه آزمایشی و یا توابع تغییر مکان مجازی $v(x)$ که پیوسته می‌باشند و شرط $v = 0$ در $x = 0$ را تأمین می‌کنند، سمت چپ (۳.۳۳) (کار مجازی داخلی) باید مساوی سمت راست (کار مجازی خارجی) باشد."

در بخش چهارم، فرمول‌بندی (۳.۳۳) را به صورت زیر خواهیم نوشت:

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V \quad (7) \quad \text{پیدا کنید } u \in V \text{ به گونه‌ای که:}$$

که در آن فضای V به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V = \left\{ v \mid v \in L^2(L), \frac{dv}{dx} \in L^2(L), v|_{x=0} = 0 \right\} \quad (3.35)$$

و $L^2(L)$ فضای توابع قابل انتگرال توان دوم در روی طول میله است، $0 \leq x \leq L$:

$$L^2(L) = \left\{ w \mid w \text{ is defined over } 0 \leq x \leq L \text{ and } \int_0^L (w)^2 dx = \|w\|_{L^2}^2 < \infty \right\} \quad (3.36)$$

با استفاده از (۳.۳۴) و (۳.۳۳) داریم:

$$a(u, v) = \int_0^L \frac{du}{dx} EA \frac{dv}{dx} dx \quad (3.37)$$

و

$$(f, v) = \int_0^L f^B v dx + Rv|_{x=L} \quad (3.38)$$

که در آنها $a(u, v)$ فرم دو خطی و (f, v) فرم خطی مسأله می‌باشند.

تعریف فضای توابع V در (۳.۳۵) بیان می‌دارد که هر عنصر v در V ، در $x = 0$ مساوی

صفر می‌باشد و:

$$\int_0^L v^2 dx < \infty; \quad \int_0^L \left[\frac{dv}{dx} \right]^2 dx < \infty$$

بنابراین، هر عنصر v در V متناظر با یک انرژی کرنشی محدود است. یادآوری می‌کنیم که عناصر موجود در V ، کلیه توابعی را دربرمی‌گیرند که به عنوان جواب فرمول‌بندی دیفرانسیلی (۳.۱۸) الی (۳.۲۰) با هر f^B پیوسته مطرح‌اند و نیز متناظر با جوابهای ممکن با کرنش‌های ناپیوسته می‌باشند. [به علت بارهای متمرکز، در حالت تحلیل یک‌بعدی و یا ناپیوستگی‌ها در رفتار مصالح یا سطح مقطع]. این نکته، بر عمومیت فرمول‌بندی مسأله که در (۳.۳۴) و (۳.۳۵) داده شده است، تأکید می‌کند.

برای راه‌حل Galerkin (یا عناصر محدود)، فضای V_h مربوط به توابع آزمون v_h (یا

عناصر محدود) را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$V_h = \left\{ v_h \mid v_h \in L^2(L), \frac{dv_h}{dx} \in L^2(L), v_h|_{s_u} = 0 \right\} \quad (3.39)$$

که در آن s_u نشانگر مساحت سطحی است که در آن تغییر مکان‌های صفر از پیش اعمال می‌شوند. اندیس پایین h نشان می‌دهد که یک گسسته‌سازی عناصر محدود خاص در نظر گرفته شده است (و در حقیقت h اشاره به اندازه عناصر دارد؛ ر.ک. به: بخش ۴.۳). در این صورت فرمول‌بندی عناصر محدود مسأله عبارت است از:

$$\text{Find } u_h \in V_h \text{ such that } a(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (3.40)$$

مشخص است که رابطه (۳.۴۰)، بیانگر اصل تغییر مکان‌های مجازی است که با توابع موجود در V_h به کار می‌رود و نیز متناظر با مینیمم‌سازی انرژی پتانسیل کلی در فضای توابع آزمون است. بنابراین (۳.۴۰) متناظر با به کارگیری روش Ritz می‌باشد که در بخش ۳.۳.۳ توصیف شده است. در فصل چهارم مفصلاً در مورد فرمول‌بندی عناصر محدود، بحث خواهیم کرد.

یادآوری می‌کنیم که روش حل مشابهی را نیز می‌توان مستقیماً برای تحلیل هر مسأله‌ای که معادله (یا معادلات) دیفرانسیل آن مشخص است، به کار برد. روش حل به ترتیب زیر خواهد بود: وزن‌دار کردن معادله (یا معادلات) دیفرانسیل حاکم در میدانی با تابع (یا توابع) مناسب آزمایشی؛ انتگرال‌گیری معادلات حاصل با یک تبدیل با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء (و یا در حالت عمومی‌تر با استفاده از تصفیه دیورژانس؛ ر.ک. به: مثال ۴.۲)؛ و جایگذاری شرایط مرزی طبیعی، همان‌گونه که برای پیدا کردن (۳.۳۳) عمل کردیم.

بدین طریق "اصل تغییر مکان‌های مجازی" برای تحلیل عمومی جامدات و سازه‌ها (ر.ک. به: مثال ۴.۲)، "اصل دماهای مجازی" برای جریان حرارتی و تحلیل دمایی جامدات (ر.ک. به: مثال ۷.۱) و "اصل سرعت‌های مجازی" برای تحلیل عمومی جریان سیالات (ر.ک. به: مثال ۷.۴.۲) به دست می‌آیند.

برای نشان دادن نحوه استفاده از نمادگذاری مزبور مثالهای زیر را در نظر می‌گیریم:

مثال ۳.۲۵: تحلیل مسأله مثال ۳.۲۲ را در نظر بگیرید، فرمول‌بندی مسأله را به صورت (۳.۴۰) بنویسید و در صورتی که فرض‌های تغییر مکان (ب) و (پ) به کار روند، توابع پایه عناصر محدود مورد استفاده را مشخص نمایید.

حل:

در این مثال فرم دو خطی $a(\cdot, \cdot)$ عبارت است از:

$$a(u_h, v_h) = \int_0^{180} \frac{du_h}{dx} EA \frac{dv_h}{dx} dx$$

و فرم خطی نیز عبارت است از:

$$(f, v_h) = 100v_h|_{x=180}$$

با فرض تغییر مکان (ب)، از تابع زیر استفاده می‌کنیم:

$$u_h = a_1x + a_2x^2$$

در این جا، V_h یک فضای دوبعدی است و دو تابع پایه عبارتند از:

$$v_h^{(1)} = x \quad \text{and} \quad v_h^{(2)} = x^2$$

با فرض تغییر مکان (پ)، از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$u_h = \frac{x}{100} u_B; \quad 0 \leq x \leq 100$$

$$u_h = \left(1 - \frac{x - 100}{80}\right) u_B + \frac{(x - 100)}{80} u_C; \quad 100 \leq x \leq 180$$

و دو تابع پایه برای V_h عبارتند از:

$$v_h^{(1)} = \begin{cases} \frac{x}{100} & \text{for } 0 \leq x \leq 100 \\ 1 - \frac{x - 100}{80} & \text{for } 100 \leq x \leq 180 \end{cases}$$

$$v_h^{(2)} = \frac{x - 100}{80} \quad \text{for } 100 \leq x \leq 180$$

روشن است که تمامی این توابع، شرایط (۳.۳۹) را تأمین می‌نمایند. اگر از رابطه (۳.۴۰) استفاده نماییم، معادلات (ج) و (د) مربوط به مثال ۳.۲۲ ایجاد می‌شوند.

مثال ۳.۲۶: تحلیل مسأله مثال ۳.۲۳ را در نظر بگیرید. فرمول‌بندی مسأله را به صورت (۳.۴۰) بنویسید و در صورتی که فرض‌های داده شده در مثال بکار روند، توابع پایه عنصر را مشخص نمایید.

حل:

در این جا فرمول‌بندی مسأله عبارت است از:

$$\text{Find } \theta_h \in V_h \text{ such that } a(\theta_h, \psi_h) = (f, \psi_h) \quad \forall \psi_h \in V_h \quad (\text{الف})$$

که در آن داریم:

$$a(\theta_h, \psi_h) = \int_0^L \frac{d\psi_h}{dx} k \frac{d\theta_h}{dx} dx$$

$$(f, \psi_h) = \int_0^L \psi_h q^B dx + q_0 \psi_h|_{x=0}$$

در این جا θ_h و ψ_h متناظر با توزیع دما در دال می‌باشند. با فرض مورد نظر در مثال ۳.۲۳، برای V_h سه تابع پایه زیر را داریم:

$$\theta_h^{(1)} = 1; \quad \theta_h^{(2)} = x; \quad \theta_h^{(3)} = x^2$$

با استفاده از (الف)، معادلات حاکم داده شده در (پ) مثال (۳.۲۳) به دست می‌آیند. باید توجه داشت که در فرمول‌بندی مذکور، هنوز شرط مرزی اساسی را اعمال نکرده‌ایم (که بعداً همچون مثال ۳.۲۳ به دست خواهد آمد).

۳.۳.۵ روش دیفرانسیلی تفاضل محدود و روش انرژی تفاضل محدود

یک روش کلاسیک برای پیدا کردن حل عددی معادلات حاکم یک مدل ریاضی پیوسته، استفاده از تفاضلات محدود می‌باشد (به عنوان مثال مراجعه شود به [L. Collatz [A] و آشنایی با این روش حائز ارزش است، زیرا چنین معلوماتی فهم ما را از روش‌های عناصر محدود تقویت خواهد نمود. در روش حل تفاضل محدود، تقریبات تفاضل محدود جایگزین مشتقات می‌شوند، بدین طریق فرمول‌بندیهای دیفرانسیلی و وردشی مدل‌های ریاضی را می‌توان حل نمود.

به عنوان یک مثال، تحلیل میله یکنواخت شکل ۳.۲ را با معادله دیفرانسیلی حاکم زیر در نظر بگیرید (ر.ک. به: مثال ۳.۱۷ و بخش ۳.۳.۴):

$$u'' + \frac{f^B}{EA} = 0 \quad (3.41)$$

و شرایط مرزی عبارتند از:

$$u = 0 \quad \text{at } x = 0 \quad (3.42)$$

$$EA \frac{du}{dx} = R \quad \text{at } x = L \quad (3.43)$$

با استفاده از یک فاصله مساوی h بین نقاط تفاضل محدود می‌توانیم بنویسیم (ر.ک. به: شکل ۳.۳):

$$u'|_{i+1/2} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h}; \quad u'|_{i-1/2} = \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \quad (3.44)$$

و

$$u''|_i = \frac{u'|_{i+1/2} - u'|_{i-1/2}}{h} \quad (3.45)$$

بنابراین داریم:

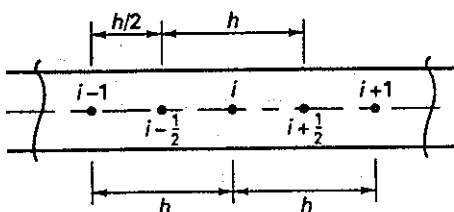
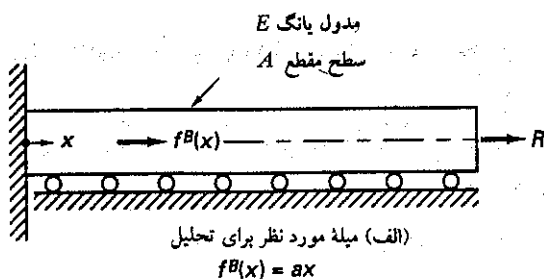
$$u''|_i = \frac{1}{h^2}(u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) \quad (3.46)$$

رابطه (۳.۴۶)، تقریب‌سازی تفاضل مرکزی نامیده می‌شود. اگر (۳.۴۶) را در (۳.۴۱) جایگزین کنیم، نتیجه زیر را به دست می‌آوریم:

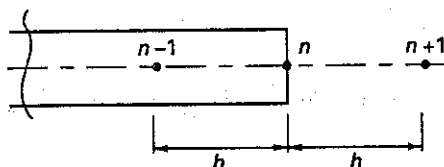
$$\frac{EA}{h}(-u_{i+1} + 2u_i - u_{i-1}) = f_i^B h \quad (3.47)$$

که در آن f_i^B بار در نقطه i و $f_i^B h$ را می‌توان به عنوان بار کلی وارده در آن نقطه تفاضل مرکزی

در نظر گرفت.



(ب) نقاط تفاضل محدود $i-1$ و i و $i+1$ (موقعیت‌های $i - \frac{1}{2}$ و $i + \frac{1}{2}$ نقاط تفاضل محدود نیستند)



(پ) نقطه تفاضل محدود پنداری $n+1$ در خارج از میله

شکل ۳.۳ تحلیل تفاضل محدود یک میله

حال فرض کنید که کلاً از $n+1$ نقطه تفاضل محدود در روی میله استفاده می‌کنیم، به طوری که نقطه 0 در انتهای گیردار و نقطه n در انتهای دیگر واقع باشند. در این صورت شرایط مرزی عبارتند از:

$$u_0 = 0 \quad (3.48)$$

$$EA \frac{u_{n+1} - u_{n-1}}{2h} = R \quad (3.49)$$

نقطه پنداری $n+1$ خارج از میله را [ر.ک. به: شکل (پ) ۳.۳] صرفاً برای اعمال شرط مرزی (۳.۴۳) در تحلیل وارد نموده‌ایم.

برای حل تفاضل محدود، رابطه (۳.۴۷) را در تمامی نقاط $i = 1, \dots, n$ اعمال کرده و از شرایط مرزی (۳.۴۸) و (۳.۴۹) برای پیدا کردن رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

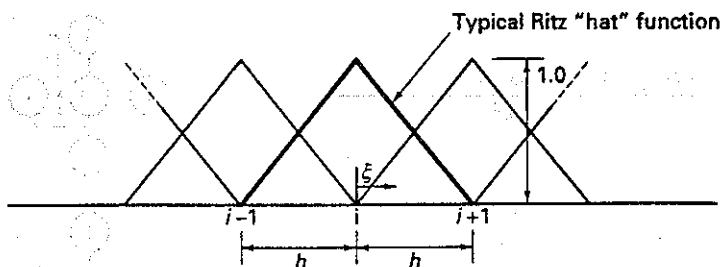
$$\frac{EA}{h} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & -1 & 2 & -1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ \vdots \\ R_{n-1} \\ R_n \end{bmatrix} \quad (3.50)$$

که در آن $R_i = f_i^B h$ و $R_n = f_n^B h/2 + R$ و $i = 1, \dots, n-1$ با معادلات (۳.۵۰) می‌کنیم که معادلات (۳.۵۰) با استفاده از یک سری متشکل از n عنصر فنری با سختی EA/h به دست آمده‌اند یکسان می‌باشند. بارها در گره‌ها که متناظر با $f_{(x)}^B$ می‌باشند، با استفاده از مقدار بار گسترده در گره i و ضرب آن مقدار در طول مؤثر (h) برای گره‌های داخلی و $h/2$ برای گره انتهایی) به دست خواهند آمد.

همچنین اگر از روش Ritz با فرمول بندی وردشی مدل ریاضی و توابع ویژه Ritz استفاده کنیم همان ماتریس ضریب به دست خواهد آمد. نشانگر وردشی عبارت است از (ر.ک. به: مثال ۳.۱۹):

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EA(u')^2 dx - \int_0^L u f^B dx - Ru|_{x=L} \quad (3.51)$$

و توابع ویژه Ritz در شکل ۳.۴ نشان داده شده‌اند. در حالی که در هر دو روش ماتریس ضریب مشابهی به دست می‌آید، ولی بردار بار، متفاوت می‌باشد مگر اینکه بارگذاری در طول مینله ثابت باشد.



$$u(\xi) = \begin{cases} \left(1 - \frac{\xi}{h}\right) u_i & \text{for } 0 \leq \xi \leq h \\ \left(1 + \frac{\xi}{h}\right) u_i & \text{for } -h \leq \xi \leq 0 \end{cases}$$

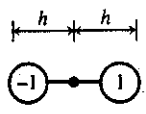
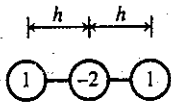
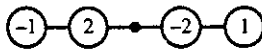

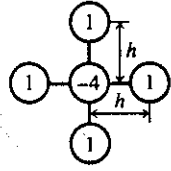
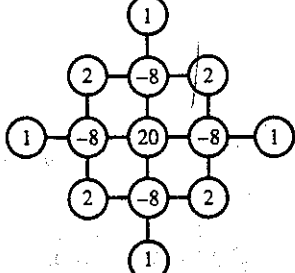
شکل ۳.۴ تابع نمونه Ritz یا تابع پایه Galerkin که در تحلیل مسئله مورد استفاده قرار گیرد.

البته اگر از روش Galerkin ارائه شده در بخش ۳.۳.۴ (یعنی اصل کاری مجازی) با توابع پایه نشان داده شده در شکل ۳.۴ استفاده شود، معادلات مشابه روش Ritz نیز به دست می‌آیند.

بحث پیشین دلالت بر این نکته دارد که روش تفاضل محدود را می‌توان برای ایجاد ماتریس‌های سختی مورد استفاده قرار داد و در برخی حالات، معادلات حاصل در تحلیل Ritz و راه‌حل تفاضل محدود، یکسان و یا تقریباً یکسان می‌باشند.

برخی تقریبات تفاضل محدود که به طور گسترده‌ای به کار برده می‌شوند و استنسپل‌ها یا مولکولهای تفاضل محدود نیز نامیده می‌شوند در جدول ۳.۱ به اختصار ارائه شده‌اند.

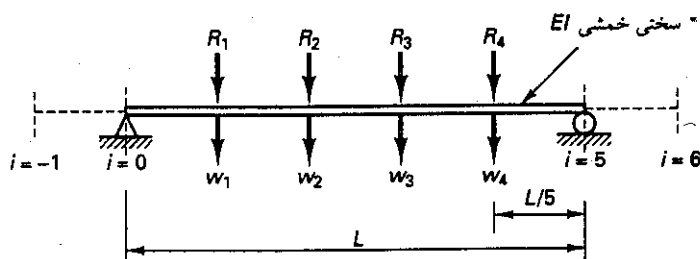
جدول ۳.۱: تقریبات تفاضل محدود برای مشتق‌گیریهای مختلف

مشتق‌گیری	تقریب تفاضل محدود	مولکول‌ها
$\left. \frac{dw}{dx} \right _i$	$\frac{w_{i+1} - w_{i-1}}{2h}$	
$\left. \frac{d^2w}{dx^2} \right _i$	$\frac{w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}}{h^2}$	
$\left. \frac{d^3w}{dx^3} \right _i$	$\frac{w_{i+2} - 2w_{i+1} + 2w_{i-1} - w_{i-2}}{2h^3}$	
$\left. \frac{d^4w}{dx^4} \right _i$	$\frac{w_{i+2} - 4w_{i+1} + 6w_i - 4w_{i-1} + w_{i-2}}{h^4}$	
$\nabla^2 w _{i,j}$	$\frac{-4w_{i,j} + w_{i+1,j} + w_{i,j+1} + w_{i-1,j} + w_{i,j-1}}{h^2}$	
$\nabla^4 w _{i,j}$	$\frac{20w_{i,j} - 8(w_{i+1,j} + w_{i-1,j} + w_{i,j+1} + w_{i,j-1}) + w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1} + w_{i+1,j-1} + w_{i+2,j} + w_{i-2,j} + w_{i,j+2} + w_{i,j-2}}{h^4}$	

فاصله یکنواخت h خطا در هر حالت $O(h)^2$ می‌باشد. نقطه i یا (i, j) در نظر گرفته می‌شود؛ \pm نقاط در جهت x را نشان می‌دهد و \pm نقاط در جهت y را نمایش می‌دهد.

نحوه استفاده از این استنسیل‌ها در دو مثال زیر نشان داده شده‌اند.

مثال ۳.۲۷: تیر دو سر تکیه‌گاه ساده در شکل ۳.۲۷ E در نظر بگیرید. روش تفاضل محدود معمولی را برای ایجاد معادلات تعادل سیستم به کار ببرید.



شکل ۳.۲۷ E نقاط تفاضل محدود برای تیر دو سر تکیه‌گاه ساده

حل:

شبکه تفاضل محدود استفاده شده برای تحلیل تیر در شکل نشان داده شده است. در تحلیل تفاضل محدود معمولی، معادلات دیفرانسیل تعادل و شرایط مرزی هندسی و طبیعی در نظر گرفته می‌شوند؛ به عبارت دیگر، با تفاضلات محدود در هر نقطه داخلی، رابطه زیر را تقریب‌سازی می‌کنیم:

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = q \quad (\text{الف})$$

و از شرایط مرزی $w = 0$ و $w'' = 0$ در $x = 0$ و $x = L$ استفاده می‌کنیم. با استفاده از تفاضلات مرکزی، (الف) در نقطه i به صورت زیر تقریب‌سازی می‌شود:

$$\frac{EI}{(L/5)^3} \{w_{i-2} - 4w_{i-1} + 6w_i - 4w_{i+1} + w_{i+2}\} = R_i \quad (\text{ب})$$

که در آن R_i بار متمرکز وارده بر نقطه i مساوی $q_i L/5$ است. شرط اینکه w'' در نقطه i مساوی صفر است با استفاده از رابطه زیر تقریب‌سازی می‌شود:

$$w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1} = 0 \quad (\text{پ})$$

با اعمال (ب) در هر نقطه تفاضل محدود، $i = 1, 2, 3, 4$ و با استفاده از شرط (پ) در نقاط تکیه‌گاهی، دستگاه معادلات زیر را به دست می‌آوریم:

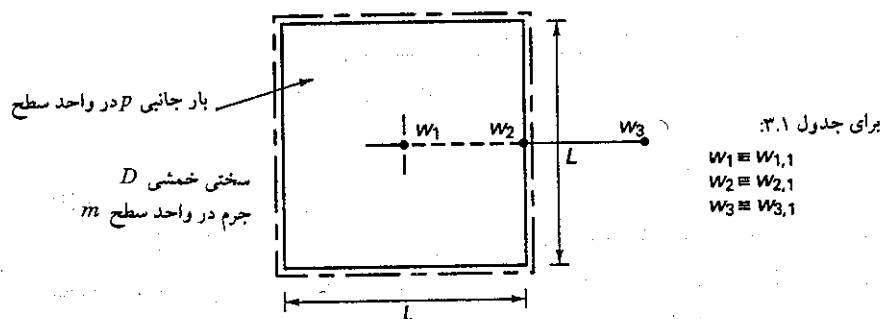
$$\frac{125EI}{L^3} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 & 0 & w_1 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & w_2 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & w_3 \\ 0 & 1 & -4 & 5 & w_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{bmatrix}$$

که در آن ماتریس ضریب بردار تغییر مکان به عنوان ماتریس سختی در نظر گرفته می‌شود.

مثال ۳.۲۸: صفحه نشان داده شده در شکل E ۳.۲۸ را در نظر بگیرید.

۱. تغییر مکان جانبی نقطه مرکزی صفحه را پیدا کنید در صورتی که صفحه تحت اثر بار گسترده یکنواخت p در واحد سطح با شرایط ایستا باشد. تنها یک نقطه تفاضل محدود را در داخل صفحه در نظر بگیرید.

۲. اگر بار p به طور دینامیکی اعمال شود، یعنی $p = p(t)$ ، در این صورت معادله حرکت حاکم بر رفتار صفحه را ایجاد کنید.



شکل E ۳.۲۸ صفحه با تکیه‌گاه ساده

حل:

معادله دیفرانسیل حاکم صفحه عبارت است از: (به عنوان مثال ر.ک. به:

(S. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger [A])

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D}$$

که در آن w تغییر مکان جانبی است. شرایط مرزی به این صورت است که در سرتاسر لبه‌های صفحه، تغییر مکان جانبی و لنگر خمشی مساوی صفر می‌باشند.

استنسیل تفاضل محدود برای $\nabla^4 w$ داده شده در جدول ۳.۱ را استفاده می‌کنیم، با این فرض که نقطه مرکزی مولکول در مرکز صفحه قرار دارد. تغییر مکان‌های متناظر با ضرایب ۸- و ۲+، صفر هستند و تغییر مکان‌های متناسب با ضرایب ۱+، برحسب تغییر مکان مرکز بیان شده‌اند. برای مثال، شرط لنگر صفر نتیجه زیر را به دست می‌دهد (ر.ک. به: شکل E ۳.۲۸):

$$w_1 - 2w_2 + w_3 = 0$$

و از آنجا که $w_2 = 0$ است از اینرو داریم:

$$w_3 = -w_1$$

بنابراین، معادلهٔ تفاضل محدود حاکم عبارت است از:

$$16w_1 = \frac{p}{D} \left(\frac{L}{2} \right)^4$$

و رابطهٔ زیر را پیدا می‌کنیم:

$$\left[\frac{16D}{(L/2)^2} \right] w_1 = R; \quad R = p \left(\frac{L}{2} \right)^2$$

توجه شود که با این رابطه، در اساس، صفحه را با یک فنر منفرد با سختی $k = 64D/L^2$ نمایش می‌دهیم و بار کلی که در روی فنر عمل می‌کند به وسیلهٔ R نمایش داده می‌شود. در این صورت تغییر مکان w_1 با ۴ درصد اختلاف نسبت به مقدار "کامل" محاسبه شدهٔ تحلیلی تعیین می‌گردد.

برای تحلیل دینامیکی، اصل d'Alembert را مورد استفاده قرار داده و از بار وارد خارجی، بار اینرسی $M\ddot{w}_1$ را کم می‌کنیم که در آن M حدوداً جرمی را نمایش می‌دهد که معادل جرم گستردهٔ صفحه است:

$$M = m \left(\frac{L}{2} \right)^2$$

بنابراین معادلهٔ تعادل دینامیکی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$m \frac{L^2}{4} \ddot{w}_1 + \frac{64D}{L^2} w_1 = R$$

در این دو مثال و در تحلیل میلهٔ شکل ۳.۲، معادلات دیفرانسیل حاکم با استفاده از تفاضلات محدود تقریب‌سازی شده‌اند. هنگامی که معادلات دیفرانسیل تعادل برای حل یک مدل ریاضی مورد استفاده قرار می‌گیرند، ضروری است که به وسیلهٔ تفاضلات محدود تقریب‌سازی شوند و شرایط مرزی اساسی و طبیعی در ماتریس ضریب اعمال شود. در تحلیل تیر و صفحه مورد نظر در مثال‌های ۳.۲۷ و ۳.۲۸، شرایط مرزی مذکور به آسانی توانستند اعمال شوند (تغییر مکان‌های صفر در مرزها، شرایط مرزی اساسی بودند و شرایط لنگر صفر در سرتاسر مرزها، شرایط مرزی طبیعی می‌باشند). ولی برای هندسه‌های پیچیده، اعمال شرایط مرزی طبیعی می‌تواند دشوار باشد، زیرا توپولوژی شبکه تفاضل محدود، صورت تفاضل‌یابی را که می‌تواند انجام گیرد، محدود می‌سازد و شاید امکان دست‌یابی به یک ماتریس ضریب متقارن به طور دقیق دشوار باشد (ر.ک. به: [A] A. Ghali and K. J. Bathe).

مشکلاتی که در حین استفاده از فرمول‌بندی دیفرانسیلی پیش می‌آید سبب توسعه و بسط شیوه‌های تحلیل تفاضل محدود بر اساس اصل مینیمم انرژی پتانسیل کلی شده است که به عنوان روش انرژی تفاضل محدود شناخته می‌شود (به عنوان مثال ر.ک. به: [A] D. Bushnell, B. O. Almorth and F. Brogan). در این روش، مشتقات تغییر مکان در انرژی پتانسیل کلی Π سیستم با استفاده از تفاضلات محدود تقریب‌سازی می‌شوند و شرط مینیمم بودن Π برای محاسبهٔ تغییر مکان‌های مجهول در نقاط تفاضل محدود مورد

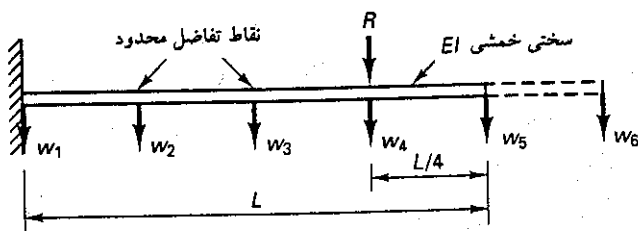
استفاده قرار می‌گیرد. از آنجا که از فرمول‌بندی وردشی مسأله مورد نظر، استفاده می‌شود، تنها شرایط مرزی اساسی (هندسی) باید در تفاضل‌یابی ارضا شوند. همچنین، همواره یک ماتریس ضریب متقارن حاصل می‌شود.

همانگونه که انتظار می‌رود، روش انرژی تفاضل محدود با روش Ritz ارتباطی تنگاتنگ دارد و در برخی حالات هر دو روش، معادلات جبری یکسانی را ایجاد می‌کنند.

امتیاز روش انرژی تفاضل محدود در مؤثر بودن نحوه ایجاد ماتریس ضریب معادلات جبری نهفته است. این تأثیر ناشی از کاربرد یک روش ساده انتگرال‌گیری انرژی می‌باشد. روش Galerkin که به صورت روش‌های عناصر محدود پیاده‌سازی می‌شود و در فصول آینده مورد بحث قرار خواهد گرفت، تکنیکی با عمومیت و توانایی بیشتری است و همین نکته نیز دلیل موفقیت روش عناصر محدود می‌باشد.

نشان دادن نحوه استفاده از انرژی تفاضل محدود با چند مثال می‌تواند سودمند واقع شود.

مثال ۳.۲۹: تیر طره‌ای شکل ۳.۲۹ را در نظر بگیرید. تغییر مکان انتهای تیر را با استفاده از روش معمولی تفاضل محدود و روش انرژی تفاضل محدود تعیین نمایید



شکل ۳.۲۹ نقاط تفاضل محدود در تیر طره‌ای

حل:

شبکه تفاضل محدود مورد استفاده در شکل نشان داده می‌شود. با استفاده از روش معمولی تفاضل محدود و تفاضل‌یابی مرکزی همچون مثال ۳.۲۷، معادلات تعادل زیر را به دست می‌آوریم:

$$\frac{64EI}{L^3} \begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 \\ 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

یادآوری می‌شود که علاوه بر معادلات به کار رفته در مثال ۳.۲۷، شرایط $w' = 0$ در

انتهای گیردار و $w''' = 0$ در انتهای آزاد نیز مورد استفاده قرار می‌گیرند. برای مساوی صفر بودن w' و w''' در نقطه i ، به ترتیب روابط زیر را به کار می‌گیریم:

$$w_{i+1} - w_{i-1} = 0$$

$$w_{i+2} - 2w_{i+1} + 2w_{i-1} - w_{i-2} = 0$$

با استفاده از روش انرژی تفاضل محدود، انرژی پتانسیل کلی Π به صورت زیر داده می‌شود:

$$\Pi = \frac{EI}{2} \int_0^L [w''(x)]^2 dx - R w\left(\frac{3}{4}L\right)$$

برای تعیین انتگرال، نیاز به تقریب‌سازی $w''(x)$ داریم. با استفاده از تفاضل‌یابی مرکزی، برای نقطه i رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$w_i'' = \frac{1}{(L/4)^2} (w_{i+1} - 2w_i + w_{i-1}) \quad (\text{ب})$$

حال یک جواب تقریبی را می‌توان از طریق تعیین Π در نقاط تفاضل محدود با استفاده از (ب) و جایگزینی انتگرال با یک فرایند جمع، به دست آورد.

$$\Pi = \frac{L}{8} \Pi_1 + \frac{L}{4} (\Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_4) + \frac{L}{8} \Pi_5 - R w_4 \quad (\text{پ})$$

$$\Pi_i = \frac{1}{2} [w_{i-1} \quad w_i \quad w_{i+1}] \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{EI}{(L/4)^4} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_{i-1} \\ w_i \\ w_{i+1} \end{bmatrix} \quad \text{که در آن:}$$

بنابراین، مشابه روش‌های تحلیل عناصر محدود می‌توان نوشت (ر.ک. به: بخش ۴.۲):

$$\Pi_i = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{B}_i^T \mathbf{C}_i \mathbf{B}_i \mathbf{U}$$

که در آن \mathbf{B}_i یک ماتریس تبدیل تعمیم یافته کرنش - تغییر مکان، \mathbf{C}_i ماتریس تنش - کرنش و \mathbf{U} برداری است که شامل تمام تغییر مکان‌های گرهی می‌باشد. با استفاده از روش سختی برای محاسبه انرژی پتانسیل کلی به همان‌گونه که در (پ) داده شده است و با استفاده از این شرط که انرژی پتانسیل کلی مانا است (به عبارت دیگر $\delta \Pi = 0$)، معادلات تعادل زیر را به دست می‌آوریم:

$$\frac{64EI}{L^3} \begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 & & & \\ -4 & 6 & -4 & 1 & & \\ 1 & -4 & 5.5 & -3 & 0.5 & \\ & 1 & -3 & 3 & -1 & \\ & & 0.5 & -1 & 0.5 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \\ w_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ت})$$

که در آن از شرط شیب صفر در انتهای گیردار پیش از این استفاده شده است. ذکر تشابه بین معادلات تعادل (الف) و (ت) ضروری است. در حقیقت اگر w_6 را از معادلات (ت) حذف کنیم، معادلات (الف) به دست می آیند. بنابراین، با استفاده از روش انرژی تفاضل محدود و روش معمولی تفاضل محدود، در این حالت معادلات تعادل یکسانی حاصل می شوند.

به عنوان یک مثال، فرض کنید که $R = 1$ و $EI = 10^3$ و $L = 10$. در این صورت با استفاده از معادلات (الف) الی (ت) نتیجه زیر را به دست می آوریم:

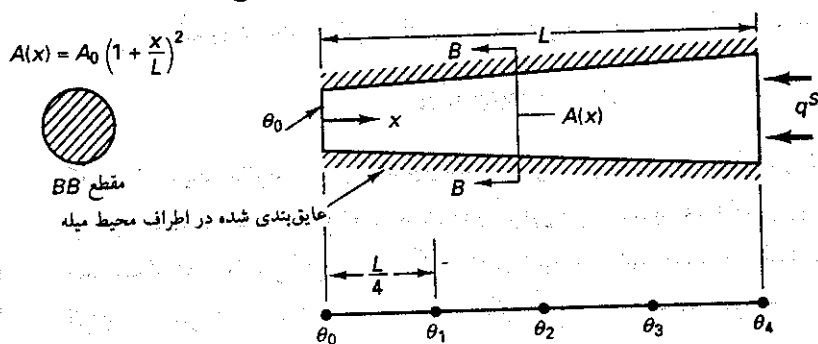
$$U = \begin{bmatrix} 0.023437 \\ 0.078125 \\ 0.14843 \\ 0.21875 \end{bmatrix}$$

جواب کامل برای تغییر مکان انتهای آزاد عبارت است از $w_5 = 0.2109375$. بنابراین تحلیل تفاضل محدود یک جواب تقریبی بهتری را نتیجه می دهد.

مثال ۳.۳۰: میله نشان داده شده در $E 3.30$ در معرض یک ورودی شار حرارتی q^s در انتهای سمت راست و یک دمای ثابت θ_0 در انتهای سمت چپ بوده و در شرایط حالت پایا قرار دارد. نشانگر وردشی عبارت است از:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L k \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 A dx - q^s A_L \theta_L \quad (\text{الف})$$

از روش تفاضل محدود برای پیدا کردن یک جواب تقریبی برای توزیع دما استفاده کنید.



$q^s =$ ورودی جریان حرارتی از قبل تعیین شده در واحد سطح $x = L$

$k =$ قابلیت هدایت (ثابت)

شکل $E 3.30$ میله در شرایط انتقال حرارتی؛ نقاط تفاضل محدود استفاده شده

حل:

پنج نقطه تفاضل محدود به فاصله مساوی را به گونه‌ای که در شکل E ۳.۳۰ نشان داده شده است در نظر بگیرید. در این صورت تقریب‌سازی تفاضل محدود انتگرال موجود در (الف) عبارت است از:

$$\Pi = \frac{L}{4} \{\Pi_{1/2} + \Pi_{3/2} + \Pi_{5/2} + \Pi_{7/2}\} - q^s A_L \theta_L$$

که در آن داریم:

$$\Pi_{1/2} = \frac{1}{2} [\theta_1 \quad \theta_0] \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{k(\frac{9}{8})^2 A_0}{(L/4)^2} [1 \quad -1] \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_0 \end{bmatrix}$$

و مقادیر $\Pi_{7/2}$, $\Pi_{5/2}$, $\Pi_{3/2}$ به طور مشابه تعیین می‌شوند. با محاسبه Π و استفاده از شرط $\delta \Pi = 0$ و اعمال این شرط مرزی که θ_0 معلوم است، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{kA_0}{16L} \begin{bmatrix} 202 & -121 & & \\ -121 & 290 & -169 & \\ & -169 & 394 & -225 \\ & & -225 & 225 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{81}{16L} kA_0 \theta_0 \\ 0 \\ 0 \\ 4A_0 q^s \end{bmatrix}$$

حال فرض می‌کنیم که $\theta_0 = 0$ است. در این صورت جواب عبارت است از:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.79 \\ 1.32 \\ 1.70 \\ 1.98 \end{bmatrix} \frac{Lq^s}{k}$$

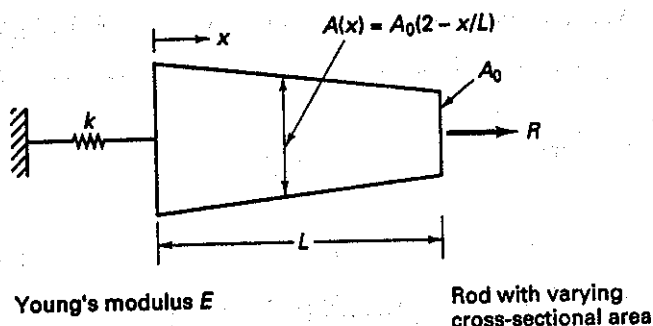
که به صورت زیر با جواب تحلیلی مقایسه می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{bmatrix}_{\text{analytical}} = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} \\ \frac{4}{3} \\ \frac{12}{7} \\ 2 \end{bmatrix} \frac{Lq^s}{k}$$

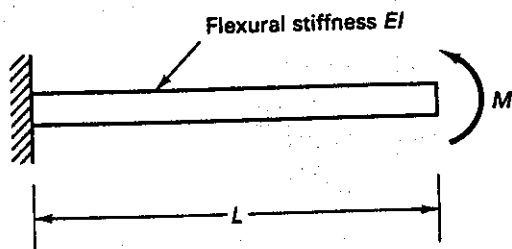
۳.۳.۶ تمرین‌ها

۳.۱۵ معادله دیفرانسیل تعادل و شرایط مرزی (هندسی و نیرویی) مسأله نشان داده شده را ایجاد نمایید؛ و نیز تعیین کنید که آیا عملگر L_{2m} مسأله متقارن و مثبت می‌باشد یا نه، و

جواب خود را اثبات کنید.



۳.۱۶ تیر طره‌ای نشان داده شده در زیر را در نظر بگیرید که تحت اثر یک لنگر M در انتهای آزاد خود می‌باشد. نشانگر وردشی Π را تعیین نموده و شرایط مرزی اساسی را بیان کنید. با استفاده از (ب ۳.۷) و با استفاده از این واقعیت که وردش‌ها و مشتق‌گیری‌ها با استفاده از قواعد مشابهی انجام می‌گیرند، شرط مانا بودن Π را به کار ببرید. سپس معادله دیفرانسیل تعادل و شرایط مرزی طبیعی را استخراج نمایید؛ و نیز تعیین کنید که آیا عملگر L_{2m} متقارن و مثبت معین می‌باشد یا نه، و جواب خود را اثبات کنید.



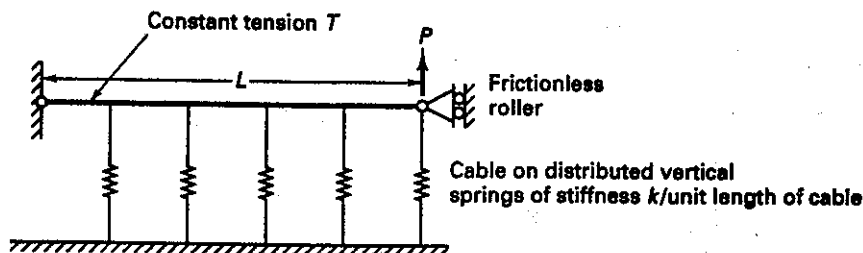
۳.۱۷ مسأله انتقال حرارت مثال ۳.۳۰ را در نظر بگیرید. با استفاده از (ب ۳.۷) و با استفاده از این واقعیت که وردش‌ها و مشتق‌گیری‌ها با استفاده از قواعد مشابهی انجام می‌گیرند، شرط مانا بودن عملگر داده شده را به کار ببرید. معادله دیفرانسیل تعادل حاکم و کلیه شرایط مرزی را ایجاد کنید. تعیین کنید که آیا عملگر L_{2m} متقارن و مثبت معین می‌باشد یا نه، و جواب خود را اثبات نمایید.

۳.۱۸ کابل پیش‌تنیده نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. نشانگر وردشی عبارت است از:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L T \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 dx + \int_0^L \frac{1}{2} k(w)^2 dx - Pw_L$$

که در آن w تغییر مکان جانبی و w_L تغییر مکان جانبی در $x = L$ است. معادله

دیفرانسیل تعادل را ایجاد نموده و کلیه شرایط مرزی را بیان کنید. تعیین نمایید که آیا عملگر L_{2m} متقارن و مثبت معین می باشد یا نه، و جواب خود را اثبات نمایید.



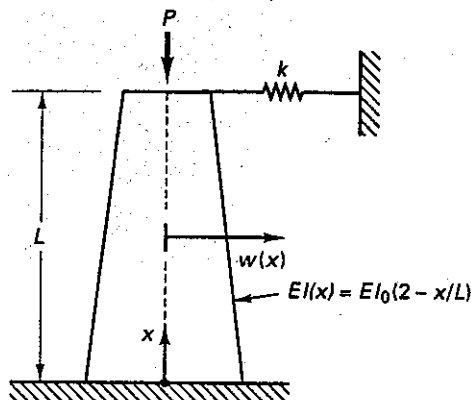
۳.۱۹ کابل پیش تنیده مورد نظر در تمرین ۳.۱۸ را در نظر بگیرید.

(الف) تابع آزمون مناسبی را تعیین کنید که بتوان آن را در تحلیل کابل با استفاده از روشهای کلاسیک Galerkin و کمترین مربعات به کار برد. تابع $w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ را امتحان نموده و آن را تا آنجا که ضرورت دارد اصلاح نمایید.

(ب) معادلات حاکم سیستم را برای تابع آزمون انتخاب شده با استفاده از روشهای کلاسیک Galerkin و کمترین مربعات ایجاد نمایید.

۳.۲۰ کابل پیش تنیده مورد نظر در تمرین ۳.۱۸ را در نظر بگیرید. معادلات حاکم را با استفاده از روش Ritz و تابع آزمون $w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ ایجاد کنید (به عبارت دیگر یک اصلاح مناسب نیز در آن به عمل آورید).

۳.۲۱ روش Ritz را برای محاسبه بار کمانش خطی ستون نشان داده شده، استفاده نمایید. فرض کنید که $w = cx^2$ که در آن c پارامتر مجهول Ritz است.

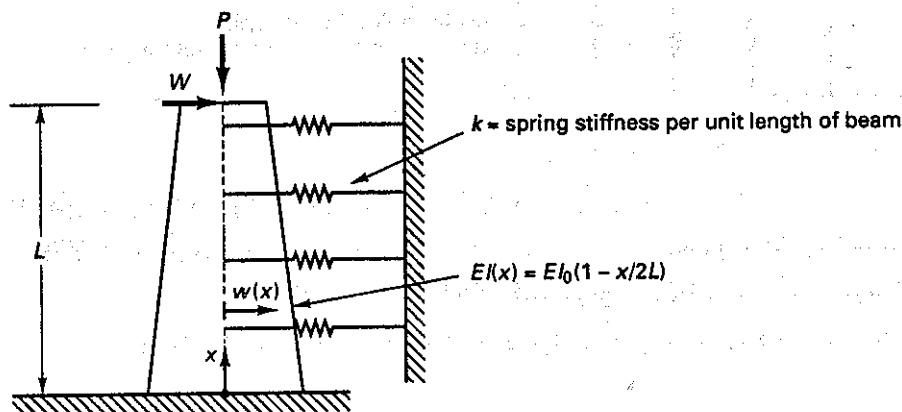


۳.۲۲ سازه نشان داده شده در زیر را در نظر بگیرید:

(الف) روش Ritz را برای ایجاد معادلات حاکم بر پاسخ خمشی سازه به کار ببرید. توابع

زیر را استفاده نمایید: (i) $w = a_1 x^2$ و (ii) $w = b_1 [1 - \cos(\pi x / 2L)]$

(ب) با داشتن $EI_0 = 100$ و $k = 2$ و $L = 1$ ، بار بحرانی ستون را با استفاده از تحلیل Ritz تعیین کنید.

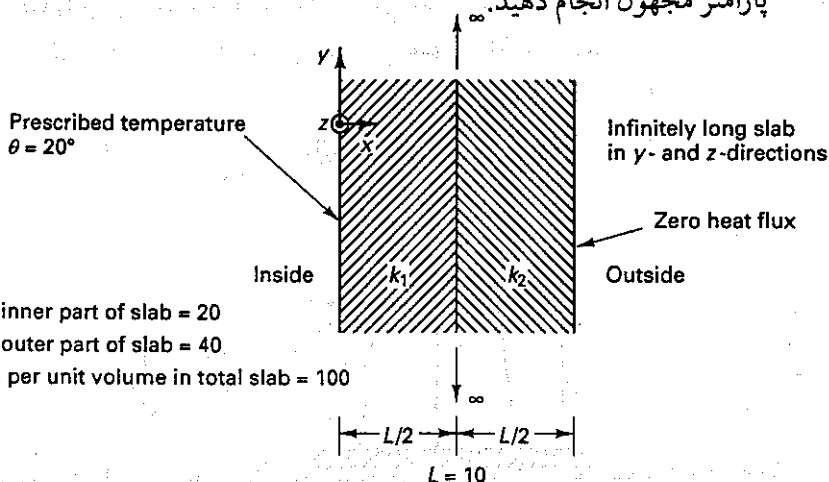


۳.۲۳ دال نشان داده شده را برای تحلیل انتقال حرارت در نظر بگیرید. نشانگر وردشی برای

$$\Pi = \int_0^L \frac{1}{2} k \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx - \int_0^L \theta q^B dx$$

تحلیل عبارت است از:

شرایط مرزی اساسی و طبیعی را بیان کنید. سپس یک تحلیل Ritz را با استفاده از دو پارامتر مجهول انجام دهید.



۳.۲۴ تحلیل کابل پیش تنیده نشان داده شده در شکل زیر مورد نظر است. معادله دیفرانسیل حاکم بر تعادل سیستم عبارت است از:

$$T \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - p(t)$$

با شرایط مرزی زیر:

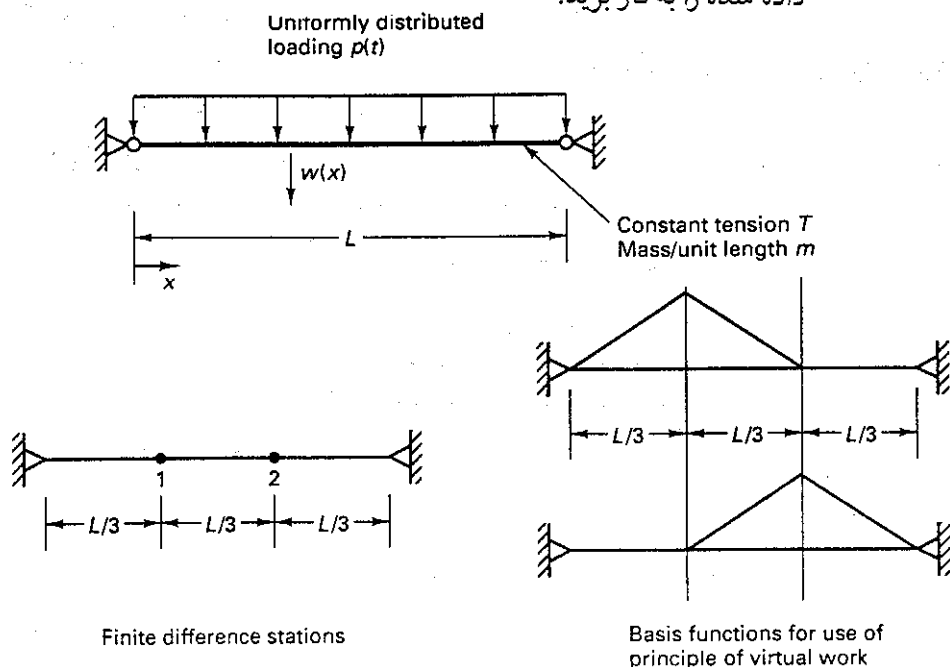
$$w|_{x=0} = w|_{x=L} = 0$$

و با شرایط اولیه زیر:

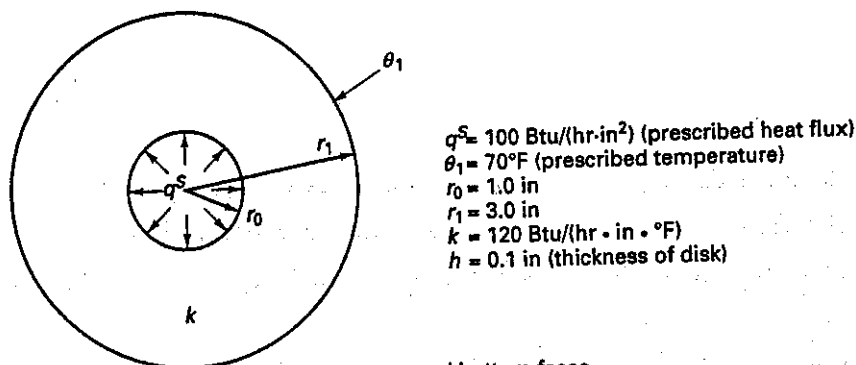
$$w(x, 0) = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = 0$$

(الف) روش معمولی تفاضل محدود را برای تقریب سازی معادله دیفرانسیل حاکم بر تعادل استفاده کنید و سپس معادلات حاکم بر پاسخ کابل را ایجاد نمایید.
(ب) از روش انرژی تفاضل محدود برای ایجاد معادلات حاکم بر پاسخ کابل استفاده نمایید.

(پ) از اصل کار مجازی برای ایجاد معادلات حاکم بر پاسخ کابل استفاده کنید. هنگامی که از روشهای تفاضل محدود استفاده می شود، دو نقطه داخلی تفاضل محدود را به کار برید. در موقع استفاده از روش کار مجازی، دو تابع پایه نشان داده شده را به کار برید.



۳.۲۵ دیسک نشان داده شده در زیر برای تحلیل توزیع دما مورد نظر است. نشانگر ورودشی مسأله را تعیین کنید و با استفاده از روش Ritz و دو تابع پایه نشان داده شده در شکل ۳.۴ یک جواب تقریبی برای مسأله به دست آورید. نتایج خود را با جواب کامل تحلیلی مقایسه کنید.

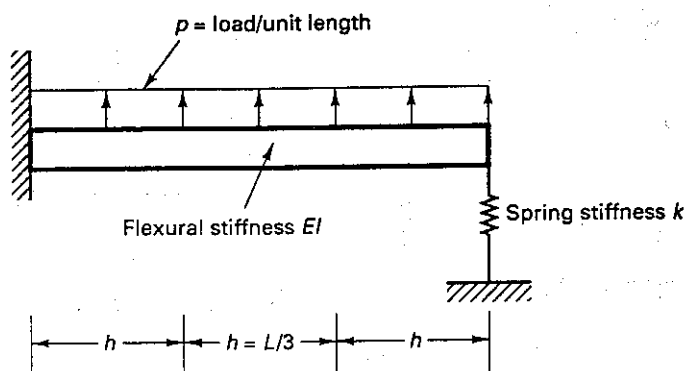


The top and bottom faces of the disk are insulated

۳.۲۶ تحلیل تیر نشان داده شده در زیر را در نظر بگیرید:

(الف) از چهار نقطه تفاضل محدود در روی تیر با فرمول‌بندی دیفرانسیلی برای ایجاد معادلات حاکم بر پاسخ تیر استفاده نمایید.

(ب) از چهار نقطه تفاضل محدود در روی تیر با فرمول‌بندی ورودشی برای ایجاد معادلات حاکم بر پاسخ نیز استفاده نمایید.



۳.۲۷ روش انرژی تفاضل محدود را تنها با دو مجهول برای مقادیر دما جهت حل مسأله ارائه شده در تمرین ۳.۲۳ به کار برید.

۳.۲۸ روش انرژی تفاضل محدود را تنها با دو مجهول برای مقادیر دما جهت حل مسأله ارائه شده در تمرین ۳.۲۵ به کار برید.

۳.۲۹ برنامه کامپیوتری STAP (ر.ک. به: فصل دوازدهم) برای تحلیل سازه‌های خربایی نوشته شده است. ولی با استفاده از تشابهاتی که در متغیرها و معادلات است، برنامه را می‌توان در تحلیل توزیع فشار و جریان در شبکه‌های لوله‌ای، تحلیل توزیع جریان در شبکه‌های dc و تحلیل انتقال حرارتی نیز به کار برد. برنامه STAP را برای حل مسائل ارائه شده در مثال‌های ۳.۱ الی ۳.۴ به کار برید.

۳.۳۰ از یک برنامه کامپیوتری برای حل مسائل ارائه شده در مسائل ۳.۱ الی ۳.۴ استفاده کنید.

۳.۴ اعمال قیدها

تحلیل یک مسأله مهندسی اغلب ایجاب می‌کند که قید خاصی در روی برخی متغیرهای معین حل اعمال شود. این قیدها امکان دارد که ضرورت داشته باشد که در برخی پارامترهای پیوسته یا برخی متغیرهای گسسته اعمال شوند و ممکن است که شامل شرایط معین پیوستگی، اعمال مقادیر مشخص در متغیرهای حل یا شرایطی باشند که باید بین متغیرهای معینی برقرار گردند. دو روشی که به طور گسترده برای اعمال قیدها مورد استفاده قرار می‌گیرد، عبارتند از: روش ضرب Lagrange و روش تاوان (به عنوان مثال، ر.ک. به: [A] D. P. Bertsekas). کاربردهای این تکنیک‌ها در بخش‌های ۴.۲.۲، ۴.۴.۳، ۴.۵، ۵.۴، ۶.۷.۲ و ۷.۴ ارائه شده‌اند. هر دو روش ضرب Lagrange و تاوان در روی فرمول‌بندی‌های وردشی یا باقی‌مانده وزن‌دار مسأله مورد نظر عمل می‌کنند.

۳.۴.۱ مقدمه‌ای بر روشهای ضرب Lagrange و تاوان

به عنوان مقدمه‌ای خلاصه بر روشهای ضرب Lagrange و تاوان، فرمول‌بندی یک مدل سازه‌ای گسسته برای تحلیل حالت پایا را در نظر می‌گیریم:

$$\Pi = \frac{1}{2} U^T K U - U^T R \quad (3.52)$$

با شرایط زیر:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial U_i} = 0 \quad \text{for all } i \quad (3.53)$$

و فرض کنید که می‌خواهیم تغییر مکان معینی را به درجه آزادی U_i اعمال کنیم:

$$U_i = U_i^* \quad (3.54)$$

در روش ضریب $Lagrange$ ، سمت راست رابطه (۳.۵۲) را اصلاح می‌کنیم تا رابطه زیر را به دست آوریم:

$$\Pi^* = \frac{1}{2} U^T K U - U^T R + \lambda (U_i - U_i^*) \quad (3.55)$$

که در آن λ یک متغیر اضافی است و با استفاده از $\delta \Pi_i^* = 0$ ، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\delta U^T K U - \delta U^T R + \lambda \delta U_i + \delta \lambda (U_i - U_i^*) = 0 \quad (3.56)$$

از آنجا که δU و $\delta \lambda$ اختیاری هستند، در نتیجه رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{e}_i \\ \mathbf{e}_i^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ U_i^* \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

که در آن \mathbf{e}_i برداری است که تمامی عناصر آن صفر بوده به جز عنصر i ام که مساوی یک می‌باشد. بنابراین معادلات تعادل بدون قید با یک معادله اضافی اصلاح می‌شوند که آن معادله شرط قید را دربردارد.

در روش تاوان نیز، سمت راست رابطه (۳.۵۲) را بدون اینکه یک متغیر اضافی را در روابط وارد نماییم، اصلاح می‌کنیم. حال از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\Pi^{**} = \frac{1}{2} U^T K U - U^T R + \frac{\alpha}{2} (U_i - U_i^*)^2 \quad (3.58)$$

که در آن α یک مقدار ثابت نسبتاً بسیار بزرگ می‌باشد، $\alpha > \max(k_{ii})$. اینک شرط $\delta \Pi^{**} = 0$ نتیجه زیر را حاصل می‌دهد:

$$\delta U^T K U - \delta U^T R + \alpha (U_i - U_i^*) \delta U_i = 0 \quad (3.59)$$

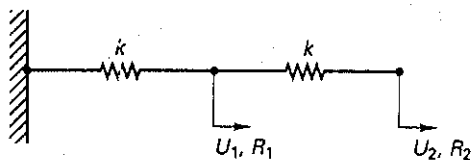
و

$$(\mathbf{K} + \alpha \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^T) \mathbf{U} = \mathbf{R} + \alpha U_i^* \mathbf{e}_i \quad (3.60)$$

بنابراین با استفاده از این تکنیک، یک مقدار بسیار بزرگی به i امین عنصر قطری \mathbf{K} اضافه می‌شود و نیز یک نیروی متناظر اضافه می‌گردد به گونه‌ای که تغییر مکان مورد نیاز U_i تقریباً مساوی U_i^* باشد. این یک تکنیک عمومی است که به طور گسترده‌ای برای اعمال تغییر مکان‌های مشخص یا سایر متغیرها مورد استفاده قرار می‌گیرد. این روش مؤثر می‌باشد، زیرا معادله اضافی مورد نیاز نیست و عرض نوار ماتریس ضریب حفظ می‌گردد.

(ر.ک. به: بخش ۴.۲.۲). روشهای ضریب Lagrange و تاوان را در مثال زیر نشان می‌دهیم.

مثال ۳.۳۱: از روش ضریب Lagrange و روش تاوان برای تحلیل سیستم فنری نشان داده شده در شکل ۳.۳۱ با اعمال تغییر مکان $U_2 = 1/k$ استفاده نمایید.



شکل ۳.۳۱ یک سیستم فنر ساده

حل:

معادلات تعادل حاکم بدون اعمال تغییر مکان مشخصی به U_2 عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

جواب کامل U_1 با استفاده از رابطه $U_2 = 1/k$ و حل نخستین معادله (الف) به دست

می‌آید:

$$U_1 = \frac{1 + R_1}{2k} \quad (\text{ب})$$

$$R_2 = 1 - \frac{1 + R_1}{2} \quad \text{همچنین در این صورت داریم:}$$

که نیروی مورد نیاز در درجه آزادی U_2 برای اعمال $U_2 = 1/k$ می‌باشد.

با استفاده از روش ضریب Lagrange، معادلات حاکم عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & k & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ \frac{1}{k} \end{bmatrix} \quad (\text{پ})$$

$$U_1 = \frac{1 + R_1}{2k}; \quad \lambda = -1 + \frac{1 + R_1}{2} \quad \text{و نتایج زیر را به دست می‌آوریم:}$$

بنابراین همان جواب (ب) حاصل می‌شود و به مساوی نیرو (با علامت منفی) است که باید در درجه آزادی U_2 وارد شود تا اینکه تغییر مکان $U_2 = 1/k$ به سیستم اعمال گردد. باید دانست که

با این مقدار λ ، دو معادلهٔ اول در (پ) به صورت معادلات (الف) درمی‌آیند.
با استفاده از روش تاوان، روابط زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & (k + \alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ \frac{\alpha}{k} \end{bmatrix}$$

حال جواب معادلات را که به α بستگی دارند به صورت زیر پیدا می‌کنیم:

$$U_1 = \frac{11R_1 + 10}{21k}; \quad U_2 = \frac{R_1 + 20}{21k} \quad \text{به ازای } \alpha = 10k \text{ داریم:}$$

$$U_1 = \frac{101R_1 + 100}{201k}; \quad U_2 = \frac{R_1 + 200}{201k} \quad \text{به ازای } \alpha = 100k \text{ داریم:}$$

$$U_1 = \frac{1001R_1 + 1000}{2001k}; \quad U_2 = \frac{R_1 + 2000}{2001k} \quad \text{و به ازای } \alpha = 1000k \text{ داریم:}$$

در عمل، دقت حاصله از $\alpha = 1000k$ معمولاً کافی می‌باشد.

مثال مذکور صرفاً یک نمایش مقدماتی از کاربرد روش ضریب Lagrange و روش تاوان را به دست می‌دهد. حال به طور خلاصه برخی معادلات عمومی‌تر را ارائه می‌کنیم. فرض کنید که می‌خواهیم m قید گسسته مستقل خطی $BU = V$ را در تحلیل اعمال کنیم که در آن B یک ماتریس از مرتبهٔ $m \times n$ است. در این صورت در روش ضریب Lagrange از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\Pi^* = \frac{1}{2} U^T K U - U^T R + \lambda^T (BU - V) \quad (۳.۶۱)$$

که در آن λ یک بردار شامل m ضریب Lagrange می‌باشد. حال با استفاده از شرط $\delta \Pi^* = 0$ ، رابطهٔ زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} K & B^T \\ B & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ V \end{bmatrix} \quad (۳.۶۲)$$

در روش تاوان، از رابطهٔ زیر استفاده می‌نماییم:

$$\Pi^{**} = \frac{1}{2} U^T K U - U^T R + \frac{\alpha}{2} (BU - V)^T (BU - V) \quad (۳.۶۳)$$

و با استفاده از $\delta \Pi^{**} = 0$ ، رابطهٔ زیر را به دست می‌آوریم:

$$(K + \alpha B^T B)U = R + \alpha B^T V \quad (۳.۶۴)$$

البته روابط (۳.۵۷) و (۳.۶۰) حالت‌های خاصی از (۳.۶۲) و (۳.۶۴) می‌باشند.

روابط مزبور برای سیستم‌های گسسته نوشته شده‌اند. هنگامی که یک سیستم پیوسته مورد نظر باشد، نشانگر معمولی وردشی II (به عنوان مثال ر.ک به: مثالهای ۳.۱۸ الی ۳.۲۰) در هنگام استفاده از روش ضرب Lagrange با انتگرال (یا انتگرال‌های) قید (یا قیود) پیوسته که در ضرب یا ضرایب Lagrange ضرب می‌شوند اصلاح می‌گردد. نشانگر مذکور در موقع استفاده از روش تاوان با انتگرال (یا انتگرال‌های) فاکتور (یا فاکتورهای) تاوان که در توان دوم قید (یا قیود) ضرب می‌شوند اصلاح می‌شود. در این صورت، اگر متغیرهای پیوسته با استفاده از توابع آزمون یا روابط تفاضل محدود بیان گردند، روابط با فرم (۳.۶۲) و (۳.۶۴) به دست می‌آیند (ر.ک. به: بخش ۴.۴).

اگرچه مقدمه مزبور در مورد روش ضرب Lagrange و روش تاوان مختصر بود، با وجود این، می‌توان به چند نکته اساسی که کاملاً در حالت کلی قابل استفاده هستند اشاره نمود. نخست مشاهده می‌کنیم که در روش ضرب Lagrange، عناصر قطری متناظر با ضرایب Lagrange در ماتریس ضرب، مساوی صفر می‌باشند. بنابراین برای حل، مرتب نمودن معادلات به صورتی که در (۳.۶۲) داده شده است مؤثر خواهد بود. اگر معادلات تعادل همراه با ضرایب Lagrange را در نظر بگیریم، ضمناً درخواهیم یافت که این ضرایب دارای واحدهایی مشابه واحدهای توابع نیرویی می‌باشند، به عنوان مثال در (۳.۵۷)، ضرب Lagrange یک نیرو است.

نکته مهم در موقع استفاده از روش تاوان، انتخاب یک عدد مناسب تاوان می‌باشد. در تحلیلی که منتهی به رابطه (۳.۶۴) گردید، عدد تاوان α به روشنی مشخص می‌شود (مانند مثال ۳.۳۱) و اغلب با این حالت روبرو هستیم (ر.ک. به: بخش ۴.۲.۲). با وجود این در سایر تحلیل‌ها، عدد تاوان با خود مسأله با استفاده از یک فرمول‌بندی خاصی تعریف می‌شود (ر.ک. به: بخش ۵.۴.۱). مشکلی که در موقع استفاده از یک عدد تاوان بسیار بزرگ پیش می‌آید این است که هنگامی که عناصر غیرقطری ماتریس ضرب در یک عدد بسیار بزرگ ضرب می‌شوند امکان دارد که ماتریس مذکور "بدطرح" شود. اگر عناصر غیرقطری به وسیله عدد تاوان تحت تأثیر قرار گیرند، در این صورت ضروری است که در عملیات حسابی کامپیوتری، ازارقام کافی استفاده شود تا از دقیق بودن جواب مسأله اطمینان حاصل گردد (ر.ک. به: بخش ۸.۲.۶).

سرانجام باید اضافه کرد که روشهای تاوان و ضرب Lagrange ارتباطی تنگاتنگ با یکدیگر دارند (ر.ک. به: تمرین ۳.۳۵) و نیز ایده‌های اساسی اعمال قیدها را می‌توان به صورتی که در روش ضرب فزوده لاگرانژی عمل می‌شود با همدیگر ترکیب نمود (ر.ک. به: [A] M. Fortin and R. Glowinski و تمرین ۳.۳۶).

۳.۴.۲ تمرین‌ها

۳.۳۱ دستگاه معادلات زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ -1 \end{bmatrix}$$

از روش ضریب Lagrange و روش تاوان برای اعمال شرط $U_2 = 0$ استفاده نمایید. معادلات را حل نموده و نتایج را تفسیر کنید.

۳.۳۲ سیستم گاریهای مثال ۳.۱ با $k_1 = k$, $R_1 = 1$, $R_2 = 0$, $R_3 = 1$ را در نظر بگیرید. معادلات تعادل حاکم را با اعمال شرط $U_2 = U_3$ به دست آورید. (الف) از روش ضریب Lagrange استفاده کنید.

(ب) روش تاوان را با یک پارامتر مناسب تاوان به کار ببرید.

در هر دو حالت تغییر مکان‌ها و نیروهای قیدی را به دست آورید.

۳.۳۳ مسأله انتقال حرارت مثال ۳.۲ با $k = 1$, $\theta_0 = 10$, $\theta_4 = 20$ را در نظر بگیرید. شرط $\theta_3 = 4\theta_2$ را اعمال کنید و به طور فیزیکی جواب را تفسیر نمایید. روش ضریب Lagrange و روش تاوان را با یک پارامتر معقول تاوان به کار ببرید.

۳.۳۴ جریان سیال در شبکه هیدرولیکی مثال ۳.۳ را در نظر بگیرید روش ضریب Lagrange را برای اعمال شرط $p_C = 2p_D$ استفاده نمود، معادلات حاکم را به دست آورید. معادلات مذکور را حل نموده، جواب را تفسیر کنید.

تحلیل را با استفاده از روش تاوان به همراه یک پارامتر مناسب تاوان تکرار نمایید.

۳.۳۵ مسأله $KU = R$ را با m قید مستقل خطی $BU = V$ در نظر بگیرید [ر.ک. به روابط (۳.۶۱) و (۳.۶۲)] نشان دهید که مانا بودن نشانگر وردشی زیر معادلات روش تاوان (۳.۶۴) را به دست می‌دهد:

$$\tilde{\Pi}^{**} = \frac{1}{2} U^T K U - U^T R + \lambda^T (BU - V) - \frac{\lambda^T \lambda}{2\alpha}$$

که در آن λ برداری شامل m ضریب Lagrange بوده و α پارامتر تاوان است به گونه‌ای که: $\alpha > 0$. ضرایب Lagrange را در حالت کلی به عنوان تابعی از α و قیود تعیین کنید و نشان دهید که برای حالت خاص مورد نظر در (۳.۶۰)، $\lambda = \alpha(U_i - U_i^*)$ می‌باشد.

۳.۳۶ در روش فزوده لاگرانژی، تابع زیر برای مسأله ارائه شده در تمرین (۳.۳۵) به کار می‌رود:

$$\bar{\Pi}^* = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \mathbf{R} + \frac{\alpha}{2} (\mathbf{B} \mathbf{U} - \mathbf{V})^T (\mathbf{B} \mathbf{U} - \mathbf{V}) + \lambda^T (\mathbf{B} \mathbf{U} - \mathbf{V}); \alpha \geq 0$$

(الف) شرط مانا بودن $\bar{\Pi}^*$ را استفاده نموده، معادلات حاکم را به دست آورید.

(ب) روش فزوده لاگرانژی را برای حل مسأله ارائه شده در مثال (۳.۳) با

$\alpha = 0, k, 1000k$ به کار ببرید. نشان دهید که برای هر مقدار α ، قید به صورت

بسیار دقیقی تأمین می‌شود. (روش فزوده لاگرانژی در روشهای تکراری مورد

استفاده قرار می‌گیرد که در آن حالت استفاده از یک مقدار مناسب و کارا برای α

حائز اهمیت می‌باشد).

فصل چهارم

فرمول‌بندی روش عناصر محدود - تحلیل خطی در مکانیک جامدات و سازه‌ای

۴.۱ مقدمه

حوزه بسیار مهمی که تحلیل عناصر محدود در آن به کار می‌رود، تحلیل خطی جامدات و سازه‌ها است. نخستین کاربرد روش‌های عملی عناصر محدود در تحلیل خطی سازه‌ها بود؛ و روش عناصر محدود، اساساً محرک اولیه خود را برای بسط و توسعه در این حوزه پیدا کرده است. امروزه انواع زیادی از تحلیل‌های خطی سازه‌ها را می‌توان به طریقه‌ای معمول انجام داد. روش‌های گسسته‌سازی عناصر محدود بخوبی ایجاد شده و در برنامه‌های کامپیوتری استاندارد مورد استفاده قرار می‌گیرند. با وجود این دو حوزه وجود دارد که در آنها اخیراً عناصر محدود مؤثری ایجاد و توسعه یافته‌اند که عبارتند از: تحلیل سازه‌های عمومی صفحه‌ای و پوسته‌ای و حل محیط (تقریباً) تراکم‌ناپذیر.

فرمول‌بندی استاندارد برای راه حل عناصر محدود جامدات، روش تغییر مکان است که به طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد و به جز دو حوزه مذکور، در سایر حوزه‌های تحلیل روش مؤثری می‌باشد. برای تحلیل سازه‌های صفحه‌ای و پوسته‌ای و حل جامدات تراکم‌ناپذیر، ترجیحاً از فرمول‌بندی آمیخته استفاده می‌شود.

در این فصل، روش تحلیل مبتنی بر تغییر مکان را با جزئیات ارائه می‌کنیم. اصل کار مجازی رابطه بنیادی است که برای فرمول‌بندی عناصر محدود از آن استفاده می‌شود. در ابتدا معادلات عناصر محدود حاکم را ایجاد می‌کنیم و سپس در مورد خواص همگرایی روش بحث

می‌نماییم. از آنجا که راه حل مبتنی بر تغییر مکان برای برخی موارد روش مؤثری نیست، از اینرو استفاده از فرمول‌بندی آمیخته را ارائه خواهیم نمود که در آن تنها تغییر مکان‌ها به عنوان متغیرهای حالت مورد استفاده قرار نمی‌گیرند. استفاده از یک روش آمیخته، گزینش دقیق درونیابی‌های مناسبی را ایجاب می‌کند، و از اینرو در بخش پایانی این فصل در مورد این موضوع بحث خواهیم کرد.

انواع مختلف فرمول‌بندی‌های مبتنی بر تغییر مکان و فرمول‌بندی‌های آمیخته در متون ارائه شده‌اند؛ ولی همچنان که پیش از این اشاره شد، هدف ما بررسی تمامی این فرمول‌بندی‌ها نیست. در این فصل ما تلاش خود را بیشتر معطوف به شرح برخی اصول مهم و سودمند فرمول‌بندی عناصر محدود خواهیم کرد. برخی کاربردهای اساسی اصول مورد بحث نیز در این فصل و در فصل آینده ارائه خواهند گردید.

۴.۲ فرمول‌بندی روش عناصر محدود مبتنی بر تغییر مکان

روش عناصر محدود مبتنی بر تغییر مکان را می‌توان بسطی از روش تغییر مکان تحلیل سازه‌های تیری و خربایی تلقی کرد و از اینرو بررسی فرایند تحلیل، ارزشمند خواهد بود. مراحل اساسی در تحلیل یک سازه تیری یا خربایی با استفاده از روش تغییر مکان عبارتند از:

۱. ایده‌ال‌سازی کل سازه به صورت مجموعه همبسته عناصر تیری و خربایی که در گره‌های سازه‌ای به یکدیگر متصل شده‌اند.

۲. مشخص نمودن تغییر مکان‌های گرهی مجهول که کاملاً پاسخ تغییر مکان سازه ایده‌ال‌سازی شده را تعریف می‌نمایند.

۳. فرمول‌بندی معادلات توازن نیرویی متناظر با تغییر مکان‌های گرهی مجهول و حل این معادلات.

۴. محاسبه توزیع تنش داخلی در عناصر با داشتن تغییر مکان‌های انتهایی عناصر تیری و خربایی.

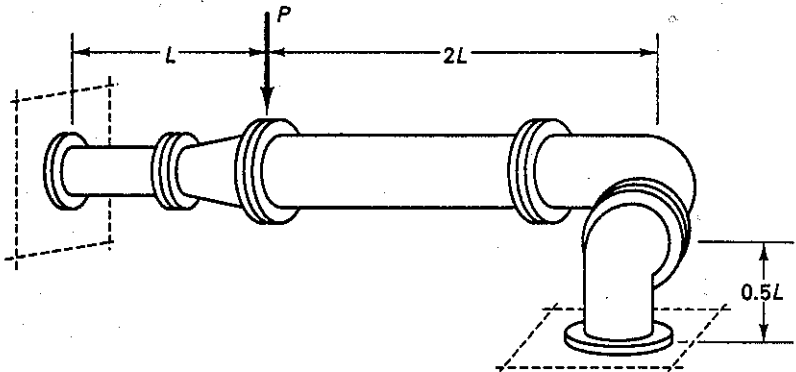
۵. تفسیر تغییر مکان‌ها و تنش‌های حاصل از حل سازه ایده‌ال‌سازی شده بر مبنای فرضیاتی که مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

مهمترین مراحل تحلیل کامل در یک تحلیل و طراحی عملی عبارتند از: ایده‌ال‌سازی مناسب مسأله واقعی که در مرحله ۱ انجام می‌گیرد و تفسیر دقیق و صحیح نتایج که در مرحله ۵ انجام می‌شود. برحسب میزان پیچیدگی سیستم واقعی که می‌خواهد تحلیل شود، برای ایجاد یک ایده‌ال‌سازی مناسب، داشتن معلومات کافی از مشخصات سیستم و رفتار مکانیکی آن مورد لزوم می‌باشد که در این مورد، پیشتر، به اختصار در فصل نخست بحث گردیده است.

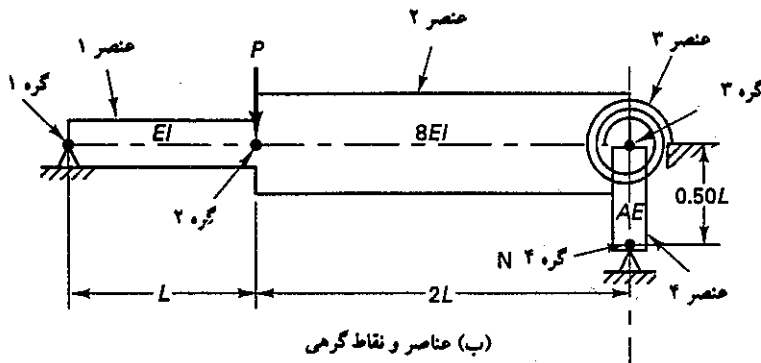
مراحل تحلیل سازه‌ها پیش از این تا حدودی در فصل سوم نشان داده شده‌اند، ولی

ملاحظه یک مثال بسیار پیچیده دیگر می‌تواند اطلاعات سودمند بیشتری را در دسترس بگذارد.

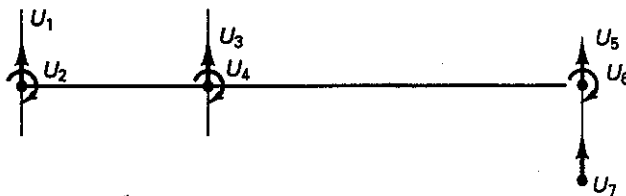
مثال ۴.۱: سیستم لوله کشی که در شکل (الف) نشان داده شده است باید قادر باشد که یک بار جانبی بزرگ P را تحمل نماید که به طور تصادفی بر صفحه مدوری که لوله‌های با قطر کوچک و بزرگ را به هم وصل می‌کند اعمال می‌شود. «این مسأله را تحلیل کنید.»



(الف) سیستم لوله کشی



(ب) عناصر و نقاط گرهی



(ب) درجات آزادی سازه بدون قید در سیستم مختصات کلی

شکل ۴.۱ سیستم لوله کشی و ایده‌آل‌سازی آن

حل:

در مطالعه این مسأله شاید انجام تعدادی تحلیل مورد نیاز باشد که در آنها رفتار سینماتیکی محلی مقطع لوله باید به طور مناسبی مدل شود، رفتارهای غیرخطی هندسی و مصالح در نظر گرفته شوند، مشخصات بار وارده به طور دقیقی مدل شود و غیره. در چنین مطالعه‌ای معمولاً بسیار مفید خواهد بود که کار با یک تحلیل ساده آغاز شود که در آن فرض‌های غیردقیقی در نظر گرفته می‌شوند و سپس تا آنجا که نیاز باشد تحلیل به طرف یک مدل که بیشتر نظریه شده است سوق داده شود (ر.ک. به: بخش ۸.۱.۶).

فرض کنید که در نخستین تحلیل، ما ابتدا می‌خواهیم تغییر مکان یک نقطه از صفحه مدور اتصال دهنده را که بار جانبی به آهستگی در آن نقطه وارد می‌شود محاسبه کنیم. در این حالت معقول است که سازه به صورت مجموعه همبسته عناصر تیری، خربایی و فنری مدل شده و سپس یک تحلیل ایستایی انجام گیرد.

مدل انتخاب شده در شکل (ب) ۴.۱ E نشان داده می‌شود. سازه ایده‌آل‌سازی شده متشکل از دو عنصر تیری، یک عنصر خربایی و یک عنصر فنری می‌باشد. برای تحلیل سازه مذکور نخست ماتریس‌های سختی عنصری را که متناظر با درجات آزادی کلی سیستم نشان داده شده در شکل (پ) ۴.۱ E می‌باشند تعیین می‌نماییم. در این حالت برای هر یک از عناصر تیری، فنری و خربایی، به ترتیب داریم:

$$K_1 = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} \\ & 4 & \frac{6}{L} & 2 \\ \text{symmetric} & & \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ & & & 4 \end{bmatrix}; \quad U_1, U_2, U_3, U_4$$

$$K_2 = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & -\frac{12}{L} & -\frac{12}{L^2} & -\frac{12}{L} \\ & 16 & \frac{12}{L} & 8 \\ \text{symmetric} & & \frac{12}{L^2} & \frac{12}{L} \\ & & & 16 \end{bmatrix}; \quad U_3, U_4, U_5, U_6$$

$$K_3 = k_s; \quad U_6$$

$$K_4 = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}; \quad U_5, U_7$$

که در آن‌ها اندیس پایین در K^e دلالت بر شمارهٔ عنصر دارد و درجات آزادی کلی که متناظر با سختی‌های عنصراند در کنار هر یک از ماتریس‌ها نوشته شده‌اند. باید دانست که در این مثال ماتریس‌های سختی مستقل از کسینوس‌های هادی هستند، زیرا محور مرکزی عناصر در امتداد محورهای کلی می‌باشند. اگر محور محلی یک عنصر در جهت محور کلی نباشد، ماتریس سختی عنصر در مختصات محلی باید تحت تبدیل قرار گیرد تا اینکه ماتریس سختی عنصر در مختصات کلی به دست آید (ر.ک. به: مثال ۴.۱۰).

ماتریس سختی کامل مجموعهٔ همبستهٔ عناصر را می‌توان به طور مؤثری از ماتریس‌های سختی عناصر انفرادی با استفاده از روش مستقیم سختی به دست آورد (ر.ک. به: مثالهای ۳.۱ و ۴.۱۱). در این روش، ماتریس سختی سازه K با جمع نمودن مستقیم ماتریس‌های سختی عنصری محاسبه می‌شود؛ به عبارت دیگر:

$$K = \sum_i K_i^e$$

که در آن مجموعهٔ یابی تمامی عناصر را دربرمی‌گیرد. برای انجام مجموعه‌یابی، هر ماتریس عنصری K_i^e به صورت یک ماتریس $K^{(i)}$ که دارای همان مرتبهٔ ماتریس سختی K می‌باشد، نوشته می‌شود و در آن تمامی عناصر $K^{(i)}$ به جز آنهایی که متناظر با یک درجه آزادی عنصری می‌باشند، صفراند؛ به عنوان مثال، برای عنصر ۴ داریم:

$$K^{(4)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} & \begin{matrix} \leftarrow \text{Degree of freedom} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2AE}{L} & 0 & -\frac{2EA}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2AE}{L} & 0 & \frac{2EA}{L} \end{bmatrix} \end{matrix}$$

بنابراین ماتریس سختی سازه عبارت است از:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{24EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{12EI}{L^2} & 0 \\ & & & \frac{20EI}{L} & \frac{12EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} & 0 \\ & \text{symmetric} & & & \frac{12EI}{L^3} + \frac{2AE}{L} & \frac{12EI}{L^2} & -\frac{2AE}{L} \\ & & & & & \frac{16EI}{L} + k_s & 0 \\ & & & & & & \frac{2AE}{L} \end{bmatrix}$$

و معادلات تعادل برای سیستم عبارتند از:

$$KU = R$$

که در آن U برداری است که شامل تغییر مکانها در مختصات کلی می‌باشد و R بردار نیرویی است که در جهت این تغییر مکان‌ها عمل می‌کند:

$$U^T = [U_1, \dots, U_7]; \quad R^T = [R_1, \dots, R_7]$$

پیش از حل معادلات مزبور برای یافتن تغییر مکان‌های سازه، ضروری است که شرایط مرزی $U_1 = 0$ و $U_7 = 0$ اعمال شوند. این بدان معنی است که ما تنها پنج معادله با پنج مجهول تغییر مکان را در نظر می‌گیریم. به عبارت دیگر:

$$\tilde{K}\tilde{U} = \tilde{R} \quad (\text{الف})$$

ماتریس \tilde{K} از حذف اولین و هفتمین سطر و ستون ماتریس K حاصل می‌گردد، و

$$\tilde{U}^T = [U_2 \ U_3 \ U_4 \ U_5 \ U_6]; \quad \tilde{R}^T = [0 \ -P \ 0 \ 0 \ 0]$$

از حل معادلات (الف) تغییر مکان‌های سازه و نیز تغییر مکان‌های نقاط گرهی به دست می‌آیند. نیروهای گرهی عناصر از ضرب ماتریس‌های سختی عنصر K^e در تغییر مکان‌های آن عنصر حاصل می‌گردند. اگر نیروها در هر مقطعی از یک عنصر مورد نیاز باشند، می‌توان آنها را از

نیروهای انتهای عنصر با استفاده از روابط ساده‌ایستی به دست آورد.

اگر نتایج تحلیل را در نظر بگیریم، ملاحظه می‌شود که اگرچه سازه ایده‌آل‌سازی در شکل (ب) ۴.۱ E به طور دقیق تحلیل گردید، با وجود این تغییر مکان‌ها و تنش‌های حاصل تنها یک پیش‌بینی از پاسخ سازه واقعی می‌باشند. مسلماً این پیش‌بینی تنها هنگامی دقیق خواهد بود که مدل مناسبی انتخاب شود، و در عمل یک مدل خاص برای پیش‌بینی کمیت‌های معینی عموماً کافی است، در حالی که برای پیش‌بینی کمیت‌های دیگر کفایت نمی‌کند. به عنوان مثال، در این تحلیل، تغییر مکان جانبی مورد نیاز تحت اثر بار وارد، با استفاده از ایده‌آل‌سازی شکل (ب) ۴.۱ E، به احتمال زیاد به طور دقیق برآورد می‌شود (البته به شرط آنکه بار به حد کافی آهسته وارد شود، تنش‌ها به اندازه کافی کوچک باشند تا موجب جاری شدن نشود و غیره)، اما تنش‌های حاصل از بار وارد احتمالاً خیلی غیردقیق پیش‌بینی شوند. در حقیقت، یک مدل عناصر محدود تظریف شده و متفاوت مورد نیاز است تا در محاسبه دقیق تنش‌ها مورد استفاده قرار گیرد (ر.ک. به: بخش ۱.۲).

مثال مذکور برخی جنبه‌های مهم روش تحلیل تغییر مکان و روش عناصر محدود را نشان می‌دهد. همچنان که پیش از این به اختصار شرح داده شد، فرایند اساسی بدین گونه است که نخست کل سازه به صورت مجموعه همبسته عناصر سازه‌ای منفرد ایده‌آل‌سازی می‌شود. سپس ماتریس‌های سختی عناصر متناظر با درجات آزادی کلی سازه ایده‌آل‌سازی شده محاسبه می‌شوند و ماتریس سختی کل سازه از مجموع ماتریس‌های سختی عناصر حاصل می‌گردد. حل معادلات تعادل مجموعه همبسته عناصر، تغییر مکان‌های عناصر را نتیجه می‌دهد که بعداً برای محاسبه تنش‌های عناصر به کار می‌روند. سرانجام با در نظر گرفتن این که یک خرپا و تیر ایده‌آل‌سازی شده حل می‌شود، تغییر مکان‌ها و تنش‌های عناصر باید به عنوان تخمینی از رفتار واقعی سازه تفسیر شوند.

اگر تحلیل مجموعه همبسته عناصر خرابایی و تیری نظیر مثال ۴.۱ را در نظر بگیریم، در اصل این گونه تحلیل‌ها را نمی‌توان تحلیل عناصر محدود نامید، زیرا یک تفاوت بزرگ، بین این گونه تحلیل‌ها با تحلیل بسیار عمومی عناصر محدود مسئله دوبعدی یا سه بعدی وجود دارد؛ به عنوان مثال در تحلیل انجام شده در مثال ۴.۱، ماتریس‌های سختی کامل عناصر («کامل» طبق نظریه تیر) را می‌توان محاسبه نمود. خواص سختی یک عنصر تیری، به طور فیزیکی نیروهای انتهایی عنصری هستند که متناظر با تغییر مکان‌های انتهایی گرهی می‌باشند. این نیروها را می‌توان از طریق حل معادلات دیفرانسیل تعادل عنصر، هنگامی که در معرض شرایط مرزی مناسبی باشد، به دست آورد. از آنجا که بر مبنای طبیعت معادلات دیفرانسیل تعادل، تمامی شرایط یک جواب کامل - یعنی تعادل تنش، شرایط سازگاری و شرایط مشخصه - در سرتاسر هر عنصری ارضاء می‌گردند، تغییر مکان‌های داخلی عنصری کامل و ماتریس‌های سختی کامل

به دست می‌آیند. در یک روش دیگر، نیروهای انتهایی عنصری مذکور را می‌توان با انجام یک راه حل وردشی بر مبنای روش Ritz یا روش Galerkin همان‌گونه که در بخش ۳.۳.۴ مورد بحث واقع گردید محاسبه نمود. در چنین روش‌هایی اگر تغییر مکان‌های کامل داخلی عناصر به عنوان توابع آزمون استفاده شوند (ر.ک. به: مثال‌های ۳.۲۲ و ۴.۸)، در این صورت ضرایب سختی کامل عناصر به دست می‌آیند. با وجود این، اگر توابع آزمون دیگری به کار گرفته شوند (که در عمل نیز می‌توانند بسیار مناسب باشند) ضرایب سختی تقریبی به دست می‌آیند.

موقعی که تحلیل‌های بسیار عام‌تر عناصر محدود دوبعدی و سه بعدی مورد نظر باشند، از روش وردشی با توابع آزمون که تغییر مکان‌های واقعی را تقریب‌سازی می‌کنند استفاده می‌شود؛ زیرا برخلاف حالت عناصر تیری و خریایی، توابع تغییر مکان کامل معلوم نمی‌باشند. نتیجه حاصل این است که عموماً معادلات دیفرانسیل تعادل ارضاء نمی‌شوند، اما خطای مذکور با نظریه شبکه عناصر محدود سازه یا محیط پیوسته ایده‌آل‌سازی شده کاهش پیدا می‌کند.

فرمول‌بندی عمومی روش عناصر محدود مبتنی بر تغییر مکان براساس اصل تغییر مکان‌های مجازی استوار است و همان‌گونه که در بخش ۳.۳.۴ مورد بحث واقع گردید، معادل استفاده از روش Galerkin و نیز هم‌ارز کاربرد روش Ritz برای مینیمم‌سازی پتانسیل کلی سیستم می‌باشد.

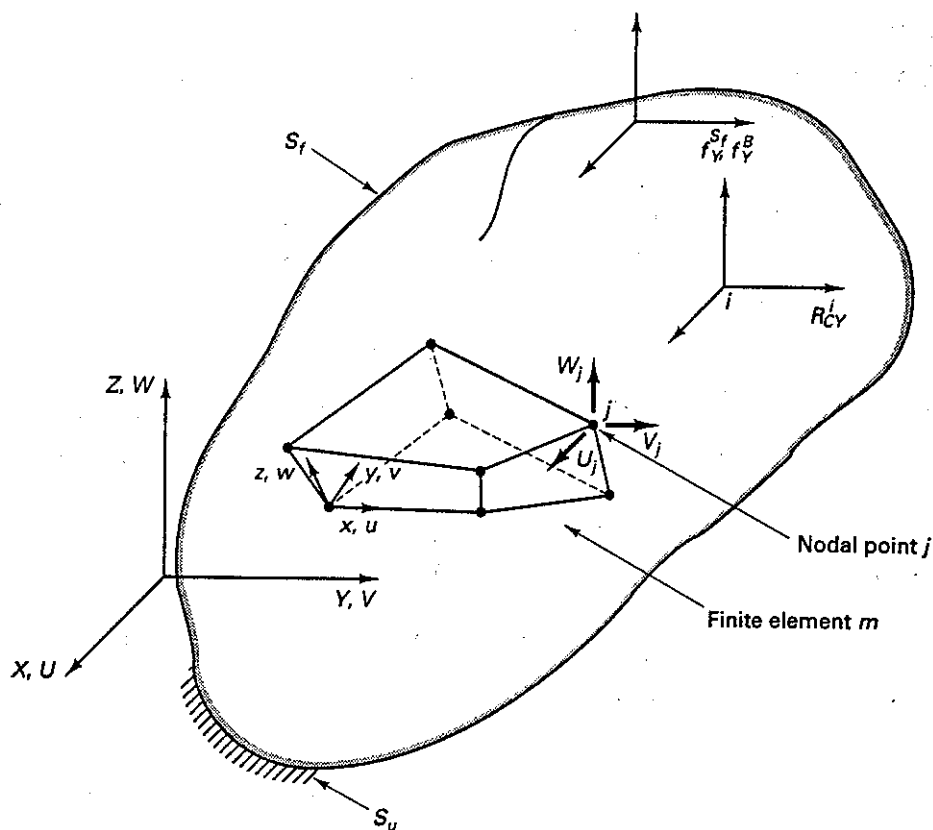
۴.۲.۱ روش عمومی استخراج معادلات تعادل عناصر محدود

در این بخش، نخست مسأله ارتجاعی عمومی را که حل آن مورد نظر می‌باشد بیان می‌کنیم، سپس در مورد اصل تغییر مکان‌های مجازی که اساس و پایه روش حل عناصر محدود می‌باشد بحث کرده معادلات عناصر محدود را استخراج می‌نماییم. در مرحله بعدی برخی نکات مهم در مورد ارضای تعادل تنش‌ها را شرح داده و سرانجام در مورد برخی جزئیات فرایند سوار کردن ماتریس‌های عنصری بحث می‌کنیم.

بیان مسأله

تعادل یک جسم سه بعدی عمومی را به گونه‌ای که در شکل ۴.۱ نشان داده شده است، در نظر می‌گیریم. جسم در یک دستگاه مختصات ثابت (X, Y, Z) قرار گرفته است. اگر ناحیه سطحی جسم را در نظر بگیریم، جسم در سطح S دارای تکیه‌گاه‌هایی با تغییر مکان‌های از

پیش تعیین شده U^S می‌باشد و نیز در ناحیه سطحی $S_f^{(1)}$ تحت اثر نیروهای سطحی f^S (نیرو در واحد ناحیه سطحی) است.



شکل ۴.۱ جسم سه بعدی عمومی با عنصر ۸ گرهی سه بعدی

(۱) برای آسانی، فرض می‌کنیم که تمامی مؤلفه‌های تغییر مکان در S_u از پیش تعیین شده می‌باشند که در این حالت $S_u \cap S_f = 0$ و $S_u \cup S_f = S$. با وجود این، در عمل شاید بهتر باشد که در یک نقطه سطحی، تغییر مکان (یا تغییر مکان‌های) متناظر با برخی جهت‌ها اعمال شود (یا شوند)، و متناظر با سایر جهات باقی مانده، مؤلفه (یا مؤلفه‌های) نیرو اعمال گردند. به عنوان مثال، یک شرط مرزی غلظتی در یک جسم سه بعدی متناظر با یک تغییر مکان صفر اعمال شده در جهت عمود بر سطح جسم خواهد بود، ولی نیروهای سطحی، در جهت مماس بر سطح جسم اعمال می‌شوند (که اغلب این نیروها برابر صفر می‌باشند). در چنین حالاتی، نقطه سطحی متعلق به S_u و S_f خواهد بود. با وجود این بعداً در فرمول‌بندی عناصر محدود، ابتدا تمامی قیدهای تغییر مکانی را حذف خواهیم کرد (شرایط تکیه‌گاهی) و فرض خواهیم نمود که واکنش‌های تکیه‌گاهی معلوم می‌باشند و از اینرو در نظر می‌گیریم که $S_f = S$ و $S_u = 0$ و سپس بعد از استخراج معادلات عناصر محدود حاکم، قیدهای تغییر مکانی را اعمال خواهیم کرد. از اینرو، این فرض که تمامی مؤلفه‌های تغییر مکان در S_u از پیش تعیین شده می‌باشند، صرفاً جهت سهولت در ارائه فرمول‌بندی استفاده می‌شود و به هیچ وجه محدودیتی را در فرمول‌بندی ما ایجاد نمی‌کند.

همچنین، جسم تحت اثر نیروهای جسمی خارجی f^B (نیروها در واحد حجم) و بارهای متمرکز R^i می‌باشند (i نقطه محل اعمال بار را نشان می‌دهد). نیروهای R^i را به عنوان کمیت‌های جداگانه در تحلیل وارد می‌کنیم، گرچه این چنین نیروهایی را می‌توان به عنوان نیروهای سطحی f^{sf} که در یک سطح بسیار کوچکی وارد می‌شوند در نظر گرفت (که معمولاً چنین حالتی، شرایط فیزیکی واقعی را با دقت بیشتری مدل می‌کند). در حالت کلی، نیروهای وارد خارجی دارای سه مؤلفه متناظر با محورهای مختصات X و Y و Z می‌باشند:

$$f^B = \begin{bmatrix} f_x^B \\ f_y^B \\ f_z^B \end{bmatrix}; \quad f^{sf} = \begin{bmatrix} f_x^{sf} \\ f_y^{sf} \\ f_z^{sf} \end{bmatrix}; \quad R_C^i = \begin{bmatrix} R_{Cx}^i \\ R_{Cy}^i \\ R_{Cz}^i \end{bmatrix} \quad (4.1)$$

یادآوری می‌کنیم که مؤلفه‌های f^B و f^{sf} به عنوان تابعی از X و Y و Z تغییر می‌کنند (و برای f^{sf} مختصات ویژه X و Y و Z ، متعلق به S_f در نظر گرفته می‌شود).
تغییر مکان‌های جسم که با U نشان داده می‌شوند از بافتار بارگذاری نشده، در دستگاه مختصات X و Y و Z اندازه گرفته می‌شوند:

$$U(X, Y, Z) = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

و در ناحیه سطحی S_u ، $U = U^s_u$ می‌باشد. کرنش‌های متناظر با U عبارتند از:

$$\epsilon^T = [\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \epsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}] \quad (4.3)$$

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial X}; \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial V}{\partial Y}; \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial Z}; \quad \text{که در آن داریم:}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial Y}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Z} \quad (4.4)$$

تنش‌های متناظر با ϵ عبارتند از:

$$\tau^T = [\tau_{xx} \quad \tau_{yy} \quad \tau_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}] \quad (4.5)$$

که در آن داریم:

$$\tau = C\epsilon + \tau' \quad (4.6)$$

در رابطه (۴.۶)، C ماتریس تنش-کرنش مصالح بوده و بردار τ' تنش‌های اولیه را نشان می‌دهد [با مؤلفه‌هایی که همچون بردار تنش (۴.۵) مرتب شده‌اند].

حال مسأله مورد تحلیل به صورت زیر می‌باشد:
معلومات داده شده مسأله

هندسه جسم، بارهای وارده f^B ، f^{S_j} و R_i^B ($i = 1, 2, \dots$)، شرایط تکیه‌گاهی در S_u ،
قانون تنش - کرنش مصالح و تنش‌های اولیه در جسم.

خواسته‌های مسأله که باید محاسبه گردند

تغییر مکان‌های U جسم و کرنش‌های ϵ و تنش‌های τ متناظر.

در مسأله مورد نظر، شرایط تحلیل خطی را در نظر می‌گیریم که ایجاب می‌کنند که:
تغییر مکان‌ها بسیار کوچک باشند، به گونه‌ای که روابط (۴.۴) معتبر بوده و معادلات
تعادل جسم را بتوان نسبت به بافتار بارگذاری نشده ایجاد نمود و برای آن بافتار نیز حل
کرد.

ماتریس تنش - کرنش مصالح می‌تواند به عنوان تابعی از X و Y و Z تغییر کند اما این
ماتریس بستگی به حالت تنش ندارد و ثابت می‌باشد.

شرایط تحلیل غیرخطی را که در آن یک یا بیشتر فرض‌های فوق تأمین نمی‌شوند، در
فصل‌های ششم و هفتم در نظر خواهیم گرفت.

برای محاسبه پاسخ جسم، می‌توان معادلات دیفرانسیل تعادل حاکم را ایجاد نمود و
سپس آنها را با در نظر گرفتن شرایط مرزی حل کرد (ر.ک. به: بخش ۳.۳). با وجود این
راه‌حل‌های تحلیلی بسته فرم تنها هنگامی امکان‌پذیر است که هندسه‌های نسبتاً ساده‌ای در نظر
گرفته شوند.

اصل تغییر مکان‌های مجازی

اساس روش عناصر محدود مبتنی بر تغییر مکان، اصل تغییر مکان‌های مجازی (که اصل کار
مجازی نیز نامیده می‌شود) است. اصل مذکور بیان می‌کند که تعادل جسم نشان داده شده در
شکل ۴.۱ ایجاب می‌نماید که برای تغییر مکان‌های مجازی کوچک^(۲) سازگار (که در تغییر
مکان‌های از پیش تعیین شده و متناظر با آنها صفر می‌باشند)^(۳) که به جسم در حال تعادل اعمال

(۲) در اینجا تصریح می‌کنیم که تغییر مکان‌های مجازی «کوچک» هستند، زیرا کرنش‌های مجازی متناظر با این تغییر مکان‌ها با استفاده از
معیار کرنش کوچک محاسبه شده‌اند (ر.ک. به: مثال ۴.۲). در واقع، به شرط اینکه معیار کرنش کوچک استفاده شود، تغییر مکان‌های
مجازی دارای هر مقداری می‌توانند باشند و بعداً ما مقادیر مناسبی را برای حل انتخاب خواهیم کرد.

(۳) در اینجا عبارت «در تغییر مکان‌های از پیش تعیین شده و متناظر با آنها» را بدین معنی استفاده می‌کنیم که «در نقاط و سطوح و متناظر
با مؤلفه‌های تغییر مکان که به آن نقاط و سطوح اعمال می‌شوند».

می‌شود، کل کار مجازی داخلی مساوی با کل کار مجازی خارجی می‌باشد:

کار مجازی خارجی R کار مجازی داخلی

$$\int_V \bar{\epsilon}^T \tau dV = \int_V \bar{U}^T f^B dV + \int_{S_f} \bar{U}^T f^S dS + \sum_i \bar{U}^T R_i^C$$

تنش‌های در حال تعادل با بارهای وارده

کرنش‌های مجازی متناظر با تغییر مکان‌های مجازی \bar{U}

(۴.۷)

که در آن \bar{U} تغییر مکان‌های مجازی و $\bar{\epsilon}$ کرنش‌های مجازی متناظر می‌باشند (خط تیره بالای U و ϵ کمیت‌های مجازی را نشان می‌دهد).

صفت «مجازی» نشان می‌دهد که تغییر مکان‌های مجازی (و کرنش‌های مجازی متناظر با آنها) تغییر مکان‌های «حقیقی» نمی‌باشند که در واقع جسم بعلت بارهای وارده، آنها را متحمل می‌شود. در عوض، تغییر مکان‌های مجازی کاملاً مستقل از تغییر مکان‌های واقعی بوده و صرفاً توسط تحلیل‌گر به طور ذهنی برای ایجاد معادله تعادل (۴.۷) به کار می‌رود. به نکاتی چند در مورد رابطه (۴.۷) تأکید می‌کنیم:

تنش‌های τ کمیت‌های معلومی فرض شده و منحصر به فرد می‌باشند^(۴) و کاملاً بارهای وارده را متوازن می‌کنند.

کرنش‌های مجازی $\bar{\epsilon}$ با استفاده از روابط (۴.۴) و مشتق‌گیری از تغییر مکان‌های مجازی فرض شده \bar{U} محاسبه می‌گردند.

تغییر مکان‌های مجازی \bar{U} باید یک میدان پیوسته تغییر مکان مجازی را نمایش دهند (برای اینکه تعیین $\bar{\epsilon}$ امکان‌پذیر باشد). \bar{U} در تغییر مکان‌های از پیش تعیین شده در سطح S_k و متناظر با آنها باید صفر باشد؛ همچنین مؤلفه‌های U^S تغییر مکان‌های مجازی \bar{U} هستند که در سطح S_k تعیین شده‌اند.

تمامی انتگرال‌گیری‌ها در روی حجم و سطح اولیه جسم که تغییر مکان‌های مجازی اعمال شده تأثیری در آنها ندارند انجام می‌گیرد.

برای توضیح بیشتر در مورد استفاده از اصل تغییر مکان‌های مجازی، فرض می‌کنیم که اعتقادمان بر این است (گرچه مطمئن نیستیم) که جواب کامل میدان تغییر مکان جسم معلوم است. این میدان تغییر مکان پیوسته بوده و شرایط مرزی تغییر مکان در S_k ارضاء می‌کند. در

(۴) برای اثبات این که تنش‌های مذکور منحصر به فرد می‌باشند، ر.ک. به: بخش ۴.۳.۴.

این صورت می‌توانیم ϵ و τ (متناظر با این میدان تغییر مکان) را محاسبه نماییم. بردار τ شامل تنش‌های صحیح است، اگر و فقط اگر تغییر مکان‌های مجازی اختیاری \bar{u} که پیوسته بوده و در تغییر مکان‌های از پیش تعیین شده در S_u و متناظر با آنها صفر می‌باشند، در معادله (۴.۷) صدق کنند. به عبارت دیگر، اگر بتوانیم یک میدان تغییر مکان مجازی \bar{u} را پیدا کنیم که در رابطه (۴.۷) صدق نکند، در این صورت ثابت کرده‌ایم که τ بردار تنش صحیح نمی‌باشد (و بنابراین میدان تغییر مکان داده شده، جواب کامل میدان تغییر مکان جسم نمی‌باشد).

در مثال‌های زیر اصل تغییر مکان‌های مجازی را استخراج نموده و نشان خواهیم داد.

مثال ۴.۲: اصل تغییر مکان‌های مجازی را برای یک جسم عمومی سه بعدی شکل ۴.۱

استخراج نمایید.

حل:

برای سهولت در نمایش روابط معادلات، نمادگذاری اندیسی را با قرارداد مجموع‌یابی (ر.ک. به: بخش ۲.۴) استفاده می‌کنیم، x_i ، i امین محور مختصات ($x_1 \equiv X, x_2 \equiv Y, x_3 \equiv Z$) را نشان می‌دهد. u_i ، i امین مؤلفه تغییر مکان ($u_1 \equiv U, u_2 \equiv V, u_3 \equiv W$) را نمایش می‌دهد و علامت کاما بیانگر مشتق‌گیری می‌باشد.

شرایط مرزی تغییر مکان، u_i^u در S_u می‌باشند، و فرض می‌کنیم که بارهای متمرکز سطحی وجود ندارند، به عبارت دیگر مؤلفه‌های f_i^f تمامی بارهای سطحی را شامل می‌شوند.

جواب مسأله باید در معادلات دیفرانسیل زیر صدق کند (به عنوان مثال ر.ک. به:

(S. Timoshenko and J.N. Goodier [A])

$$\tau_{ij,j} + f_i^b = 0 \quad \text{(الف)}$$

در سرتاسر جسم

با شرایط مرزی طبیعی (نیرویی) زیر:

$$\tau_{ij} n_j = f_i^f \quad \text{on } S_f \quad \text{(ب)}$$

و با شرایط مرزی اساسی (تغییر مکانی) زیر:

$$u_i = u_i^u \quad \text{on } S_u \quad \text{(پ)}$$

که در آنها $S = S_u \cup S_f$ و $S_u \cap S_f = 0$ و n_j مؤلفه‌های بردار واحد عمود بر سطح S جسم است.

حال هر بردار شامل تغییر مکان‌های پیوسته اختیاری \bar{u}_i را که در روابط زیر صدق می‌کنند

در نظر می‌گیریم:

$$\bar{u}_i = 0 \quad \text{on } S_u \quad \text{(ت)}$$

در این صورت داریم:

$$(\tau_{ij,j} + f_i^b) \bar{u}_i = 0$$

و بنابراین:

$$\int_V (\tau_{ij,j} + f_i^B) \bar{u}_i dV = 0 \quad (\text{ث})$$

\bar{u}_i را تغییر مکان‌های مجازی می‌نامیم. توجه شود از آنجا که \bar{u}_i اختیاری می‌باشند، رابطه (ث) تنها هنگامی ارضا می‌شود که مقادیر داخل پرانتز از بین بروند، در این صورت (ث) معادل (الف) خواهد بود.

با استفاده از اتحاد ریاضی $(\tau_{ij} \bar{u}_i)_{,j} = \tau_{ij,j} \bar{u}_i + \tau_{ij} \bar{u}_{i,j}$ ، از (ث) رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\int_V [(\tau_{ij} \bar{u}_i)_{,j} - \tau_{ij} \bar{u}_{i,j} + f_i^B \bar{u}_i] dV = 0$$

سپس با استفاده از اتحاد $\int_V (\tau_{ij} \bar{u}_i)_{,j} dV = \int_S (\tau_{ij} \bar{u}_i) n_j dS$ که از قضیه دیورژانس^(۵) نتیجه می‌شود (به عنوان مثال ر.ک. به: R. L. Finney [A] و G. B. Thomas)، نتیجه زیر را داریم:

$$\int_V (-\tau_{ij} \bar{u}_{i,j} + f_i^B \bar{u}_i) dV + \int_S (\tau_{ij} \bar{u}_i) n_j dS = 0 \quad (\text{ج})$$

با در نظر گرفتن (ب) و (ت)، رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\int_V (-\tau_{ij} \bar{u}_{i,j} + f_i^B \bar{u}_i) dV + \int_{S_f} f_j^S \bar{u}_j^S dS = 0 \quad (\text{چ})$$

همچنین به علت تقارن تانسور تنش $(\tau_{ij} = \tau_{ji})$ ، داریم:

$$\tau_{ij} \bar{u}_{i,j} = \tau_{ij} [\frac{1}{2} (\bar{u}_{i,j} + \bar{u}_{j,i})] = \tau_{ij} \bar{\epsilon}_{ij}$$

از اینرو از (چ)، جواب مورد نیاز را که همان رابطه (۴.۷) می‌باشد، به دست می‌آوریم.

$$\int_V \tau_{ij} \bar{\epsilon}_{ij} dV = \int_V f_i^B \bar{u}_i dV + \int_{S_f} f_j^S \bar{u}_j^S dS \quad (\text{ح})$$

توجه شود که در (ح) از نمادگذاری تانسوری برای کرنش‌ها استفاده کردیم، بنابراین کرنش‌های برشی مهندسی استفاده شده در (۴.۷) از طریق جمع مؤلفه‌های تانسور مناسب کرنش برشی حاصل می‌گردند، به عنوان مثال، $\bar{\gamma}_{xy} = \bar{\epsilon}_{12} + \bar{\epsilon}_{21}$. همچنین توجه شود که با استفاده از (ب) [و (پ)] در (ج)، به طور صریح شرایط مرزی طبیعی را در اصل تغییر مکان‌های مجازی (ح) وارد نموده‌ایم.

(۵) قضیه دیورژانس بیان می‌کند: فرض کنید \mathbf{F} یک میدان برداری در حجم V باشد، در این صورت داریم:

$$\int_V F_{i,i} dV = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

که در آن \mathbf{n} یک بردار واحد به سمت خارج عمود بر سطح S از V می‌باشد.

مثال ۴.۳: میله نشان داده شده در شکل ۴.۳ را در نظر بگیرید.

(الف) معادله اصل تغییر مکان‌های مجازی (۴.۷) را برای این مسأله به کار ببرید.

(ب) پاسخ کامل مدل ریاضی را پیدا کنید.

(پ) نشان دهید که به ازای پاسخ کامل تغییر مکان، اصل تغییر مکان‌های مجازی با روابط تغییر مکان زیر ارضا می‌گردد:

$$(i) \bar{u} = ax$$

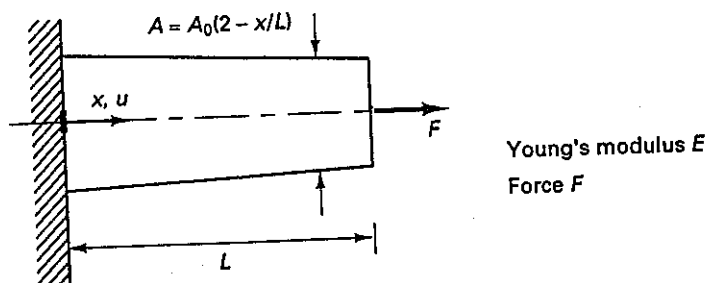
$$(ii) \bar{u} = ax^2.$$

که در آنها a یک مقدار ثابت است.

(ت) فرض کنید که جواب تنش عبارت است از:

$$\tau_{xx} = \frac{F}{\frac{3}{2}A_0}$$

به عبارت دیگر τ_{xx} ، نیروی F تقسیم بر سطح مقطع متوسط است؛ و بررسی کنید که آیا روابط تغییر مکان داده شده در (پ)، در معادله مربوط به اصل تغییر مکان‌های مجازی صدق می‌کنند یا نه؟



شکل ۴.۳ میله تحت اثر بار متمرکز F

حل:

اگر بطور خاص، اصل تغییر مکان‌های مجازی (۴.۷) را برای این مسأله میله بکار ببریم، نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\int_0^L \frac{d\bar{u}}{dx} EA \frac{du}{dx} dx = \bar{u} \Big|_{x=L} F \quad (\text{الف})$$

معادلات دیفرانسیل حاکم با استفاده از انتگرال‌گیری جزء به جزء به دست می‌آیند (ر.ک.

به: مثال ۳.۱۹):

$$\bar{u}EA \frac{du}{dx} \Big|_0^L - \int_0^L \bar{u} \frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) dx = \bar{u} \Big|_{x=L} F \quad (\text{ب})$$

از آنجا که $\bar{u}|_{x=0} = 0$ بوده و \bar{u} در موقعیت های دیگر اختیاری است، از اینرو از (ب) روابط زیر حاصل می شوند:

$$\text{معادله دیفرانسیل تعادل} \quad \frac{d}{dx} \left(EA \frac{du}{dx} \right) = 0 \quad (\text{پ})$$

$$\text{شرط مرزی نیرویی و یا طبیعی} \quad EA \frac{du}{dx} \Big|_{x=L} = F \quad (\text{ت})$$

البته شرط مرزی تغییر مکانی $u|_{x=0} = 0$ نیز وجود دارد. با انجام انتگرال گیری در روی (پ) و با استفاده از شرایط مرزی، رابطه زیر را به عنوان جواب کامل مدل ریاضی به دست می آوریم:

$$u = \frac{FL}{EA_0} \ln \left(\frac{2}{2 - x/L} \right) \quad (\text{ث})$$

در مرحله بعدی، با استفاده از (ث) و $\bar{u} = ax^2$ در معادله (الف)، رابطه زیر را به دست می آوریم:

$$\int_0^L a \frac{F}{A_0(2 - x/L)} A_0 \left(2 - \frac{x}{L} \right) dx = aLF \quad (\text{ج})$$

و

$$\int_0^L 2ax \frac{F}{A_0(2 - x/L)} A_0 \left(2 - \frac{x}{L} \right) dx = aL^2F \quad (\text{ج})$$

معادلات (ج) و (ج) نشان می دهند که به ازای پاسخ تغییر مکان / تنش، اصل تغییر مکان های مجازی با تغییر مکان های مجازی فرض شده ارضا می گردد.

حال اصل تغییر مکان های مجازی را با $\tau_{xx} = \frac{2}{3}(F/A_0)$ به کار می بردیم و ابتدا از $\bar{u} = ax$ و سپس از $\bar{u} = ax^2$ استفاده می کنیم. با $\bar{u} = ax$ رابطه زیر را بدست می آوریم:

$$\int_0^L a \frac{2}{3} \frac{F}{A_0} A_0 \left(2 - \frac{x}{L} \right) dx = aLF$$

که نشان می دهد که اصل تغییر مکان های مجازی با این میدان تغییر مکان مجازی ارضا می گردد. برای $\bar{u} = ax^2$ ، رابطه زیر را به دست می آوریم:

$$\int_0^L 2ax \frac{2}{3} \frac{F}{A_0} A_0 \left(2 - \frac{x}{L} \right) dx \neq aL^2F$$

و این معادله نشان می دهد که $\tau_{xx} = \frac{2}{3}(F/A_0)$ جواب صحیح تنش نیست.

اصل تغییر مکان‌های مجازی را می‌توان مستقیماً به این اصل که پتانسیل کلی سیستم Π باید مانا باشد، ارتباط داد (ر.ک. به: بخش‌های ۳.۳.۲ و ۳.۳.۴). ارتباط این دو اصل را در مثال زیر مطالعه می‌کنیم.

مثال ۴.۴: برای یک محیط پیوسته ارتجاعی خطی نحوه ارتباط اصل تغییر مکان‌های مجازی را با اصل مانا بودن پتانسیل کلی نشان دهید.

حل:

با فرض یک محیط پیوسته ارتجاعی خطی با تنش‌های اولیه صفر، پتانسیل کلی جسم شکل ۴.۱ عبارت است از:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \epsilon^T C \epsilon \, dV - \int_V U^T f^B \, dV - \int_{S_f} U^{S_f T} f^{S_f} \, dS - \sum_i U^i T R_i^c \quad (\text{الف})$$

که در آن از همان نمادگذاری که پیش از این تعریف شده است استفاده می‌شود، و همچنین داریم:

$$\tau = C \epsilon$$

که در آن C ماتریس تنش - کرنش مصالح است.

با استفاده از شرط مانا بودن Π ، به عبارتی با تعیین $\delta \Pi = 0$ نسبت به تغییر مکان‌ها (که حالا در کرنش‌ها ظاهر می‌شوند) و با استفاده از این واقعیت که C متقارن است، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$\int_V \delta \epsilon^T C \epsilon \, dV = \int_V \delta U^T f^B \, dV + \int_{S_f} \delta U^{S_f T} f^{S_f} \, dS + \sum_i \delta U^i T R_i^c \quad (\text{ب})$$

ولی، برای تعیین Π در (الف)، تغییر مکان‌ها باید شرایط مرزی تغییر مکانی را تأمین نمایند. بنابراین در (ب)، هرگونه تغییری را در تغییر مکان‌ها و کرنش‌ها می‌توانیم در نظر بگیریم، اما در شرایط مرزی تغییر مکانی و متناظر با آنها این تغییرات برابر صفراند. از اینرو این نتیجه حاصل می‌شود که استفاده از مانا بودن Π هم‌ارز با استفاده از تغییر مکان‌های مجازی است، و در حقیقت می‌توانیم بنویسیم:

$$\delta \epsilon \equiv \bar{\epsilon}; \quad \delta U \equiv \bar{U}; \quad \delta U^{S_f} \equiv \bar{U}^{S_f}; \quad \delta U^i \equiv \bar{U}^i$$

بنابراین (ب) به صورت رابطه (۴.۷) درمی‌آید.

ملاحظه این نکته مهم است که هرگاه اصل تغییر مکان‌های مجازی (۴.۷) به ازای تمامی تغییر مکان‌های مجازی قابل قبول ارضا شود و این تغییر مکان‌ها همراه با تنش‌های τ باشند که "به طور مناسبی از یک میدان تغییر مکان پیوسته U به دست می‌آیند"، به گونه‌ای که میدان مذکور شرایط مرزی تغییر مکانی در K را تأمین می‌نماید، در این صورت هر سه شرط بنیادی

مکانیک برآورده می‌شوند:

۱. تعادل صادق است، زیرا همان‌گونه که در مثال ۴.۲ نشان داده شد، اصل تغییر مکان‌های مجازی بیانی دیگر از رابطه تعادل می‌باشد.
۲. سازگاری صادق است، زیرا میدان تغییر مکان U پیوسته بوده و شرایط مرزی تغییر مکانی را تأمین می‌نماید.
۳. قانون تنش - کرنش صادق است، زیرا تنش‌های T با استفاده از روابط مشخصه از کرنش‌های ϵ محاسبه می‌شوند (که این کرنش‌ها نیز از تغییر مکان‌های U به دست آمده‌اند).

تاکنون فرض نموده‌ایم که جسم مورد نظر دارای تکیه‌گاه‌های مناسبی است، به عبارت دیگر برای یک جواب منحصر به فرد تغییر مکان، شرایط تکیه‌گاهی کافی وجود دارد. با وجود این اصل تغییر مکان‌های مجازی همچنین هنگامی صادق است که تمامی تکیه‌گاهها برداشته شوند و در عوض عکس‌العملهای تکیه‌گاهی صحیح (که بعداً معلوم فرض می‌شوند) اعمال شوند. در این حالت ناحیه سطحی S_k که نیروهای سطحی به آن وارد می‌شوند مساوی سطح کامل S جسم است (و S_k صفر می‌باشد) ^(۶). از این نکته اساسی در ایجاد و بسط معادلات عناصر محدود حاکم استفاده خواهیم کرد. به عبارت دیگر، از نکته نظر مفهومی مناسب است که نخست هیچ نوع شرایط مرزی تغییر مکانی را در نظر نگیریم و بر مبنای آن معادلات عناصر محدود حاکم را ایجاد و بسط داده و سپس پیش از حل این معادلات تمامی شرایط مرزی تغییر مکانی را اعمال کنیم.

معادلات عناصر محدود

حال می‌خواهیم معادلات عناصر محدود حاکم را استخراج کنیم. در ابتدا پاسخ یک جسم عمومی سه بعدی نشان داده شده در شکل ۴.۱ را در نظر می‌گیریم و سپس این فرمول‌بندی عمومی را برای مسائل خاص به کار می‌بریم (ر.ک. به: بخش ۴.۲.۳).

در تحلیل عناصر محدود، جسم شکل ۴.۱ را به صورت مجموعه همبسته از عناصر محدود گسسته که در نقاط گرهی در مرزها با یکدیگر اتصال یافته‌اند، تقریب‌سازی می‌کنیم. تغییر مکان‌ها که در یک دستگاه مختصات محلی z و y و x درون عنصر اندازه گرفته می‌شوند (این دستگاه مختصات اختیاری انتخاب می‌گردند)، تابعی از تغییر مکان‌ها در N نقطه گرهی عناصر محدود فرض می‌شوند. بنابراین برای عنصر m داریم:

(۶) بدین دلیل و نیز برای سهولت در نمادگذاری، دیگر از اندیس‌های بالای S_k و S استفاده نخواهیم کرد (به عبارت دیگر تا بخش ۴.۴.۲ و صرفاً اندیس بالای S را در نیروهای سطحی و تغییر مکان‌های سطحی به کار خواهیم برد).

$$\mathbf{u}^{(m)}(x, y, z) = \mathbf{H}^{(m)}(x, y, z) \hat{\mathbf{U}} \quad (۴.۸)$$

که در آن $\mathbf{H}^{(m)}$ ماتریس درون‌یابی تغییر مکان است و اندیس بالای m ، عنصر m را نشان می‌دهد و $\hat{\mathbf{U}}$ برداری شامل سه مؤلفه تغییر مکان U_i و V_i و W_i در مختصات کلی در تمام نقاط گرهی و نقاط تکیه‌گاهی مجموعه همبسته عناصر می‌باشد، به عبارت دیگر $\hat{\mathbf{U}}$ برداری است که شامل $3N$ عضو می‌باشد:

$$\hat{\mathbf{U}}^T = [U_1 \ V_1 \ W_1 \ U_2 \ V_2 \ W_2 \ \dots \ U_N \ V_N \ W_N] \quad (۴.۹)$$

بردار مذکور را در حالت عمومی‌تر می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\hat{\mathbf{U}}^T = [U_1 \ U_2 \ U_3 \ \dots \ U_n] \quad (۴.۱۰)$$

که از آن چنین برداشت می‌شود که U_i می‌تواند متناظر با یک تغییر مکان در هر یک از جهات X یا Y یا Z باشد و یا حتی در راستایی که در امتداد این محورها نمی‌باشد (اما در امتداد محورهای یک دستگاه مختصات محلی دیگری است) و نیز می‌تواند یک دوران در سازه‌های تیری، صفحه‌ای و پوسته‌ای را نشان دهد (ر.ک. به: بخش ۴.۲.۳). از آنجا که $\hat{\mathbf{U}}$ شامل تغییر مکان‌ها (و دوران‌ها) در نقاط تکیه‌گاهی مجموعه همبسته عناصر می‌باشد، ضروری است که در مراحل بعدی تحلیل و پیش از حل معادلات برای یافتن تغییر مکان‌های مجهول نقاط گرهی، مقادیر معلوم $\hat{\mathbf{U}}$ را به عنوان شرایط مرزی تغییر مکانی اعمال کنیم.

شکل ۴.۱ یک عنصر محدود نمونه از یک مجموعه همبسته عناصر محدود را نشان می‌دهد. عنصر مذکور دارای هشت نقطه گرهی است که این نقطه‌ها هر کدام در یکی از گوشه‌ها واقع هستند. این عنصر به عنوان یک عنصر «آجری» تلقی می‌شود. باید اینگونه تصور کرد که کل جسم به صورت مجموعه همبسته از چنین عناصر آجری نمایش داده می‌شود. عناصر آجری به گونه‌ای در کنار هم قرار داده شده‌اند که هیچگونه فاصله‌ای مابین عناصر وجود ندارد. در این جا عنصر مذکور را صرفاً به عنوان یک مثال نشان می‌دهیم. در عمل می‌توان از عناصری با هندسه‌های مختلف و نقاط گرهی متفاوت در وجوه و در درون آنها استفاده شود.

انتخاب عنصر و ایجاد اعضای مربوط به آن در $\mathbf{H}^{(m)}$ (که بستگی به هندسه عنصر، تعداد گره‌ها / درجات آزادی عنصر و شرایط همگرایی دارند)، مراحل اساسی یک تحلیل عناصر محدود را تشکیل می‌دهند که بعداً با جزئیات بیشتر مورد بحث قرار خواهند گرفت.

اگرچه $\hat{\mathbf{U}}$ شامل تمامی تغییر مکان‌های گرهی است، این نکته باید ملاحظه شود که برای یک عنصر مشخص، تنها تغییر مکان‌های نقاط گرهی عنصر، به توزیع‌های تغییر مکان و تنش در آن عنصر تأثیر می‌گذارد.

با فرض مورد نظر برای تغییر مکان‌ها در (۴.۸)، حال می‌توان کرنش‌های مربوط به عنصر را تعیین کرد:

$$\epsilon^{(m)}(x, y, z) = B^{(m)}(x, y, z) \hat{U} \quad (4.11)$$

که در آن $B^{(m)}$ ماتریس کرنش - تغییر مکان می‌باشد؛ سطرهای $B^{(m)}$ از طریق انتگرال‌گیری و ترکیب مناسب سطرهای ماتریس $H^{(m)}$ به دست می‌آیند.

شاید در حال حاضر هدف از تغییر مکان‌ها و کرنش‌های عنصری برحسب آرایه تغییر مکان‌های گرهی مجموعه همبسته عناصر محدود به روشی مشخص نباشد. با وجود این، مشاهده خواهیم کرد که با پیش گرفتن چنین روشی، کاربرد (۴.۸) و (۴.۱۱) در اصل تغییر مکان‌های مجازی به طور خودکار منجر به یک فرایند مؤثر سوار نمودن تمامی ماتریس‌های عناصر در ماتریس‌های کلی سازه می‌شود. فرایند مذکور، «روش مستقیم سختی» نامیده می‌شود.

تنش‌ها در یک عنصر محدود با استفاده از رابطه زیر به کرنش‌ها و تنش‌های اولیه عنصر ارتباط می‌یابند:

$$\tau^{(m)} = C^{(m)} \epsilon^{(m)} + \tau^{l(m)} \quad (4.12)$$

که در آن $C^{(m)}$ ماتریس ارتجاعی عنصر m و $\tau^{l(m)}$ تنش‌های معلوم اولیه عنصر می‌باشند. قانون مصالح برای هر عنصر که در $C^{(m)}$ تعریف می‌شود می‌تواند بر مبنای مصالح ایزوتروپیک یا غیرایزوتروپیک باشد و نیز می‌تواند از عنصری به عنصر دیگر متفاوت باشد.

حال با استفاده از فرض تغییر مکان در درون هر عنصر محدود که به صورت (۴.۸) بیان گردید، می‌توان معادلات تعادل را که متناظر با تغییر مکان‌های نقاط گرهی مجموعه همبسته عناصر محدود می‌باشند، استخراج نمود. ابتدا رابطه (۴.۷) را به صورت مجموعی از انتگرال‌گیری‌ها در روی حجم و سطوح عناصر محدود می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \sum_m \int_{V^{(m)}} \bar{\epsilon}^{(m)T} \tau^{(m)} dV^{(m)} &= \sum_m \int_{V^{(m)}} \bar{u}^{(m)T} f^{S(m)} dV^{(m)} \\ &+ \sum_m \int_{S_1^{(m)}, \dots, S_q^{(m)}} \bar{u}^{S(m)T} f^{S(m)} dS^{(m)} + \sum_i \bar{u}^i T R_i^c \end{aligned} \quad (4.13)$$

که در آن $m = 1, 2, \dots, k$ و k شماره عنصر است و $S_1^{(m)}, \dots, S_q^{(m)}$ سطوح عناصر است که قسمتی از سطح کلی S جسم می‌باشند. برای عنصری که کاملاً به وسیله سایر عناصر احاطه شده‌اند، چنان سطحی وجود ندارد، در حالی که برای عناصر واقع در روی سطح جسم، یک یا

چند سطح در انتگرال نیروی سطحی وارد می‌شوند. توجه شود که فرض می‌کنیم که در (۴.۱۳) نقاط گرهی در نقاطی قرار داده شده‌اند که بارهای متمرکز در آن نقاط اعمال می‌شوند، گرچه انتگرال‌های نیروی سطحی می‌تواند شامل یک بار متمرکز نیز باشد.

توجه به این نکته حائز اهمیت است که چون انتگرال‌گیری‌های (۴.۱۳) در روی حجم‌ها و سطوح عناصر انجام می‌گیرند، برای کارایی بیشتر ممکن است که در محاسبات برای هر عنصر از یک دستگاه مختصات متفاوت و مناسب استفاده شود. در هر حال برای یک میدان تغییر مکان مجازی معلوم، کار مجازی داخلی و کار مجازی خارجی هر دو یک عدد می‌باشند و این عدد را می‌توان در هر دستگاه مختصات از طریق انتگرال‌گیری تعیین نمود. البته فرض بر این است که برای هر انتگرال در (۴.۱۳)، تنها یک دستگاه مختصات منفرد برای تمامی متغیرها مورد استفاده قرار می‌گیرد: به عنوان مثال، $\bar{\mathbf{u}}^{(m)}$ و $\mathbf{f}^{B(m)}$ در دستگاه مختصات یکسانی تعریف می‌شوند. اساساً به دلیل استفاده از دستگاه‌های مختصات متفاوت است که می‌توان در مرحله سوار نمودن عناصر، هر انتگرالی را به طور مؤثری تعیین نمود.

روابط (۴.۸) و (۴.۱۱) برای تغییر مکان‌ها و کرنش‌های مجهول (حقیقی) عنصری داده شده‌اند. در استفاده از اصل تغییر مکان‌های مجازی فرضیات یکسانی را برای تغییر مکان‌ها و کرنش‌های مجازی به کار می‌بریم:

$$\bar{\mathbf{u}}^{(m)}(x, y, z) = \mathbf{H}^{(m)}(x, y, z) \bar{\hat{\mathbf{u}}} \quad (4.14)$$

$$\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{(m)}(x, y, z) = \mathbf{B}^{(m)}(x, y, z) \bar{\hat{\mathbf{u}}} \quad (4.15)$$

بدین طریق ماتریس‌های سختی (و جرم) عناصر، متقارن خواهند بود. اگر روابط (۴.۱۴) و (۴.۱۵) را در رابطه (۴.۱۳) جایگذاری کنیم، رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \bar{\hat{\mathbf{u}}}^T \left[\sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \mathbf{C}^{(m)} \mathbf{B}^{(m)} dV^{(m)} \right] \bar{\hat{\mathbf{u}}} &= \bar{\hat{\mathbf{u}}}^T \left[\left\{ \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{H}^{(m)T} \mathbf{f}^{B(m)} dV^{(m)} \right\} \right. \\ &+ \left\{ \sum_m \int_{S_1^{(m)} \dots S_{j_1}^{(m)}} \mathbf{H}^{S(m)T} \mathbf{f}^{S(m)} dS^{(m)} \right\} \\ &\left. - \left\{ \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \boldsymbol{\tau}^{I(m)} dV^{(m)} \right\} + \mathbf{R}_C \right] \quad (4.16) \end{aligned}$$

که در آن ماتریس‌های درونیابی تغییر مکان سطحی $\mathbf{H}^{S(m)}$ از جایگذاری مختصات مناسب سطحی عنصر در ماتریس‌های درونیابی عنصر $\mathbf{H}^{(m)}$ داده شده در (۴.۸) به دست می‌آیند (ر.ک. به: مثال‌های ۴.۷ و ۵.۱۲) و برداری شامل بارهای متمرکز وارده بر گره‌های مجموعه

همبسته عناصر می‌باشد.

این نکته باید ذکر شود که مؤلفه نام R_c یک نیروی گرهی متمرکز است که متناظر با \bar{U} امین مؤلفه تغییر مکان در بردار \bar{U} می‌باشد. در (۴.۱۶) بردارهای تغییر مکان نقاط گرهی \bar{U} و $\bar{\bar{U}}$ مجموعه همبسته عناصر، مستقل از عنصر m می‌باشند و از اینرو از درون علامت‌های مجموع یابی بیرون کشیده می‌شوند.

برای به دست آوردن معادلات برحسب تغییر مکان‌های مجهول نقاط گرهی از رابطه (۴.۱۶)، اصل تغییر مکان‌های مجازی را به نوبت n بار با اعمال تغییر مکان‌های مجازی واحد برای تمام مؤلفه‌های $\bar{\bar{U}}$ به کار می‌بریم. در نخستین کاربرد^(۷) $\bar{\bar{U}} = e_1$ ، در دومین کاربرد $\bar{\bar{U}} = e_2$ و به همین ترتیب در n امین کاربرد $\bar{\bar{U}} = e_n$ است، در این صورت نتیجه زیر حاصل می‌گردد:

$$\boxed{KU = R} \quad (4.17)$$

که در آن ماتریس همانی I را به علت تغییر مکان‌های مجازی در هر دو طرف معادله نشان نمی‌دهیم و نیز بردار R عبارت است از:

$$\boxed{R = R_B + R_S - R_I + R_C} \quad (4.18)$$

و از این به بعد تغییر مکان‌های مجهول نقاط گرهی را با U نشان می‌دهیم، به عبارت دیگر $U \equiv \bar{U}$ ماتریس K ، ماتریس سختی مجموعه همبسته عناصر است:

$$\boxed{K = \sum_m \underbrace{\int_{V(m)} B^{(m)T} C^{(m)} B^{(m)} dV^{(m)}}_{= K^{(m)}}} \quad (4.19)$$

بردار بار R شامل اثر نیروهای جسمی عنصری:

$$\boxed{R_B = \sum_m \underbrace{\int_{V(m)} H^{(m)T} f^{(m)} dV^{(m)}}_{= R_B^{(m)}}} \quad (4.20)$$

و اثر نیروهای سطحی عنصری:

(۷) برای تعریف بردار e_i به متنی که بعد از رابطه (۲.۷) در فصل دوم ارائه شده است، رجوع شود.

$$R_S = \sum_m \underbrace{\int_{S_1^{(m)} \dots S_l^{(m)}} H^{S(m)} T F^{S(m)} dS^{(m)}}_{= R_S^{(m)}} \quad (4.21)$$

و اثر تنش‌های اولیه عنصری:

$$R_I = \sum_m \underbrace{\int_{V^{(m)}} B^{(m)} T \epsilon^{(m)} dV^{(m)}}_{= R_I^{(m)}} \quad (4.22)$$

و بارهای متمرکز گرهی R_e می‌باشد.

یادآوری می‌کنیم که مجموع انتگرال‌های حجمی عناصر در (۴.۱۹) بیانگر جمع مستقیم ماتریس‌های سختی عنصری $K^{(m)}$ برای بدست آوردن ماتریس سختی کل مجموعه همبسته عناصر است. به این ترتیب، بردار نیروی جسمی مجموعه همبسته عناصر R_B ، مستقیماً از جمع بردارهای نیروی جسمی عناصر $R_B^{(m)}$ حاصل می‌گردد و R_S و R_I نیز به طور مشابهی به دست می‌آیند. فرایند سوار نمودن ماتریس‌های عناصر از طریق جمع مستقیم، روش مستقیم سختی نامیده می‌شود.

اینگونه نوشتن ظرفیت فرایند سوار نمودن ماتریس‌های عناصر منوط به دو عامل می‌باشد: اولاً ابعاد ماتریس‌هایی که با همدیگر جمع می‌شوند باید یکسان باشند و ثانیاً درجات آزادی عناصر مساوی درجات آزادی کلی باشند. البته در عمل تنها سطرها و ستون‌های غیر صفر یک ماتریس عنصر $K^{(m)}$ محاسبه می‌شوند (متناظر با درجات آزادی گرهی واقعی عنصر) و سپس عمل سوار کردن با استفاده از یک آرایه اتصال LM برای هر عنصر انجام می‌گردد (ر.ک. به: مثال ۴.۱۱ و فصل دوازدهم). همچنین در عمل ممکن است که در ابتدا ماتریس سختی عناصر متناظر با درجات آزادی محلی عنصر که در امتداد درجات آزادی کلی نیستند محاسبه شوند که در این حالت قبل از عمل سوار نمودن ماتریس‌ها، تبدیل مختصات ضروری است [ر.ک. به: (۴.۴۱)].

معادله (۴.۱۷) بیانگر تعادل ایستایی مجموعه همبسته عناصر است. در این ملاحظات تعادل، بارهای وارده ممکن است با زمان تغییر کنند که در این حالت تغییر مکان‌ها نیز با زمان تغییر خواهند کرد و (۴.۱۷) بیانگر تعادل در هر لحظه خاص زمانی خواهد بود. (در عمل اعمال بارهای وابسته به زمان را می‌توان برای مدل نمودن حالت‌های بارگذاری چندگانه استفاده نمود، ر.ک. به: مثال ۴.۵). با وجود این اگر در واقعیت بارها به سرعت اعمال شوند، ضروری است که

نیروهای اینرسی که با توجه به فرکانس‌های طبیعی سیستم تعیین می‌گردند، در نظر گرفته شوند، به عبارت دیگر، یک مسأله واقعی دینامیکی باید حل شود. با استفاده از اصل d'Alembert، به آسانی می‌توان نیروهای اینرسی عناصر را به صورت قسمتی از نیروهای جسمی در تحلیل وارد نمود. با در نظر گرفتن این فرض که شتاب‌های عناصر مشابه تغییر مکان‌های عناصر با استفاده از رابطه (۴.۱۸) تقریب‌سازی می‌شوند، نقش نیروهای جسمی کلی در بردار بار R به صورت زیر می‌باشد (در دستگاه مختصات ثابت Z و Y و X):

$$R_B = \sum_m \int_{V^{(m)}} H^{(m)T} [f^{B(m)} - \rho^{(m)} H^{(m)} \ddot{U}] dV^{(m)} \quad (4.23)$$

که در آن $f^{B(m)}$ دیگر شامل نیروهای اینرسی نمی‌باشد، \ddot{U} شامل شتاب‌های نقاط گرهی است (به عبارت دیگر، مشتق دوم U نسبت به زمان) و $\rho^{(m)}$ چگالی جرمی عنصر m می‌باشد. در این حالت معادلات تعادل عبارتند از:

$$M\ddot{U} + KU = R \quad (4.24)$$

که در آن R و U وابسته به زمان می‌باشند. ماتریس M ، ماتریس جرم سازه است:

$$M = \sum_m \int_{V^{(m)}} \rho^{(m)} H^{(m)T} H^{(m)} dV^{(m)} = M^{(m)} \quad (4.25)$$

در پاسخ‌های واقعی دینامیکی سازه‌ها ملاحظه می‌شود که انرژی در حین ارتعاش اتلاف می‌گردد، از اینرو معمولاً انرژی مذکور در تحلیل ارتعاشی با وارد نمودن نیروهای میرایی وابسته به سرعت در نظر گرفته می‌شود. با وارد نمودن نیروهای میرایی در نیروهای جسمی، رابطه زیر را که متناظر با (۴.۲۳) است، به دست می‌آوریم:

$$R_B = \sum_m \int_{V^{(m)}} H^{(m)T} [f^{B(m)} - \rho^{(m)} H^{(m)} \ddot{U} - \kappa^{(m)} H^{(m)} \dot{U}] dV^{(m)} \quad (4.26)$$

در این حالت بردارهای $f^{B(m)}$ دیگر شامل نیروهای میرایی وابسته به سرعت نمی‌باشند و \dot{U} بردار سرعت‌های نقاط گرهی است (به عبارت دیگر، مشتق اول U نسبت به زمان) و $\kappa^{(m)}$ پارامتر خاصیت میرایی عنصر m می‌باشد. در این حالت معادلات تعادل عبارتند از:

$$M\ddot{U} + C\dot{U} + KU = R \quad (4.27)$$

که در آن C ماتریس میرایی سازه می‌باشد:

$$C = \sum_m \underbrace{\int_{V^{(m)}} \kappa^{(m)} \mathbf{H}^{(m)T} \mathbf{H}^{(m)} dV^{(m)}}_{= C^{(m)}} \quad (4.28)$$

در عمل، بسیار دشوار است - گرچه ناممکن نیست - که پارامترهای میرایی عناصر برای مجموعه همبسته عناصر محدود تعیین گردند، زیرا خواص میرایی وابسته به فرکانس می‌باشند. بدین علت است که عموماً برای ایجاد ماتریس C ، از ماتریس‌های میرایی عناصر استفاده نمی‌شود بلکه با استفاده از ماتریس جرم و ماتریس سختی کل مجموعه همبسته عناصر و نتایج تجربی در مورد میزان میرایی، ماتریس C را ایجاد می‌کنند. برخی فرمول‌بندی‌ها که برای ایجاد ماتریس‌های میرایی واقعی مورد استفاده قرار می‌گیرند، در بخش ۹.۳.۳ شرح داده شده‌اند.

بنابراین یک تحلیل کامل شامل محاسبه ماتریس K (و ماتریس‌های M و C در تحلیل دینامیکی) و بردار بار R و حل معادلات (۴.۱۷) برای یافتن پاسخ U [یا U و \dot{U} و \ddot{U} از معادلات (۴.۲۴) یا (۴.۲۷)] و سپس تعیین تنش‌ها با استفاده از (۴.۱۲) می‌باشد. باید تأکید کنیم که تنش‌ها به آسانی با استفاده از (۴.۱۲) به دست می‌آیند - بنابراین داشتن تنش‌های اولیه و تغییر مکان‌های عناصر مورد نیاز می‌باشد - و نیز برخلاف آنچه که در تحلیل سازه‌های قابی با عناصر تیر معمول است، مقادیر تنش برای نیروهای فشاری خارجی وارده بر عناصر و نیز برای نیروهای جسمی عناصر تصحیح نمی‌شوند (ر.ک. به: مثال ۴.۵ و نیز به [A] S. H. Crandall, N. C. Dahl and T. J. Lardner). در تحلیل سازه‌های تیری، هر عنصر یک وضعیت تنش یک بعدی را به نمایش می‌گذارد و تصحیح تنش به علت بارگذاری گسترده با ملاحظه روابط ساده تعادل انجام می‌شود. بنابراین در تحلیل ایستایی، عناصر تیری نسبتاً طولانی را می‌توان به کار برد و در نتیجه برای نمایش یک سازه قابی تنها از تعداد اندکی عنصر (و درجات آزادی) استفاده می‌شود. با وجود این، برای تحلیل عناصر محدود عمومی دوبعدی و سه بعدی یک روش مشابهی مورد نیاز است و حل مسائل مقدار مرزی برای میدانهای عنصری (بزرگ) که مورد استفاده قرار گرفته‌اند و کاربرد شبکه‌های ریزتر برای پیش‌بینی دقیق تغییر مکان‌ها و کرنش‌ها بسیار مؤثر می‌باشد. با چنین گسسته‌سازی‌های ریزی، فواید اصلاح تقریبی تنش‌های برآورد شده برای اثرات بارگذاری گسترده در روی عناصر عموماً اندک است، اگرچه استفاده از یک روش معقول برای موقعیت‌های خاص می‌تواند موجب بهبود قابل توجهی در نتایج شود.

برای نشان دادن استخراج معادلات تعادل عناصر محدود به گونه‌ای که در بالا توضیح داده شده است، مثال‌های زیر را در نظر می‌گیریم.

مثال ۴.۵: معادلات تعادل عناصر محدود سازه میله‌ای نشان داده شده در شکل ۴.۵ E را ایجاد کنید. در مورد مدل ریاضی که برای تحلیل استفاده می‌شود، در مثال‌های ۳.۱۷ و ۳.۲۲ بحث شده

است. سازه مذکور با استفاده از عناصر میله‌ای دو گرهی ایده‌آل‌سازی شده است، و دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

۱. فرض کنید که بارها خیلی آهسته اعمال می‌شوند (در مقایسه با زمان‌های تناوب طبیعی سازه).
 ۲. فرض کنید که بارها به سرعت اعمال می‌شوند. سازه در ابتدا در حالت سکون است.
- در فرمول‌بندی معادلات تعادل عناصر محدود، معادلات عمومی (۴.۸) الی (۴.۲۴) را به کار ببرید، ولی فرض کنید که تنها تنش طولی، تنش غیر صفر است. همچنین کل میله را به صورت یک مجموعه همبسته از دو عنصر میله‌ای دو گرهی در نظر بگیرید که متناظر با فرض یک تغییر خطی تغییر مکان بین نقاط گرهی هر عنصر است.

حل:

گام اول، ایجاد ماتریس‌های $\mathbf{H}^{(m)}$ و $\mathbf{B}^{(m)}$ به ازای $m = 1, 2$ می‌باشد. یادآوری می‌کنیم که اگرچه تغییر مکان در انتهای سمت چپ سازه صفر می‌باشد، ولی در ساخت معادلات تعادل عناصر محدود، تغییر مکان در آن سطح را در معادلات وارد می‌کنیم. متناظر با بردار تغییر مکان $\mathbf{U}^T = [U_1 \ U_2 \ U_3]$ داریم:

$$\mathbf{H}^{(1)} = \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{100}\right) & \frac{x}{100} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{100} & \frac{1}{100} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & \left(1 - \frac{x}{80}\right) & \frac{x}{80} \end{bmatrix}$$

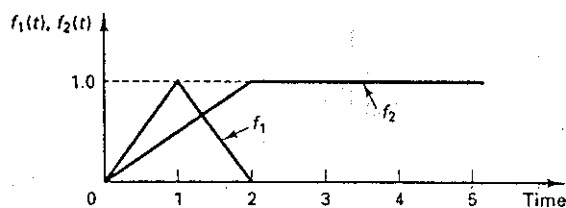
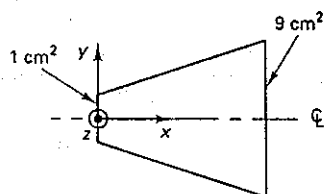
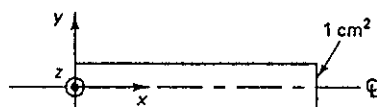
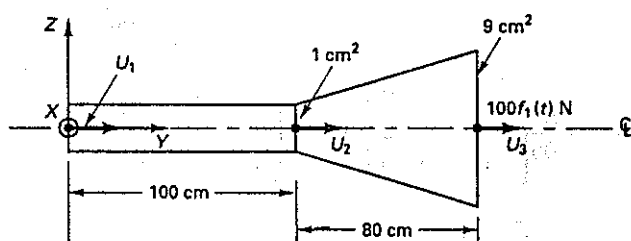
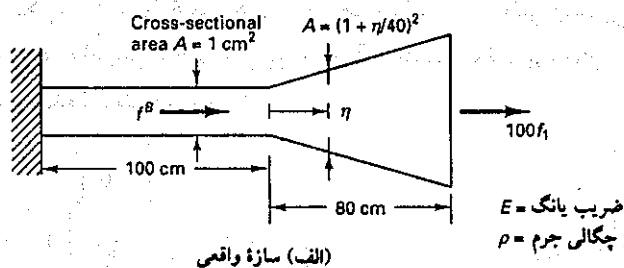
$$\mathbf{B}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{80} & \frac{1}{80} \end{bmatrix}$$

ماتریس‌های خواص مصالح عبارتند از:

$$\mathbf{C}^{(1)} = E; \quad \mathbf{C}^{(2)} = E$$

که در آن E ضریب ارتجاعی مصالح است. برای انتگرال‌گیری حجمی، سطح مقطع‌های عناصر مورد نیاز می‌باشند که عبارتند از:

$$A^{(1)} = 1 \text{ cm}^2; \quad A^{(2)} = \left(1 + \frac{x}{40}\right)^2 \text{ cm}^2$$



شکل ۴.۵ مجموعه همبسته دو عنصری

هنگامی که بارها خیلی آهسته وارد می‌شوند، یک تحلیل ایستایی مورد نیاز است که در این حالت باید ماتریس سختی K و بردار بار R محاسبه شوند. نیروهای جسمی و بارها در شکل ۴.۵ داده شده‌اند. بنابراین داریم:

$$K = (1)E \int_0^{100} \begin{bmatrix} -\frac{1}{100} \\ \frac{1}{100} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{100} & \frac{1}{100} & 0 \end{bmatrix} dx + E \int_0^{80} \left(1 + \frac{x}{40}\right)^2 \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{80} \\ \frac{1}{80} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{80} & \frac{1}{80} \end{bmatrix} dx$$

$$K = \frac{E}{100} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{13E}{240} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{یا}$$

$$= \frac{E}{240} \begin{bmatrix} 2.4 & -2.4 & 0 \\ -2.4 & 15.4 & -13 \\ 0 & -13 & 13 \end{bmatrix} \quad \text{(الف)}$$

و همچنین داریم:

$$R_B = \left\{ (1) \int_0^{100} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{100} \\ \frac{x}{100} \\ 0 \end{bmatrix} (1) dx + \int_0^{80} \left(1 + \frac{x}{40}\right)^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - \frac{x}{80} \\ \frac{x}{80} \end{bmatrix} \left(\frac{1}{10}\right) dx \right\} f_2(t)$$

$$= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 150 \\ 186 \\ 68 \end{bmatrix} f_2(t) \quad \text{(ب)}$$

$$R_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix} f_1(t) \quad \text{(پ)}$$

برای به دست آوردن جواب در یک زمان خاص t^* ، بردارهای R_B و R_C باید در زمان t^* تعیین شوند و از اینرو معادله زیر:

$$KU|_{t=t^*} = R_B|_{t=t^*} + R_C|_{t=t^*} \quad \text{(ت)}$$

تغییر مکان در زمان t^* را به دست می‌دهد. باید دانست که در این تحلیل ایستایی، تغییر مکان‌ها در زمان t^* تنها بستگی به مقدار بارها در آن زمان داشته و مستقل از تاریخچه بارگذاری می‌باشند. حال اگر تحلیل دینامیکی را در نظر بگیریم، محاسبه ماتریس جرم نیز مورد نیاز می‌باشد. با استفاده از درون‌یابی‌های تغییر مکان و (۴.۲۵)، داریم:

$$\mathbf{M} = (1)\rho \int_0^{100} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{100} \\ \frac{x}{100} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{100}\right) & \frac{x}{100} & 0 \end{bmatrix} dx \\ + \rho \int_0^{80} \left(1 + \frac{x}{40}\right)^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 - \frac{x}{80} \\ \frac{x}{80} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \left(1 - \frac{x}{80}\right) & \frac{x}{80} \end{bmatrix} dx$$

بنابراین داریم:

$$\mathbf{M} = \frac{\rho}{6} \begin{bmatrix} 200 & 100 & 0 \\ 100 & 584 & 336 \\ 0 & 336 & 1024 \end{bmatrix}$$

میرایی در مسأله تعریف نشده است؛ از اینرو معادلات تعادل که باید حل شوند عبارتند از:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{R}_B(t) + \mathbf{R}_C(t) \quad (\text{ث})$$

که در آن ماتریس سختی \mathbf{K} و بردارهای بار \mathbf{R}_B و \mathbf{R}_C قبلاً در (الف) الی (پ) داده شده‌اند. با استفاده از شرایط اولیه زیر:

$$\mathbf{U}|_{t=0} = \mathbf{0}; \quad \dot{\mathbf{U}}|_{t=0} = \mathbf{0} \quad (\text{ج})$$

برای به دست آوردن جواب در زمان t^* ، از معادلات تعادل دینامیکی فوق باید از زمان 0 تا زمان t^* انتگرال‌گیری شود (ر.ک. به: فصل نهم).

برای اینکه معادلات تعادل (ث) برای یافتن پاسخ سازه شکل (الف) ۴.۵ E حل شوند، ضروری است که شرط $U_1 = 0$ در تمام زمان t اعمال گردد. بنابراین معادلات (ت) و (ث) با اعمال شرط مذکور باید اصلاح شوند (ر.ک. به: بخش ۴.۲.۲). در این صورت حل (ت) و (ث) منجر به جوابهای $U_2(t)$ و $U_3(t)$ شده و تنش‌ها نیز با استفاده از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$\tau_{xx}^{(m)} = \mathbf{B}^{(m)}\mathbf{U}(t); \quad m = 1, 2 \quad (\text{چ})$$

تنش‌های مذکور بین عناصر ناپيوسته می‌باشند، زیرا کرنش ثابت برای عناصر فرض شده است. البته در این مثال، از آنجا که جواب کامل مدل ریاضی را می‌توان محاسبه نمود، از اینرو تنش‌ها را دقیق‌تر از جواب‌های حاصله از معادلات (چ) می‌توان در هر عنصر تعیین کرد.

در تحلیل ایستایی می‌توان همچون نظریه تیر، میزان دقت در جواب‌ها را از طریق تصحیح مقادیر تنش‌های حاصل از حل (چ)، بعثت بارگذاری گسترده در عناصر، افزایش داد. با وجود این تصحیح تنش‌ها در یک تحلیل عمومی دینامیکی (و در هر تحلیل عملی مسائل دوبعدی و سه بعدی) کار ساده‌ای نیست و اگر برای نمایش سازه از عناصر بیشتری استفاده شود، تنش‌های حاصل از (چ) به حد کافی دقیق خواهند بود (ر.ک. به: بخش ۴.۳.۶).

مثال ۴.۶: تحلیل یک صفحه طره‌ای نشان داده شده در شکل ۴.۶ E را در نظر بگیرید. برای نشان دادن تکنیک تحلیل، از ایده‌آل‌سازی عناصر محدود درشت که در شکل زیر مشخص شده است استفاده کنید (در تحلیل عملی عناصر بیشتری را به کار می‌برند (ر.ک. به: بخش ۴.۳)). ماتریس‌های $\mathbf{H}^{(2)}$ و $\mathbf{B}^{(2)}$ و $\mathbf{C}^{(2)}$ را ایجاد نمایید.

حل:

صفحه طره‌ای در شرایط تنش مسطح عمل می‌کند. برای یک مصالح ارتجاعی خطی ایزوتروپیک، ماتریس تنش - کرنش با استفاده از ضریب ارتجاعی E و ضریب پواسون ν به صورت زیر تعریف می‌شود:

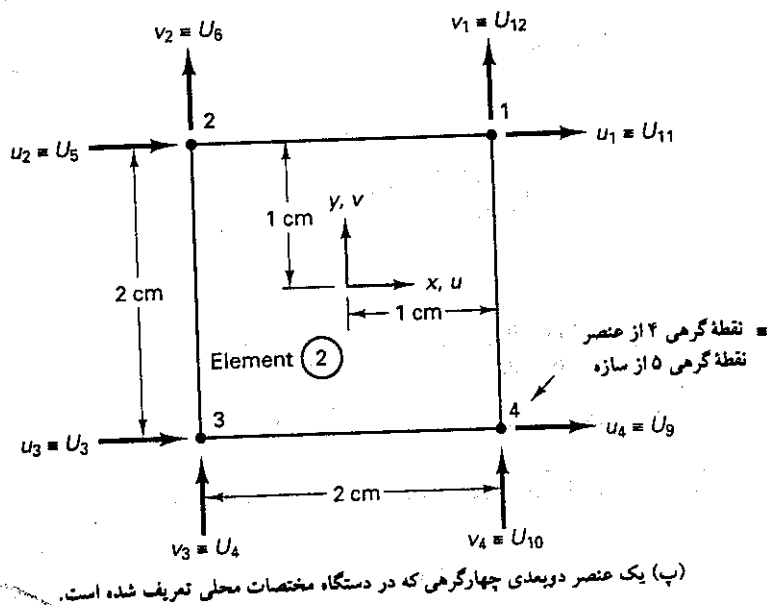
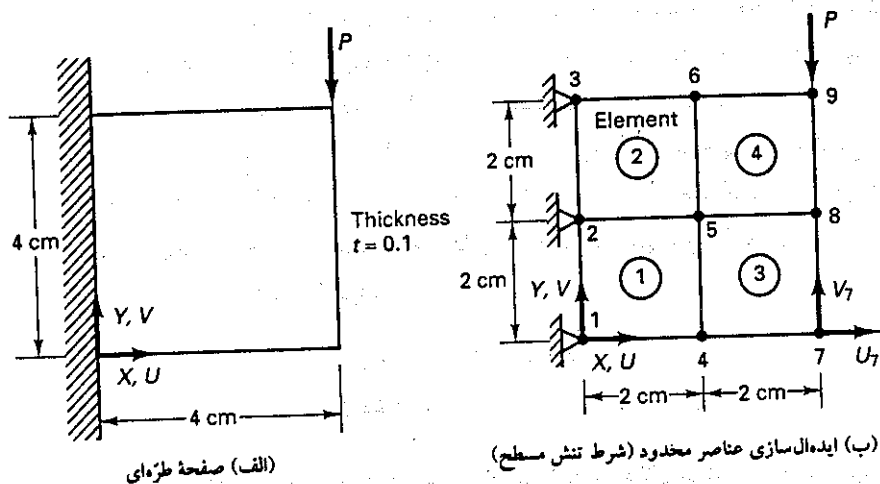
$$\mathbf{C}^{(2)} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - \nu}{2} \end{bmatrix}$$

ماتریس تبدیل تغییر مکان $\mathbf{H}^{(2)}$ عنصر ۲، تغییر مکان‌های داخلی عنصر را به تغییر مکان‌های نقاط گرهی ارتباط می‌دهد:

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}^{(2)} = \mathbf{H}^{(2)} \mathbf{U} \quad (\text{الف})$$

که در آن \mathbf{U} برداری است که شامل تمامی تغییر مکان‌های نقاط گرهی سازه می‌باشد:

$$\mathbf{U}^T = [U_1 \quad U_2 \quad U_3 \quad U_4 \quad \dots \quad U_{17} \quad U_{18}] \quad (\text{ب})$$



شکل ۴.۶ تحلیل تنش مسطح عناصر محدود

(همچنان که پیش از این اشاره شد در این مرحله از تحلیل، مدل سازه‌ای را بدون شرایط مرزی تغییر مکانی در نظر می‌گیریم). اگر عنصر ۲ را در نظر بگیریم، درمی‌یابیم که تنها تغییر مکان‌های

گره‌های ۶ و ۳ و ۲ و ۵، در تغییر مکان‌های عنصر مذکور مؤثراند. برای سهولت محاسبات، مناسب است که از یک قرارداد برای شماره‌گذاری نقاط گرهی عنصر و درجات آزادی متناظر با آن نقاط، به گونه‌ای که در شکل (پ) ۴.۶ E نشان داده شده است، استفاده شود. همچنین در همان شکل درجات آزادی کلی سازه که در U ملحوظ شده‌اند، مشخص شده‌اند.

برای استخراج ماتریس $H^{(2)}$ در (الف)، درمی‌یابیم که در هر چهار نقطه گرهی، دو تغییر مکان $u(x, y)$ و $v(x, y)$ وجود دارد. بنابراین می‌توان فرض کرد که تغییر مکان‌های u و v عنصر در مختصات محلی به صورت چندجمله‌ای‌های زیر مشخص می‌شوند که برحسب متغیرهای مختصات محلی x و y بیان گردیده‌اند:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy \\ v(x, y) &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy \end{aligned} \quad (\text{پ})$$

ضرایب مجهول $\alpha_1, \dots, \alpha_4$ که به آنها مختصات تعمیم یافته نیز اطلاق می‌شود، برحسب تغییر مکان‌های مجهول نقاط گرهی عنصری u_1, \dots, u_4 و v_1, \dots, v_4 بیان خواهند شد. با تعریف زیر:

$$\hat{\mathbf{u}}^T = [u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ ; \ v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4] \quad (\text{ت})$$

می‌توان (پ) را به صورت ماتریسی نوشت:

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \Phi \alpha \quad (\text{ث})$$

که در آن داریم:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & \phi \end{bmatrix}; \quad \phi = [1 \ x \ y \ xy]$$

$$\alpha^T = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ ; \ \beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ \beta_4] \quad \text{و}$$

معادله (ث) باید برای تمام نقاط گرهی عنصر صادق باشد، بنابراین با استفاده از (ت)

داریم:

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{A} \alpha \quad (\text{ج})$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{A}_1 \end{bmatrix}$$

که در آن:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

اگر معادلات (ج) برای یافتن α حل شوند و نتیجه در (ث) جایگذاری شود، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{H} = \Phi \mathbf{A}^{-1} \quad (\text{ج})$$

این واقعیت که اندیس بالا در \mathbf{H} استفاده نمی‌شود، دلالت بر این نکته دارد که ماتریس درون‌یابی تغییر مکان متناظر با تغییر مکان‌های نقاط گرهی عنصر در (ت) تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1+x)(1+y) & (1-x)(1+y) & (1-x)(1-y) & (1+x)(1-y) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1+x)(1+y) & (1-x)(1+y) & (1-x)(1-y) & (1+x)(1-y) \end{bmatrix} \quad (\text{ح})$$

توابع تغییر مکان در \mathbf{H} را می‌توانیم با یک بررسی ساده نیز ایجاد کنیم. فرض کنید که H_{ij} عنصر (i, j) ام از ماتریس \mathbf{H} باشد، در این صورت H_{11} متناظر با تابعی است که به طور خطی در جهت x و y تغییر می‌کند [به همان‌گونه که در (پ) مورد نیاز می‌باشد]، و در $x = 1$ و $y = 1$ مساوی یک بوده در سه گره دیگر صفر می‌باشد. در مورد ایجاد توابع تغییر مکان \mathbf{H} بر مبنای ملاحظات مذکور در بخش ۵.۲ بحث خواهد شد.

با \mathbf{H} مشخص شده در (ح) داریم:

$$\mathbf{H}^{(2)} = \begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 & U_9 & U_{10} \\ 0 & 0 & H_{13} & H_{17} & H_{12} & H_{16} & 0 & 0 & H_{14} & H_{18} \\ 0 & 0 & H_{23} & H_{27} & H_{22} & H_{26} & 0 & 0 & H_{24} & H_{28} \end{bmatrix} \quad (\text{خ})$$

$u_1 \quad v_1 \leftarrow \text{Element degrees of freedom}$
 $U_{11} \quad U_{12} \quad U_{13} \quad U_{14} \quad U_{18} \leftarrow \text{Assemblage degrees of freedom}$
 $\begin{bmatrix} H_{11} & H_{15} & 0 & 0 & \dots & \text{zeros} & \dots & 0 \\ H_{21} & H_{25} & 0 & 0 & \dots & \text{zeros} & \dots & 0 \end{bmatrix}$

ماتریس کرنش - تغییر مکان را می‌توان مستقیماً از (چ) به دست آورد. در شرایط تنش مسطح، کرنش‌های عنصری عبارتند از:

$$\boldsymbol{\epsilon}^T = [\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}]$$

که در آن:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

با استفاده از (چ) و با در نظر گرفتن این نکته که عناصر ماتریس \mathbf{A}^{-1} مستقل از x و y می‌باشند،

که در آن داریم:

۱۲۱

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1+y) & -(1+y) & -(1-y) & (1-y) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ (1+x) & (1-x) & -(1-x) & -(1+x) \end{bmatrix}$$

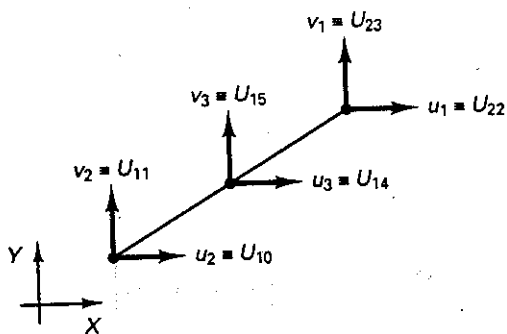
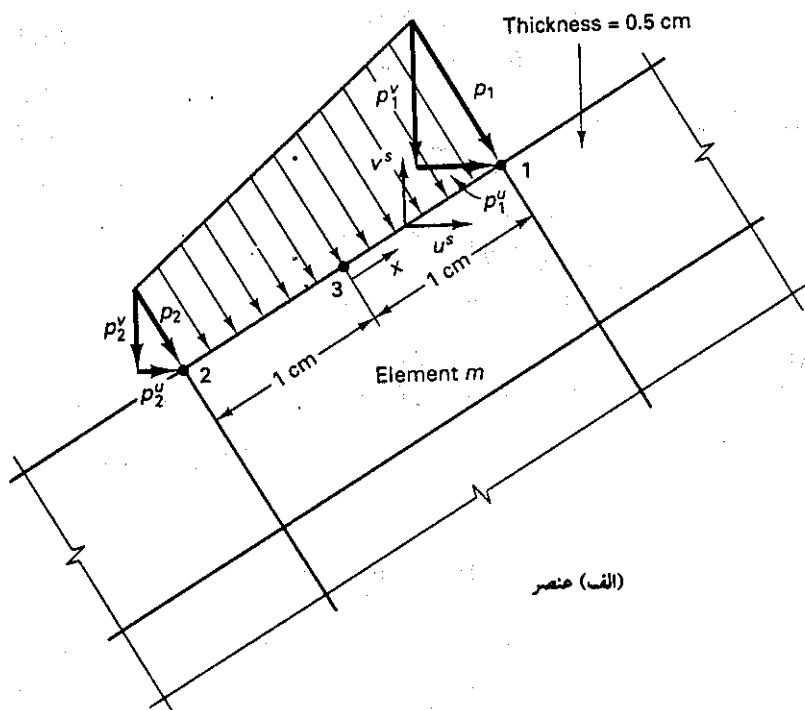
(ح) نیز بہ دست آوریم۔

اگر B_{ij} عنصر (i, j) ام ماتریس B باشد در این صورت داریم:

$$\mathbf{B}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{13} & B_{17} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 & B_{14} & B_{18} & B_{11} & B_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{23} & B_{27} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 & B_{24} & B_{28} & B_{21} & B_{25} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{33} & B_{37} & B_{32} & B_{36} & 0 & 0 & B_{34} & B_{38} & B_{31} & B_{35} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & \text{zeroes} & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(ت) مر تب شدہ اند۔

مثال ۴.۷: یک فشار سطحی گسترده که به صورت خطی تغییر می‌کند، بگونه‌ای که در شکل ۴.۷ E نشان داده شده است به عنصر (m) از یک مجموعهٔ همبستهٔ عناصر اعمال می‌گردد. برای این عنصر بردار $\mathbf{R}^{(m)}$ را تعیین کنید.



(ب) درجات آزادی محلی - کلی

شکل ۴.۷ بارگذاری فشاری در روی عنصر (m)

حل:

گام اول در محاسبه $\mathbf{R}_3^{(m)}$ تعیین ماتریس $\mathbf{H}^{s(m)}$ است. این ماتریس را می‌توان با استفاده

از روش ارائه شده در مثال ۴.۶ ایجاد نمود. برای تغییر مکان‌های سطحی فرض می‌کنیم که:

$$\begin{aligned} u^s &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 \\ v^s &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 \end{aligned} \quad (\text{الف})$$

که در آن (همچون مثال ۴.۶) ضرایب مجهول α_1, \dots, β_3 با استفاده از تغییر مکان‌های نقاط گرهی تعیین می‌شوند. بنابراین روابط زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} u^s(x) \\ v^s(x) \end{bmatrix} = \mathbf{H}^s \hat{\mathbf{u}}$$

$$\hat{\mathbf{u}}^T = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad ; \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3]$$

$$\mathbf{H}^s = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x(1+x) & -\frac{1}{2}x(1-x) & (1-x^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}x(1+x) & -\frac{1}{2}x(1-x) & (1-x^2) \end{bmatrix}$$

بردار بارهای سطحی عبارت است از (با p_1 و p_2 مثبت):

$$\mathbf{f}^s = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+x)p_1^t + \frac{1}{2}(1-x)p_2^t \\ -\frac{1}{2}(1+x)p_1^t - \frac{1}{2}(1-x)p_2^t \end{bmatrix}$$

برای به دست آوردن $\mathbf{R}_s^{(m)}$ ، ابتدا \mathbf{R}_s را تعیین می‌کنیم:

$$\mathbf{R}_s = 0.5 \int_{-1}^{+1} \mathbf{H}^{sT} \mathbf{f}^s dx$$

$$\mathbf{R}_s = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} p_1^t \\ p_2^t \\ 2(p_1^t + p_2^t) \\ -p_1^t \\ -p_2^t \\ -2(p_1^t + p_2^t) \end{bmatrix}$$

بنابراین، متناظر با درجات آزادی داده شده در شکل ۴.۷ E داریم:

$$\mathbf{R}_s^{(m)T} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & ; & p_2^t & -p_2^t & ; & 0 & 0 & ; & 2(p_1^t + p_2^t) & -2(p_1^t + p_2^t) & ; & 0 & \dots \\ & & & & & & & & & U_{22} & U_{23} \leftarrow \text{Assemblage degrees of freedom} & & & \\ & & & & & & & & & \dots & 0 & ; & p_1^t & -p_1^t & ; & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

فرضی در مورد تعادل تنش

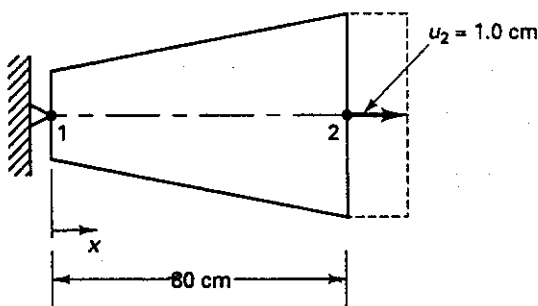
پیش از این اشاره کردیم که تحلیل‌های سازه‌ای خربایی و تیری را اساساً نمی‌توان به عنوان یک تحلیل عناصر محدود در نظر گرفت، زیرا ماتریس‌های سختی «کامل» عناصر را می‌توان در تحلیل‌ها به کار گرفت. اگر در هنگام استفاده از اصل تغییر مکان‌های مجازی درونی‌بایی‌های فرض شده برای تغییر مکان، در حقیقت همان تغییر مکان‌هایی باشند که عنصر تحت اثر تغییر مکان‌های واحد در نقاط گرهی متحمل می‌شود، در این صورت ماتریس‌های سختی به طور کامل به دست می‌آیند. در این جا کلمه «کامل» به این واقعیت اشاره دارد که با اعمال این تغییر مکان‌ها به عنصر، تمامی معادلات دیفرانسیل تعادل و شرایط سازگاری و شرایط مشخصه (و نیز شرایط مرزی) در تحلیل ایستایی به طور کامل تأمین می‌گردند.

در تحلیل سازه خربایی مثال ۴.۵، ماتریس سختی کامل عنصر شماره ۱ به دست آمد. با وجود این برای عنصر شماره ۲ یک ماتریس سختی تقریبی به گونه‌ای که در مثال بعدی نشان داده شده است به دست می‌آید.

مثال ۴.۸: برای عنصر شماره ۲ در مثال ۴.۵ تغییر مکان‌های داخلی کامل عنصر را که متناظر با یک تغییر مکان انتهایی واحد u_2 می‌باشد محاسبه کرده و ماتریس سختی متناظر با آن را تعیین نمایید. همچنین نشان دهید که با استفاده از فرض تغییر مکان عنصر، در مثال ۴.۵، تعادل داخلی عنصر تأمین نمی‌گردد.

حل:

عنصر شماره ۲ را با یک تغییر مکان واحد وارد بر انتهای سمت راست به گونه‌ای که در شکل ۴.۸ E نشان داده شده است، در نظر بگیرید.



شکل ۴.۸ E عنصر شماره ۲ از میله تحلیل شده در مثال ۴.۵

تغییر مکان‌های عنصر از حل معادلهٔ دیفرانسیل زیر به دست می‌آیند. (ر.ک. به: مثال (۳.۲۲):

$$E \frac{d}{dx} \left(A \frac{du}{dx} \right) = 0 \quad (\text{الف})$$

که در آن شرایط مرزی $u|_{x=0} = 0$ و $u|_{x=80} = 1.0$ اعمال می‌گردند. اگر مقدار سطح مقطع A در رابطه (الف) جایگذاری شود و از آن رابطه انتگرال‌گیری شود، نتیجهٔ زیر را به دست می‌آوریم:

$$u = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{1 + x/40} \right) \quad (\text{ب})$$

جواب مذکور، تغییر مکان‌های داخلی کامل عنصر می‌باشد و اگر این تغییر مکان‌ها به میله اعمال شوند، در این صورت نیروهای انتهایی عنصر به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$k_{12} = -EA \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=0} \quad (\text{پ})$$

$$k_{22} = EA \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=L}$$

از جایگذاری (ب) در (پ)، نتایج زیر حاصل می‌گردند:

$$k_{22} = \frac{3E}{80}; \quad k_{12} = -\frac{3E}{80}$$

بنابراین با استفاده از تقارن ماتریس سختی عنصر و با استفاده از تعادل برای ایجاد k_{11} و k_{21} نتیجهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{K} = \frac{3}{80} E \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{ت})$$

البته نتیجهٔ مشابهی با استفاده از اصل تغییر مکان‌های مجازی با فرض تغییر مکان (ب) حاصل می‌شود.

یادآوری می‌کنیم که ضریب سختی در (ت) کوچکتر از مقدار متناظر به دست آمده در مثال ۴.۵ می‌باشد ($\frac{3E}{80}$ بجای $\frac{3E}{40}$). حل عناصر محدود در مثال ۴.۵ سختی سازه را بیش از اندازه تخمین می‌زند، زیرا تغییر مکان‌های فرضی به طور مصنوعی حرکت ذرات مصالح را محدود می‌کنند. (ر.ک. به: بخش ۴.۳.۴). برای کنترل اینکه تعادل داخلی در حقیقت تأمین نمی‌گردد، جواب تحلیل عناصر محدود را (که از تغییر مکان فرض شده در مثال ۴.۵ حاصل شده است) در (الف) جایگزین می‌کنیم و نتیجهٔ زیر حاصل می‌گردد:

$$E \frac{d}{dx} \left\{ \left(1 + \frac{x}{40} \right)^2 \frac{1}{80} \right\} \neq 0$$

از حلّ سازه‌های خربایی و تیری، با استفاده از تغییر مکان‌های کامل متناظر با تغییر مکان‌ها و دورانه‌های واحد در نقاط گرهی برای تعیین ماتریس‌های سختی، نتایجی به دست می‌آید که برای مدل ریاضی انتخابی، هر سه شرط مکانیکی را به طور کامل تأمین می‌کنند: شرط تعادل دیفرانسیلی برای هر نقطه‌ای از سازه (که شامل تعادل نقطه گرهی نیز می‌باشد)، شرط سازگاری و روابط تنش-کرنش. بنابراین برای مدل ریاضی انتخابی، نتیجه کامل (منحصر به فرد) به دست می‌آید.

یادآوری می‌کنیم که معمولاً در تحلیل ایستایی امکان حل کامل میسر است و در این حالت روابط کامل سختی همانگونه که در مثال ۴.۸ توصیف گردید به دست می‌آیند، ولی رسیدن به یک جواب کامل در تحلیل دینامیکی بسیار دشوار است، زیرا در این حالت اثرات جرم و میرایی گسترده باید در نظر گرفته شوند (به عنوان مثال ر.ک. به: [A] R. W. Clough and J. Penzien).

اگرچه در یک تحلیل عمومی عناصر محدود (ایستایی یا دینامیکی) تعادل دیفرانسیلی در تمام نقاط محیط پیوسته مورد نظر به طور کامل تأمین نمی‌شود، با وجود این جواب به دست آمده از تحلیل عناصر محدود، صرفنظر از ریز یا درشت بودن شبکه، دو خاصیت مهم را ارضا می‌کند. این دو خاصیت عبارتند از (ر.ک. به: شکل ۴.۲):

۱. تعادل نقاط گرهی

۲. تعادل عنصر

به عنوان مثال، در نظر بگیرید که یک تحلیل عناصر محدود انجام شده است و برای هر عنصر محدود m ، بردارهای نیرویی نقاط گرهی عنصر را از رابطه زیر محاسبه می‌کنیم:

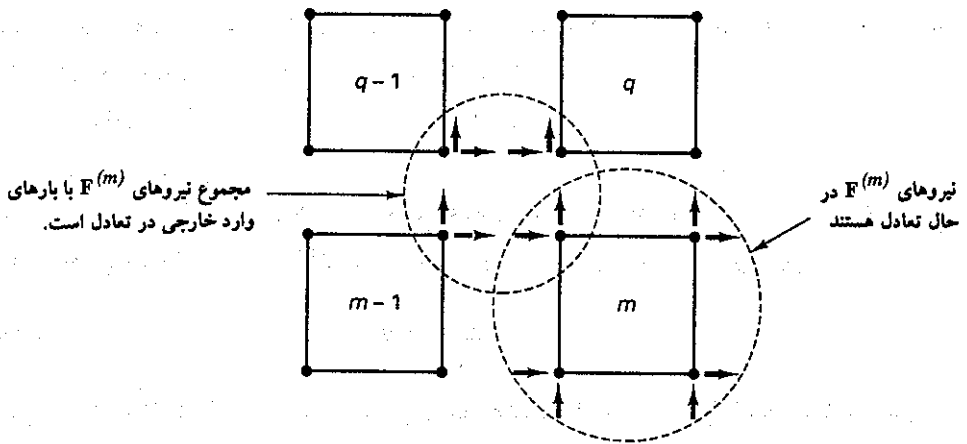
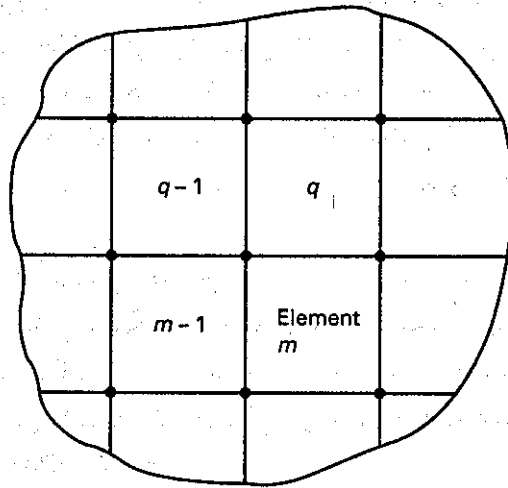
$$\mathbf{F}^{(m)} = \int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \boldsymbol{\sigma}^{(m)} dV^{(m)} \quad (4.29)$$

که در آن $\boldsymbol{\sigma}^{(m)} = \mathbf{C}^{(m)} \mathbf{E}^{(m)}$. در این صورت مشاهده می‌کنیم که مطابق با خاصیت اول داریم:

در هر گره، مجموع نیروهای نقاط گرهی عنصر با بارهای گرهی وارد خارجی در حال تعادل است (بارهای خارجی شامل اثرات ناشی از نیروهای جسمی، نیروهای سطحی، تنش‌های اولیه، بارهای متمرکز، نیروهای اینرسی و میرایی و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی می‌باشد).

و مطابق با خاصیت دوم داریم:

هر عنصر m تحت اثر نیروهای $\mathbf{F}^{(m)}$ وارد بر آن در حال تعادل می‌باشد.



شکل ۴.۲. تعادل نقاط گرهی و عنصر در یک تحلیل عناصر محدود

چون رابطه (۴.۲۷) بیانگر تعادل نقاط گرهی می‌باشد، خاصیت اول حاصل می‌شود و از اینرو داریم:

$$\sum_m \mathbf{F}^{(m)} = \mathbf{KU} \quad (۴.۳۰)$$

تعادل عنصر که در خاصیت دوم بیان شده است به شرطی حاصل می‌گردد که

درون‌یابی‌های تغییر مکان عناصر محدود $\mathbf{H}^{(m)}$ شرایط اساسی همگرایی را احراز نمایند و شامل این شرط نیز هستند که عنصر باید قادر باشد که حرکات صلب جسمی را از خود به نمایش گذارد (ر.ک. به: بخش ۴.۳). به عنوان مثال، عنصر m را که تحت اثر نیروهای نقطه‌گرهی $\mathbf{F}^{(m)}$ می‌باشد در نظر بگیرید و تغییر مکان‌های مجازی نقاط گرهی متناظر با حرکات صلب جسمی را اعمال کنید. در این صورت، برای هر حرکت مجازی صلب جسمی با تغییر مکان‌های نقاط گرهی $\bar{\mathbf{u}}$ داریم:

$$\bar{\mathbf{u}}^T \mathbf{F}^{(m)} = \int_{V^{(m)}} (\mathbf{B}^{(m)} \bar{\mathbf{u}})^T \boldsymbol{\tau}^{(m)} dV^{(m)} = \int_{V^{(m)}} \bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{(m)T} \boldsymbol{\tau}^{(m)} dV^{(m)} = 0$$

چون در این جا داریم: $\bar{\boldsymbol{\epsilon}}^{(m)} = \mathbf{0}$ بنابراین با استفاده از کلیه حرکات صلب جسمی قابل اعمال، درمی‌یابیم که نیروهای $\mathbf{F}^{(m)}$ در حال تعادل می‌باشند.

بنابراین یک تحلیل عناصر محدود را می‌توان به عنوان فرایندی تفسیر کرد که در آن:

۱. سازه یا محیط پیوسته به صورت مجموعه همبسته عناصر گسسته، که در گره‌های مربوط به آن عناصر به همدیگر متصل شده‌اند، ایده‌آل‌سازی می‌شود.

۲. بارهای وارد خارجی (شامل نیروهای جسمی، نیروهای سطحی، تنش‌های اولیه، بارهای متمرکز، نیروهای اینرسی و میزایی و عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی) در این گره‌ها با استفاده از اصل کار مجازی متمرکز می‌شوند تا اینکه نیروهای نقاط گرهی وارد خارجی هم‌ارز به دست آیند.

۳. نیروهای نقاط گرهی وارد خارجی هم‌ارز، (که در مرحله دوم محاسبه شده‌اند)، با نیروهای نقاط گرهی عنصر که معادل تنش‌های داخلی عنصر می‌باشند (در مفهوم کار مجازی) در حال تعادل‌اند؛ به عبارت دیگر داریم:

$$\sum_m \mathbf{F}^{(m)} = \mathbf{R}$$

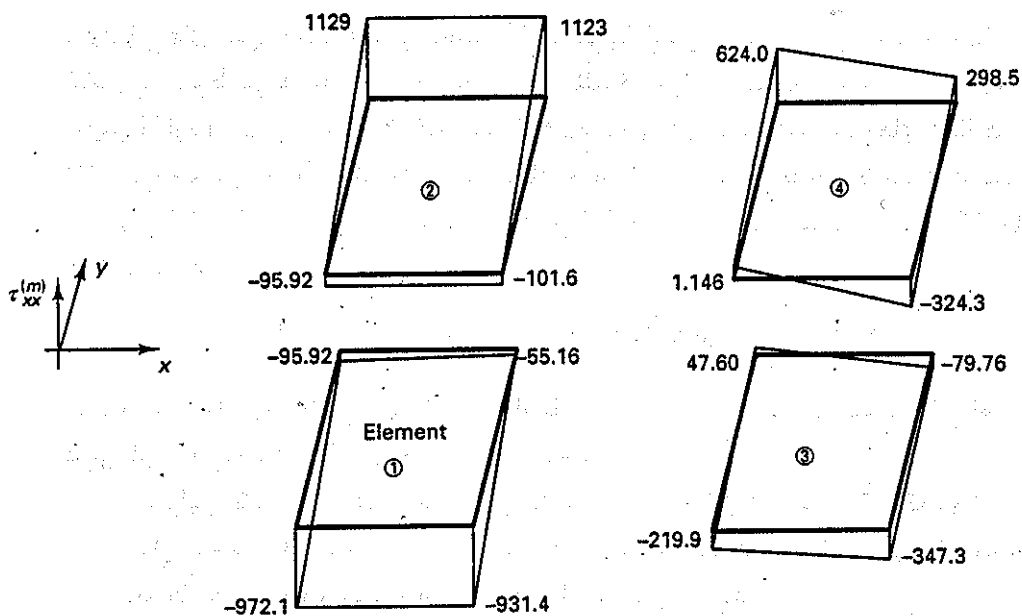
۴. شرط سازگاری و رابطه تنش - کرنش مصالح به طور کامل ارضا می‌شوند، ولی به جای تعادل در سطح دیفرانسیلی، فقط تعادل کلی برای سازه در نقاط گرهی و هر عنصر m که تحت اثر نیروهای نقطه‌گرهی $\mathbf{F}^{(m)}$ می‌باشد تأمین می‌گردد.

مثال زیر را در نظر بگیرید:

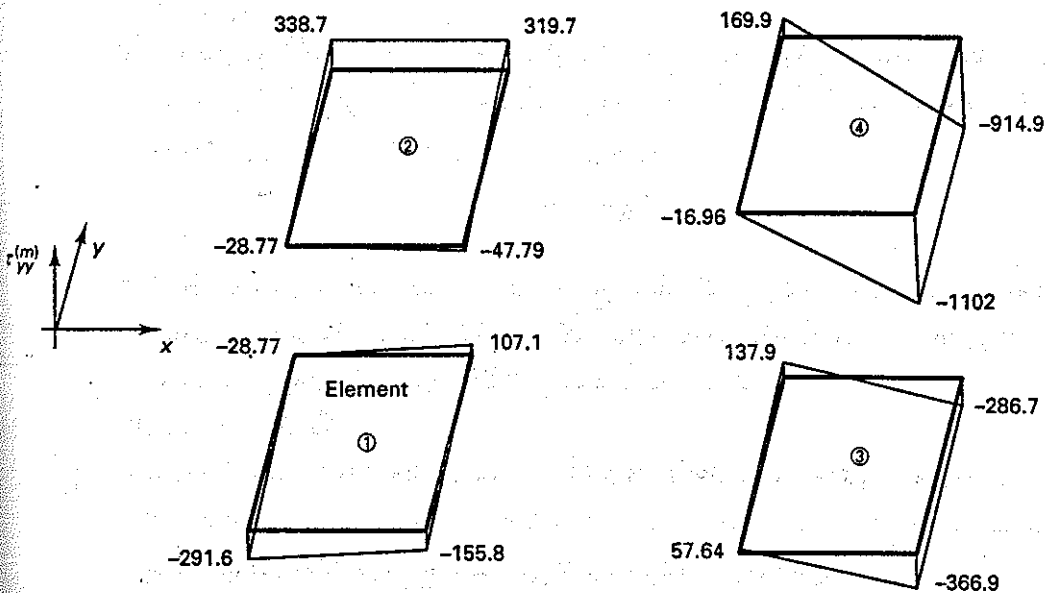
مثال ۴.۹: جواب تحلیل عناصر محدود مسئله شکل ۴.۶ با $E = ۱۰۰$ و $P = ۲/۷ \times ۱۰^۶$ و $E = ۲/۷ \times ۱۰^۶$ و $\nu = ۰/۳$ و $t = ۰/۱$ در شکل ۴.۹ داده شده است. مشخص است که تنش‌ها بین عناصر پیوسته نبوده و تعادل در سطح دیفرانسیلی تأمین نمی‌گردد با وجود این:

۱. نشان دهید که $\sum_m \mathbf{F}^{(m)} = \mathbf{R}$ و واکنش‌های تکیه‌گاهی را محاسبه کنید.

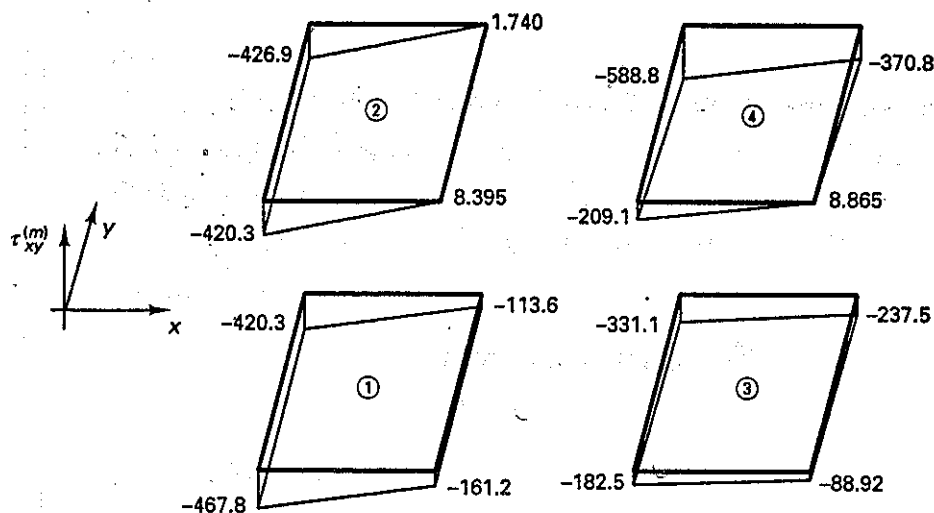
۲. نشان دهید که نیروهای عنصری $\mathbf{F}^{(4)}$ برای عنصر چهارم در حال تعادل هستند.



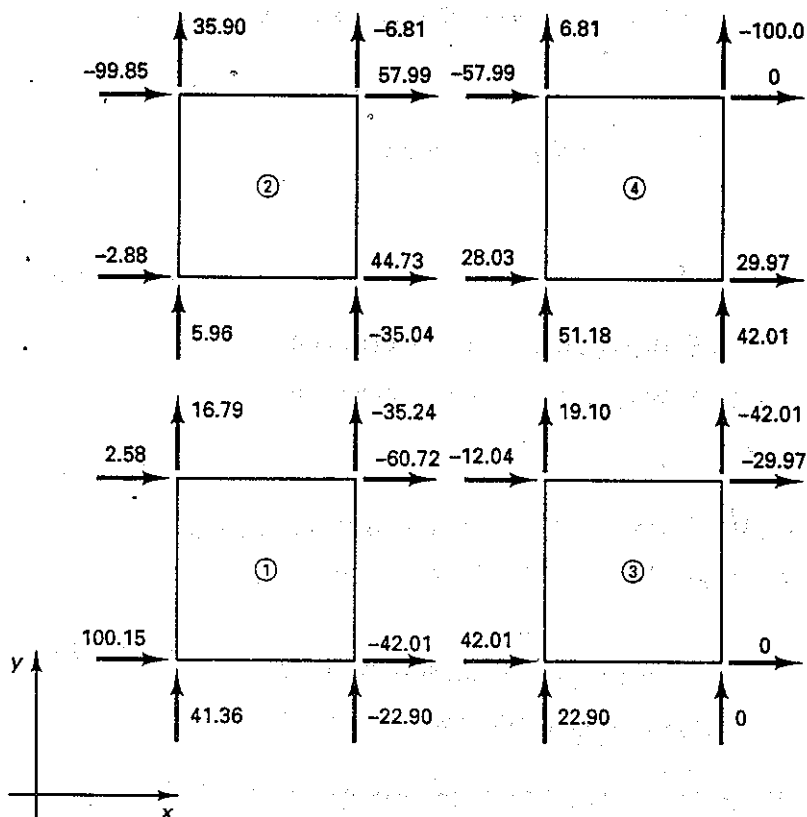
(الف) نمای بزرگ شده عناصر که تنش‌های $\sigma_{xx} (m)$ را نشان می‌دهد.
به ناپوستگی تنش بین عناصر و تنش‌های غیر صفر در لبه‌های آزاد توجه شود.



(ب) نمای بزرگ شده عناصر که تنش‌های $\sigma_{yy} (m)$ را نشان می‌دهد.



(پ) نمای بزرگ شده عناصر که تنش‌های $\tau_{xy}^{(m)}$ را نشان می‌دهد.



(ت) نمای بزرگ شده عناصر که نیروهای نقاط گرهی هم‌ارز با تنش‌های عنصر (در مفهوم کار مجازی) را نشان می‌دهد.

نیروهای نقاط گرهی در هر گره با بارهای وارد (که شامل واکنش‌های تکیه‌گاهی نیز می‌باشند) در حال تعادل هستند.

شکل ۴.۹ ب (ادامه)

حل:

این واقعیت که $\sum_m F^{(m)} = R$ صادق است، از حل (۴.۱۷) نتیجه می‌شود و R شامل مجموع نیروهای نقاط گرهی است. بنابراین، از این رابطه می‌توان برای تعیین واکنشهای تکیه‌گاهی نیز استفاده نمود.

با در نظر داشتن نحوه شماره گذاری نقاط گرهی در شکل (ب) ۴.۶ E برای گره شماره ۱ نتایج زیر را به دست می‌آوریم:

$$R_x = 100.15 \text{ واکنشهای تکیه‌گاهی}$$

$$R_y = 41.36$$

برای گره شماره ۲:

$$R_x = 2.58 - 2.88 = -0.30 \text{ واکنشهای تکیه‌گاهی}$$

$$R_y = 16.79 + 5.96 = 22.74 \text{ (به علت عمل گرد کردن)}$$

برای گره شماره ۳:

$$R_x = -99.85 \text{ واکنشهای تکیه‌گاهی}$$

$$R_y = 35.90$$

برای گره شماره ۴:

$$-42.01 + 42.01 = 0 \text{ تعادل نیروهای افقی}$$

$$-22.90 + 22.90 = 0 \text{ تعادل نیروهای عمودی}$$

برای گره شماره ۵:

$$-60.72 - 12.04 + 44.73 + 28.03 = 0 \text{ تعادل نیروهای افقی}$$

$$-35.24 - 35.04 + 19.10 + 51.18 = 0 \text{ تعادل نیروهای عمودی}$$

برای گره شماره ۶:

$$57.99 - 57.99 = 0 \text{ تعادل نیروهای افقی}$$

$$-6.81 + 6.81 = 0 \text{ تعادل نیروهای عمودی}$$

و برای گرههای شماره ۷ و ۸، مشخص است که تعادل نیرویی تأمین می‌گردد و در گره شماره ۹ نیروی گرهی عنصر با بار وارده $P = ۱۰۰$ در حال تعادل است.

سرانجام، تعادل کلی نیرویی مدل را کنترل می‌کنیم:

تعداد نیروهای افقی:

$$100.15 - 0.30 - 99.85 = 0$$

تعداد نیروهای عمودی:

$$41.36 + 22.74 + 35.90 - 100 = 0$$

تعداد لنگر (حول گره ۲):

$$-100 \times 4 + 100.15 \times 2 + 99.85 \times 2 = 0$$

این نکته حائز اهمیت است که تعداد نیرویی مذکور برای هر شبکه عناصر محدود - حتی اگر شبکه درشتی باشد - صادق است به شرط اینکه عناصر مورد استفاده به صورت مناسبی فرمول‌بندی شده باشند (ر.ک. به: بخش ۴.۳).
حال عنصر شماره ۴ را در نظر بگیرید:
تعداد نیروهای افقی:

$$0 - 57.99 + 28.03 + 29.97 = 0 \text{ (به علت عمل گرد کردن)}$$

تعداد نیروهای عمودی:

$$-100 + 6.81 + 51.18 + 42.01 = 0$$

تعداد لنگر (حول گره محلی ۳):

$$-100 \times 2 + 57.99 \times 2 + 42.01 \times 2 = 0$$

بنابراین نیروهای گرهی عنصر در حال تعادل‌اند.

درجات آزادی محلی عنصر و کلی سازه

نحوه استخراج ماتریس‌های عنصری در مثال‌های ۴.۶ و ۴.۷ نشان می‌دهد که این روش مناسبی است که در ابتدا ماتریس‌ها را متناظر با درجات آزادی محلی عنصر ایجاد نمود. در این صورت ماتریس‌های عناصر محدود متناظر با درجات آزادی کلی مجموعه همبسته عناصر [عناصر مورد استفاده در روابط (۴.۱۹) الی (۴.۲۵)] را می‌توان مستقیماً با مشخص نمودن درجات

آزادی کلی که متناظر با درجات آزادی محلی عنصر می‌باشند ایجاد کرد. با وجود این اگر ماتریس‌های $H^{(m)}$ و $B^{(m)}$ و $K^{(m)}$ و غیره را که متناظر با درجات آزادی کلی سازه می‌باشند در نظر بگیریم، فقط آن سطرها و ستون‌هایی که متناظر با درجات آزادی محلی عنصر هستند، دارای عناصر غیرصفر می‌باشند و هدف اصلی در تعریف این ماتریس‌های خاص این بوده که بتوانیم فرایند سوار نمودن ماتریس‌های عناصر را به طریقه‌ای که از نظر تئوریک دارای ظرافت باشد، بیان کنیم. در پیاده‌سازی عملی روش عناصر محدود، باز هم این ظرافت وجود دارد، و لکن تمامی ماتریس‌های عنصری فقط متناظر با درجات آزادی محلی عنصر محاسبه می‌شوند و سپس مستقیماً با استفاده از رابطه بین درجات آزادی محلی عنصر و کلی سازه، بر روی هم سوار می‌شوند. بنابراین با تنها داشتن درجات آزادی محلی عنصر که در \bar{u} آورده شده‌اند، می‌توان نوشت (مانند مثال ۴.۶):

$$\bar{u} = H\bar{u} \quad (4.31)$$

که در آن عناصر بردار \bar{u} تغییر مکان‌های عنصری می‌باشند که در هر دستگاه مختصات محلی دلخواه و مناسبی تعیین شده‌اند. در این صورت همچنین داریم:

$$\epsilon = B\bar{u} \quad (4.32)$$

با ملاحظه روابط (۴.۳۱) و (۴.۳۲)، این واقعیت که در ماتریس‌های درونیابی از اندیس بالا استفاده نشده است، دلالت بر این نکته دارد که ماتریس‌ها نسبت به درجات آزادی محلی عنصر تعریف شده‌اند. با استفاده از روابط استفاده شده برای محاسبه ماتریس سختی عنصر، ماتریس جرم و بردار بار، نتایج زیر را به دست می‌آوریم:

$$K = \int_V B^T C B \, dV \quad (4.33)$$

$$M = \int_V \rho H^T H \, dV \quad (4.34)$$

$$R_B = \int_V H^T f^B \, dV \quad (4.35)$$

$$\mathbf{R}_S = \int_S \mathbf{H}^T \mathbf{f}^S dS \quad (4.36)$$

$$\mathbf{R}_I = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\tau}^I dV \quad (4.37)$$

که در آنها همه متغیرها همانگونه که در روابط (۴.۱۹) الی (۴.۲۵) تعریف شده‌اند، متناظر با درجات آزادی محلی عنصر تعریف می‌شوند. در استخراج بعدی معادلات و بحث‌هایی که خواهد شد، به روابط (۴.۳۳) الی (۴.۳۷) بسیار زیاد رجوع خواهیم کرد. به محض اینکه ماتریس‌های موجود در روابط (۴.۳۳) الی (۴.۳۷) محاسبه شدند، آنها را می‌توان مستقیماً با استفاده از روش‌های ارائه شده در مثال ۴.۱۱ و فصل دوازدهم روی هم سوار کرد.

در فرایند سوار نمودن ماتریس‌ها، فرض می‌شود که جهات تغییر مکان‌های نقاط گرهی محلی عنصر $\bar{\mathbf{u}}$ در (۴.۳۱) با جهات تغییر مکان‌های نقاط گرهی کلی سازه \mathbf{U} یکسان می‌باشند. با وجود این در برخی تحلیل‌ها مناسب است که استخراج ماتریس‌ها را با درجات آزادی نقاط گرهی محلی عنصر $\bar{\mathbf{u}}$ آغاز کرد که در امتداد درجات آزادی کلی مجموعه همبسته عناصر نمی‌باشند. در این حالت داریم:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{u}} \quad (4.38)$$

و

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{T}} \mathbf{u} \quad (4.39)$$

که در آن ماتریس $\bar{\mathbf{T}}$ درجات آزادی $\bar{\mathbf{u}}$ را به درجات آزادی \mathbf{u} تبدیل می‌کند و (۴.۳۹) متناظر با یک تبدیل تانسوری مرتبه اول می‌باشد (ر.ک. به: بخش ۲.۴)؛ اعضای ستون زاز ماتریس $\bar{\mathbf{T}}$ کوسینوس‌های هادی یک بردار واحداند که متناظر با زامین درجه آزادی در $\bar{\mathbf{u}}$ می‌باشند که در جهات درجات آزادی $\bar{\mathbf{u}}$ تعیین می‌گردند. از جایگذاری (۴.۳۹) در (۴.۳۸) رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\mathbf{H} = \bar{\mathbf{H}} \bar{\mathbf{T}} \quad (4.40)$$

بنابراین، اگر تمامی ماتریس‌های عناصر محدود را که متناظر با درجات آزادی $\bar{\mathbf{u}}$ می‌باشند با یک (-) در بالای آنها مشخص کنیم، از (۴.۴) و (۴.۳۳) الی (۴.۳۷) روابط زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{K}} \mathbf{T}; & \mathbf{M} &= \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{M}} \mathbf{T} \\ \mathbf{R}_\theta &= \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{R}}_\theta; & \mathbf{R}_S &= \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{R}}_S; & \mathbf{R}_I &= \mathbf{T}^T \bar{\mathbf{R}}_I \end{aligned} \quad (4.41)$$

یادآوری می‌شود که در هنگام اعمال تغییر مکان‌های مرزی که متناظر با درجات آزادی کلی سازه نیستند، از تبدیل‌های مذکور استفاده خواهیم کرد (ر.ک. به: بخش ۴.۲.۲). جدول ۴.۱ برخی از نمادگذاری‌های را که مورد استفاده قرار داده‌ایم به اختصار نشان می‌دهد. مفاهیم ارائه شده در این بخش را با چند مثال نشان می‌دهیم.

جدول ۴.۱ خلاصه برخی نمادگذاری‌های مورد استفاده

$$\mathbf{u}^{(m)} = \mathbf{H}^{(m)} \hat{\mathbf{U}} \text{ or } \mathbf{u}^{(m)} = \mathbf{H}^{(m)} \mathbf{U} \quad (\text{الف})$$

که در آن: $\mathbf{u}^{(m)}$ = تغییر مکان‌ها در عنصر m به عنوان تابعی از مختصات عنصری \mathbf{U} = تغییر مکان‌های نقاط گرهی مجموعه کلی همبسته عناصر [از معادله (۴.۱۷) به بعد صرفاً از \mathbf{U} استفاده خواهد شد].

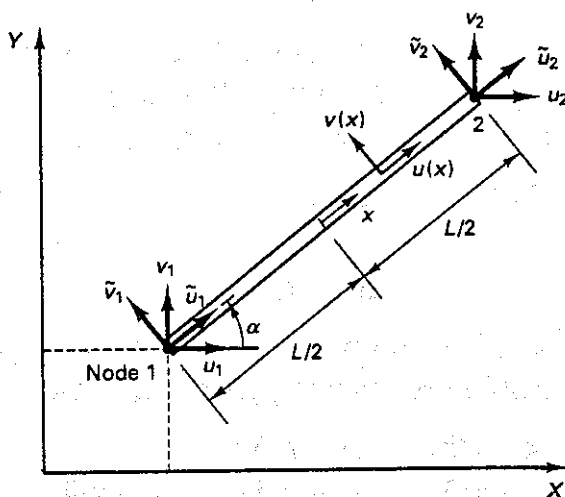
$$\mathbf{u} = \mathbf{H} \hat{\mathbf{u}} \quad (\text{ب})$$

که در آن: $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}^{(m)}$ و دلالت ضمنی بر این نکته دارد که یک عنصر خاصی در نظر گرفته شده است. $\hat{\mathbf{u}}$ = تغییر مکان‌های نقاط گرهی عنصر مورد نظر؛ عناصر بردار $\hat{\mathbf{u}}$ آن تغییر مکان‌هایی در $\hat{\mathbf{U}}$ هستند که متعلق به عنصر می‌باشند.

$$\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{H}} \tilde{\mathbf{u}} \quad (\text{ج})$$

که در آن $\tilde{\mathbf{u}}$ = تغییر مکان‌های نقاط گرهی عنصر در دستگاه مختصاتی غیر از دستگاه کلی (که در آن $\hat{\mathbf{U}}$ تعریف می‌شود).

مثال ۴.۱۰: ماتریس \mathbf{H} را برای عنصر خربایی که در شکل ۴.۱۰ نشان داده شده است ایجاد کنید. جهات درجات آزادی محلی و کلی در شکل نشان داده می‌شوند.



شکل ۴.۱۰ عنصر خربایی

حل:

در این جا داریم:

$$\begin{bmatrix} u(x) \\ v(x) \end{bmatrix} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \left(\frac{L}{2} - x\right) & 0 & \left(\frac{L}{2} + x\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{L}{2} - x\right) & 0 & \left(\frac{L}{2} + x\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

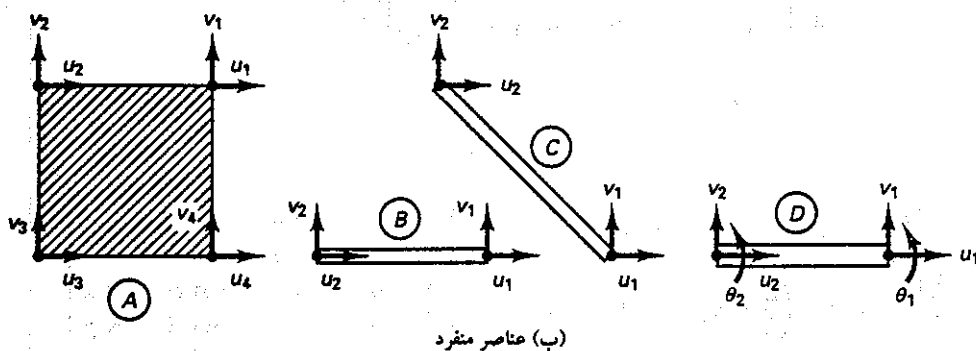
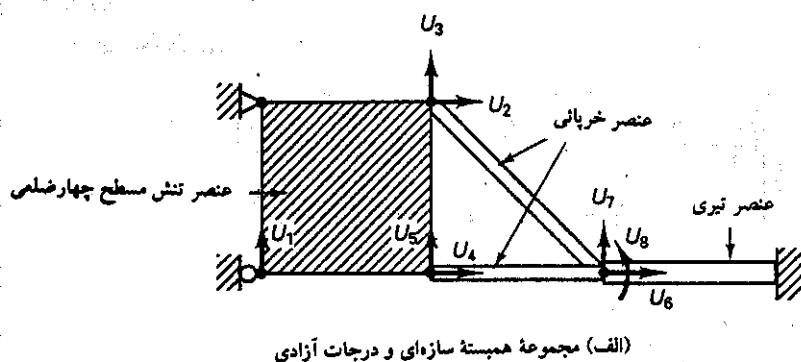
$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad \text{و}$$

بنابراین داریم:

$$\mathbf{H} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \left(\frac{L}{2} - x\right) & 0 & \left(\frac{L}{2} + x\right) & 0 \\ 0 & \left(\frac{L}{2} - x\right) & 0 & \left(\frac{L}{2} + x\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$$

باید دانست که برای ایجاد ماتریس کرنش - تغییر مکان \mathbf{B} (در تحلیل خطی) تنها نخستین سطر ماتریس \mathbf{H} مورد نیاز است، زیرا فقط تنش عمودی $\epsilon_{xx} = \partial u / \partial x$ در استخراج ماتریس سختی در نظر گرفته می‌شود. در عمل، روش مؤثر به این صورت است که تنها از سطر اول ماتریس \mathbf{H} در (الف) استفاده می‌شود و سپس ماتریس \mathbf{K} با استفاده از رابطه (۴.۴۱) تبدیل می‌گردد.

مثال ۴.۱۱: فرض کنید که ماتریس‌های سختی عنصری که متناظر با تغییر مکان‌های عنصری نشان داده شده در شکل ۴.۱۱ می‌باشند محاسبه شده‌اند. عناصر (A)، (B)، (C) و (D) نشان داده می‌شوند. مستقیماً ماتریس‌های عنصری مذکور را در ماتریس سختی کلی سازه با در نظر گرفتن شرایط مرزی تغییر مکانی نشان داده شده در شکل (الف) ۴.۱۱ E سوار کنید. همچنین آرایه اتصال LM را برای عناصر مزبور به دست آورید.



شکل ۴.۱۱ یک مجموعه ساده همبسته عناصر

حل:

در این تحلیل همه ماتریس‌های سختی عنصری پیش از این متناظر با درجات آزادی که در امتداد جهات کلی می‌باشند ایجاد شده‌اند. بنابراین تبدیلی مانند رابطه (۴.۴۱) مورد نیاز نیست و می‌توان مستقیماً ماتریس سختی کل سازه را تشکیل داد.

از آنجا که تغییر مکان‌ها در تکیه‌گاهها صفر می‌باشند، ضروری است که فقط ماتریس سختی سازه را متناظر با مؤلفه‌های مجهول تغییر مکان U تشکیل داد. آرایه اتصال (آرایه LM) برای هر عنصر شامل درجات آزادی کلی سازه می‌باشد که به ترتیب درجات آزادی محلی عنصری قرار گرفته‌اند و دارای مقدار صفر به ازای ستون و سطر متناظر ماتریس سختی عنصری است که در تشکیل ماتریس سختی کل سازه نقشی ندارد. (ستون و سطر که متناظر با یک درجه آزادی کلی صفر است) (همچنین ر.ک. به: فصل دوازدهم).

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 U_2 & U_3 & & U_1 & U_4 & U_5 \leftarrow \text{Global displacements} \\
 u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \leftarrow \text{Local displacements}
 \end{array} \\
 K_A = \begin{bmatrix}
 a_{11} & a_{12} & \dots & a_{16} & a_{17} & a_{18} \\
 a_{21} & a_{22} & \dots & a_{26} & a_{27} & a_{28} \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 a_{61} & a_{62} & \dots & a_{66} & a_{67} & a_{68} \\
 a_{71} & a_{72} & \dots & a_{76} & a_{77} & a_{78} \\
 a_{81} & a_{82} & \dots & a_{86} & a_{87} & a_{88}
 \end{bmatrix}
 \begin{array}{c}
 u_1 & U_2 \\
 v_1 & U_3 \\
 u_2 \\
 v_2 \\
 u_3 \\
 v_3 & U_1 \\
 u_4 & U_4 \\
 v_4 & U_5
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 U_6 & U_7 & U_4 & U_5 \\
 u_1 & v_1 & u_2 & v_2
 \end{array} \\
 K_B = \begin{bmatrix}
 b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\
 b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} \\
 b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} \\
 b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44}
 \end{bmatrix}
 \begin{array}{c}
 u_1 & U_6 \\
 v_1 & U_7 \\
 u_2 & U_4 \\
 v_2 & U_5
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccc}
 U_6 & U_7 & U_2 & U_3 \\
 u_1 & v_1 & u_2 & v_2
 \end{array} \\
 K_C = \begin{bmatrix}
 c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} \\
 c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} \\
 c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} \\
 c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44}
 \end{bmatrix}
 \begin{array}{c}
 u_1 & U_6 \\
 v_1 & U_7 \\
 u_2 & U_2 \\
 v_2 & U_3
 \end{array}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 U_6 & U_7 & U_8 \\
 u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2
 \end{array} \\
 K_D = \begin{bmatrix}
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 \dots & \dots & \dots & d_{44} & d_{45} & d_{46} \\
 \dots & \dots & \dots & d_{54} & d_{55} & d_{56} \\
 \dots & \dots & \dots & d_{64} & d_{65} & d_{66}
 \end{bmatrix}
 \begin{array}{c}
 u_1 \\
 v_1 \\
 \theta_1 \\
 u_2 & U_6 \\
 v_2 & U_7 \\
 \theta_2 & U_8
 \end{array}
 \end{array}$$

و معادله $K = \sum_m K^{(m)}$ نتیجه زیر را به دست می‌دهد:

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{ccccccccc}
 U_1 & U_2 & U_3 & U_4 & U_5 & U_6 & U_7 & U_8 \\
 a_{66} & a_{61} & a_{62} & a_{67} & a_{68} & \text{zeros} & & \\
 a_{16} & a_{11} + c_{33} & a_{12} + c_{34} & a_{17} & a_{18} & c_{31} & c_{32} & \\
 a_{26} & a_{21} + c_{43} & a_{22} + c_{44} & a_{27} & a_{28} & c_{41} & c_{42} & \\
 a_{76} & a_{71} & a_{72} & a_{77} + b_{33} & a_{78} + b_{34} & b_{31} & b_{32} & \\
 a_{86} & a_{81} & a_{82} & a_{87} + b_{43} & a_{88} + b_{44} & b_{41} & b_{42} & \\
 c_{13} & c_{14} & b_{13} & b_{14} & b_{11} + c_{11} & b_{12} + c_{12} & d_{45} & \\
 c_{23} & c_{24} & b_{23} & b_{24} & b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} & d_{56} & \\
 & & & & + d_{54} & + d_{55} & & \\
 & & & & d_{64} & d_{65} & d_{66} &
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 U_1 \\
 U_2 \\
 U_3 \\
 U_4 \\
 U_5 \\
 U_6 \\
 U_7 \\
 U_8
 \end{array}$$

symmetric about diagonal

آرایه‌های LM برای عناصر عبارتند از:

$$\text{برای عنصر A: } LM = [2 \ 3 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 4 \ 5]$$

$$\text{برای عنصر B: } LM = [6 \ 7 \ 4 \ 5]$$

$$\text{برای عنصر C: } LM = [6 \ 7 \ 2 \ 3]$$

$$\text{برای عنصر D: } LM = [0 \ 0 \ 0 \ 6 \ 7 \ 8]$$

یادآوری می‌کنیم که اگر ماتریس‌های سختی عناصر و آرایه‌های LM معلوم باشند، ماتریس سختی کل سازه را می‌توان مستقیماً به طریقه‌ای خودکار به دست آورد (همچنین ر.ک. به: فصل دوازدهم).

۴.۲.۲ اعمال شرایط مرزی تغییر مکانی

در بخش ۳.۳.۲ بحث کردیم که در تحلیل یک محیط پیوسته، شرایط مرزی تغییر مکانی (که شرایط مرزی اساسی نیز نامیده می‌شوند) و شرایط مرزی نیرویی (که شرایط مرزی طبیعی نیز نامیده می‌شوند) وجود دارند. با استفاده از روش عناصر محدود مبتنی بر تغییر مکان، شرایط مرزی نیرویی در تعیین بردار نیروی نقاط گرهی وارد خارجی در نظر گرفته می‌شوند. بردار R_e شامل بارهای متمرکز و نیز واکنش‌های تکیه‌گاهی بوده و بردار R_e شامل اثر نیروهای سطحی گسترده و واکنش‌های تکیه‌گاهی گسترده است.

فرض کنید که معادلات تعادل یک سیستم عناصر محدود بدون اعمال شرایط مرزی تغییر مکانی و صرف‌نظر از اثر میرایی، همانگونه که در بخش ۴.۲.۱ استخراج گردیدند، به صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{bmatrix} M_{aa} & M_{ab} \\ M_{ba} & M_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{U}_a \\ \ddot{U}_b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} K_{aa} & K_{ab} \\ K_{ba} & K_{bb} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_a \\ R_b \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

که در آن U_a تغییر مکان‌های مجهول و \ddot{U}_a تغییر مکان‌های معلوم یا از پیش تعیین شده می‌باشند. اگر معادلات مذکور برای یافتن U_a حل شوند، رابطه زیر به دست می‌آید:

$$M_{aa}\ddot{U}_a + K_{aa}U_a = R_a - K_{ab}U_b - M_{ab}\ddot{U}_b \quad (4.43)$$

که در آن برای یافتن U_a لازم است که تنها ماتریس‌های سختی و جرم کل سازه که متناظر با درجات آزادی مجهول U_a می‌باشند تشکیل گردند (ر.ک. به: مثال ۴.۱۱)، ولی بردار بار R_a باید برای در بر گرفتن اثرات تغییر مکان‌های غیر صفر اعمال شده اصلاح گردد. به محض اینکه تغییر

مکان‌های U_a از رابطه (۴.۴۳) تعیین گردیدند، واکنش‌های تکیه‌گاهی را می‌توان از رابطه زیر محاسبه نمود [با استفاده از (۴.۱۸)]:

$$R_b = R_b^* + R_b^* - R_r^* + R_c^* + R_r \quad (۴.۴۴)$$

که در آن $R_b^*, R_r^*, R_s^*, R_b^*$ بارهای نقاط گرهی وارد مجهول می‌باشند که شامل واکنش‌های تکیه‌گاهی نیستند و R_r واکنش‌های تکیه‌گاهی مجهول را نشان می‌دهد. اندیس بالای b نشان می‌دهد که از R_B و R_S و R_I و R_C در رابطه (۴.۱۷) تنها از مؤلفه‌های متناظر با درجات آزادی U_b در بردارهای نیرو استفاده می‌شود. توجه شود که بردار R_r را می‌توان به عنوان یک تصحیح مجهول اعمال شده به بارهای متمرکز تلقی کرد. در این صورت با استفاده از (۴.۴۴) و دومین مجموعه معادلات (۴.۴۲)، رابطه زیر را پیدا می‌کنیم:

$$R_r = M_{ba}\ddot{U}_a + M_{bb}\ddot{U}_b + K_{ba}U_a + K_{bb}U_b - R_b^* - R_s^* + R_r^* - R_c^* \quad (۴.۴۵)$$

در رابطه مذکور، چهار عبارت آخر، تصحیحی می‌باشند که ناشی از بارگذاری داخلی و سطحی در عناصر بوده و نیز ناشی از هر بارگذاری متمرکز است که مستقیماً به تکیه‌گاهها اعمال می‌شود.

این روابط را در مثال زیر نشان می‌دهیم:

مثال ۴.۱۲: سازه نشان داده شده در شکل ۴.۱۲ را در نظر بگیرید. پاسخ تغییر مکان را یافته و واکنشهای تکیه‌گاهی را محاسبه کنید.

حل:

تیر طره‌ای را به صورت مجموعه همبسته از دو عنصر تیری در نظر می‌گیریم. معادلات تعادل حاکم (۴.۴۲) عبارتند از (با استفاده از ماتریس‌های مثال ۴.۱):

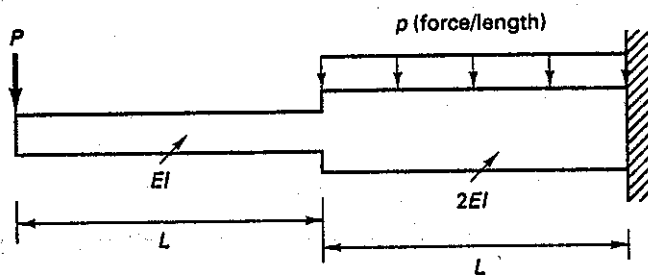
$$\frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ \frac{6}{L} & 4 & -\frac{6}{L} & 2 \\ -\frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & \frac{36}{L^2} & \frac{6}{L} & -\frac{24}{L^2} & \frac{12}{L} \\ \frac{6}{L} & 2 & \frac{6}{L} & 12 & -\frac{12}{L} & 4 \\ & & -\frac{24}{L^2} & -\frac{12}{L} & \frac{24}{L^2} & -\frac{12}{L} \\ & & \frac{12}{L} & 4 & -\frac{12}{L} & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -P \\ 0 \\ -\frac{pL}{2} \\ -\frac{pL^2}{12} \\ -\frac{pL}{2} + R_r|_{u_5} \\ \frac{pL^2}{12} + R_r|_{u_6} \end{bmatrix}$$

در اینجا $U_b = 0$ و $U_b^T = [U_5 \ U_6]$ با استفاده از رابطه (۴.۴۳) برای حالت $EI = 10^7$ و $L = 100$ و $p = 0.01$ و $P = 1$ نتیجه زیر را به دست می‌آوریم:

$$U_b^T = [-165 \ 1.33 \ -47.9 \ 0.83] \times 10^{-3}$$

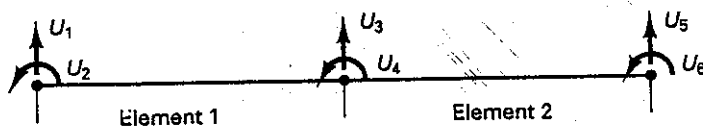
و سپس با استفاده از (۴.۴۵) نتیجه زیر حاصل می‌گردد:

$$R_r = \begin{bmatrix} 2 \\ -250 \end{bmatrix}$$



$$\begin{aligned} EI &= 10^7 \\ L &= 100 \\ p &= 0.01 \\ P &= 1.0 \end{aligned}$$

(الف) تیر طرّه‌ای



(ب) گسته‌سازی

شکل ۴.۱۲ تحلیل یک تیر طرّه‌ای

در هنگام استفاده از رابطه ۴.۴۲، فرض می‌کنیم که مؤلفه‌های تغییر مکانی به کار رفته در بخش ۴.۲.۱ شامل تمامی تغییر مکان‌های از پیش تعیین شده می‌باشد (که با U_b در (۴.۴۲) نشان

داده می‌شود). اگر این حالت پیش نیاید، ضروری است که تمامی تغییر مکان‌های از پیش تعیین شده را که متناظر با درجات آزادی تعریف شده کلی سازه نمی‌باشند مشخص کنیم و معادلات تعادل عناصر محدود را تبدیل نماییم تا متناظر با تغییر مکان‌های از پیش تعیین شده گردند. بنابراین می‌توان نوشت که:

$$U = T\bar{U} \quad (۴.۴۶)$$

که در آن \bar{U} بردار درجات آزادی نقاط گرهی در جهات مورد نیاز می‌باشد. ماتریس تبدیل T یک ماتریس همانی است که در آن کوسینوس‌های هادی مؤلفه‌های \bar{U} که در جهت تغییر مکان‌های اولیه تعیین شده‌اند جایگزین می‌شوند (ر.ک. به: (۲.۵۸). با استفاده از رابطه (۴.۴۶) در (۴.۴۲) نتیجه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\bar{M}\ddot{\bar{U}} + \bar{K}\bar{U} = \bar{R} \quad (۴.۴۷)$$

که در آن داریم:

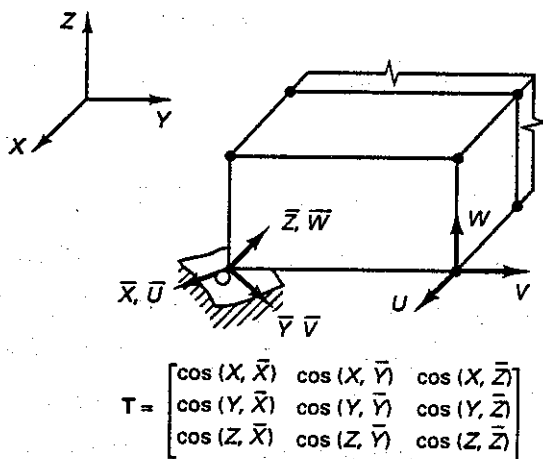
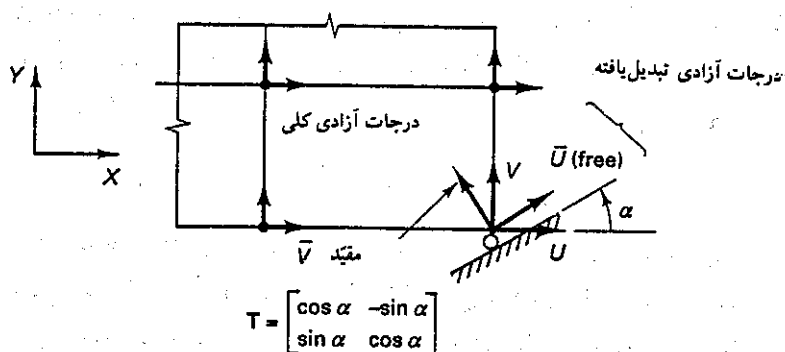
$$\bar{M} = T^T M T; \quad \bar{K} = T^T K T; \quad \bar{R} = T^T R \quad (۴.۴۸)$$

باید دانست که ضرب‌های ماتریسی (۴.۴۸) تنها موجب تغییراتی در آن سطرها و ستونهایی از ماتریس‌های M و K و R می‌شوند که تحت اثر این تبدیل بوده و این تبدیل هم‌ارز با محاسبات انجام شده در (۴.۴۱) در روی یک ماتریس عنصری منفرد است. در عمل، تبدیل مذکور بطور مؤثری در ماتریس‌های عناصر قبل از سوار نمودن آن ماتریس‌ها در روی ماتریس کل سازه انجام می‌شود. شکل ۴.۳ ماتریس‌های تبدیل T برای یک نقطه گرهی در تحلیل دوبعدی و سه بعدی را در حالتی که تغییر مکان در جهات چاره‌مقید شده‌اند به دست می‌دهد. حال تغییر مکان‌های مجهول را می‌توان از (۴.۴۷) با استفاده از شیوه ارائه شده در (۴.۴۲) و (۴.۴۳) محاسبه نمود.

در یک روش دیگر، تغییر مکان‌های مورد نیاز را می‌توان با اضافه نمودن معادلات قیدی به معادلات تعادل عناصر محدود (۴.۴۷) اعمال نمود. معادلات قیدی مزبور بیانگر شرایط تغییر مکان‌های از پیش تعیین شده می‌باشند. فرض کنید که یک تغییر مکان خاص به درجه آزادی i اعمال شده است بگونه‌ای که $\bar{U}_i = b$ ؛ در این صورت معادله قیدی زیر:

$$k\bar{U}_i = kb \quad (۴.۴۹)$$

به معادلات تعادل (۴.۴۷) افزوده می‌شود و در آن داریم: $k \gg k_{ii}$ بنابراین حالا باید از حل معادلات تعادل اصلاح شده جواب $\bar{U}_i = b$ به دست آید، و یادآوری می‌کنیم که چون از رابطه (۴.۴۷) استفاده شده است، عنصر قطری در ماتریس سختی تحت تأثیر قرار می‌گیرد و در نتیجه

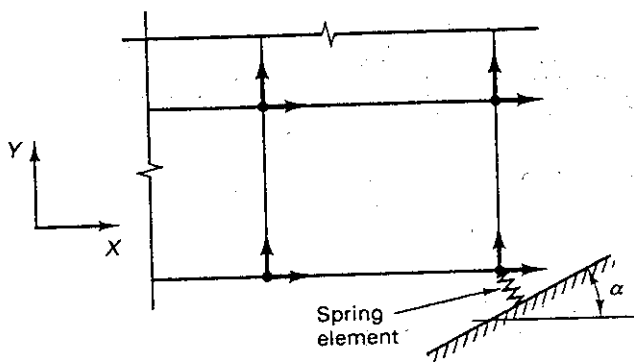


شکل ۴.۳. تبدیل یک شرایط مرزی چاروله

یک حل پایدار از نظر عددی حاصل می‌شود (ر.ک. به: بخش ۸.۲.۶). تفسیر فیزیکی شیوه مذکور به این صورت است که گویا در درجه آزادی i یک فنر با سختی بزرگ k اضافه شده است و یک بار مشخصی تعیین شده است که به علت انعطاف‌پذیری نسبی سازه در آن درجه آزادی موجب تغییر مکان مورد نظر b می‌شود (ر.ک. به: شکل (۴.۴)). از نکته نظر ریاضی، روش مذکور معادل کاربرد روش تاوان است که در بخش ۳.۴ مورد بحث واقع گردید.

علاوه بر شرایط تغییر مکان‌های نقاط گرهی مشخص، برخی تغییر مکان‌های نقاط گرهی نیز ممکن است که تحت اثر شرایط قیدی قرار گیرند. با ملاحظه (۴.۲۴)، یک معادله قیدی نمونه به صورت زیر خواهد بود:

$$U_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{qj} U_{qj} \quad (۴.۵۰)$$



شکل ۴.۴ شرط مرزی چاوله که با استفاده از عنصر فنری اعمال می‌شود.

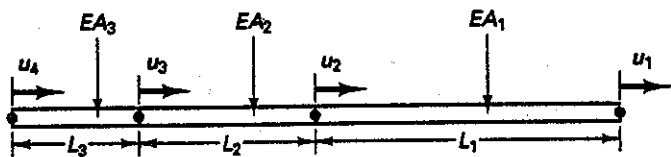
که در آن U_i یک تغییر مکان وابسته نقطه گرهی و U_{qj} و r_i تغییر مکان‌های مستقل نقاط گرهی می‌باشند. اگر تمامی معادلات قیدی را به صورت رابطه (۴.۵۰) استفاده کنیم و این نکته را قبول کنیم که این معادلات باید در موقع کاربرد اصل کار مجازی به ازای تغییر مکان‌های نقاط گرهی واقعی و نیز به ازای تغییر مکان‌های مجازی صادق باشند، در این صورت اعمال قیدها همانند یک تبدیل با استفاده از روابط (۴.۴۶) و (۴.۴۷) خواهد بود که در آنها T یک ماتریس مستطیلی بوده و \bar{T} شامل تمامی درجات آزادی مستقل می‌باشد. این تبدیل معادل اضافه نمودن α_{qj} برابر ستون‌ها و سطرهای i ام به ستون‌ها و سطرهای qj ام است با در نظر گرفتن اینکه $j = 1, \dots, r_i$ و این که تمامی i های مورد نظر استفاده شده‌اند. در پیاده‌سازی واقعی، تبدیل مذکور به طور مؤثری پیش از فرایند سوار نمودن، در روی ماتریس‌های عناصر انجام می‌گیرد.

سرانجام باید دانست که ترکیب شرایط مرزی تغییر مکانی مذکور نیز امکان‌پذیر است؛ به عنوان مثال در (۴.۵۰) یک مؤلفه تغییر مکان مستقل ممکن است متناظر با یک شرط مرزی چاوله با یک تغییر مکان مشخص باشد. در مثال‌های زیر اعمال قیدهای تغییر مکانی را نشان می‌دهیم.

مثال ۴.۱۳: سازه خربایی نشان داده شده در شکل ۴.۱۳ E را در نظر بگیرید. ماتریس سختی سازه را که شامل شرایط قیدی داده شده می‌باشد ایجاد نمایید.

حل:

در این تحلیل، U_1 و U_2 و U_4 درجات آزادی مستقل می‌باشند. ماتریس‌های سختی عنصر در شکل ۴.۱۳ E داده شده‌اند. و مطابق با رابطه (۴.۵۰) داریم: $i = 3$ و $\alpha_i = 2$ و $q_i = 1$.



Displacement conditions: $u_3 = 2u_1$

$$u_4 = \delta$$

$$K_I = \frac{EA_I}{L_I} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

شکل ۴.۱۳ مجموعه همبسته خربایی

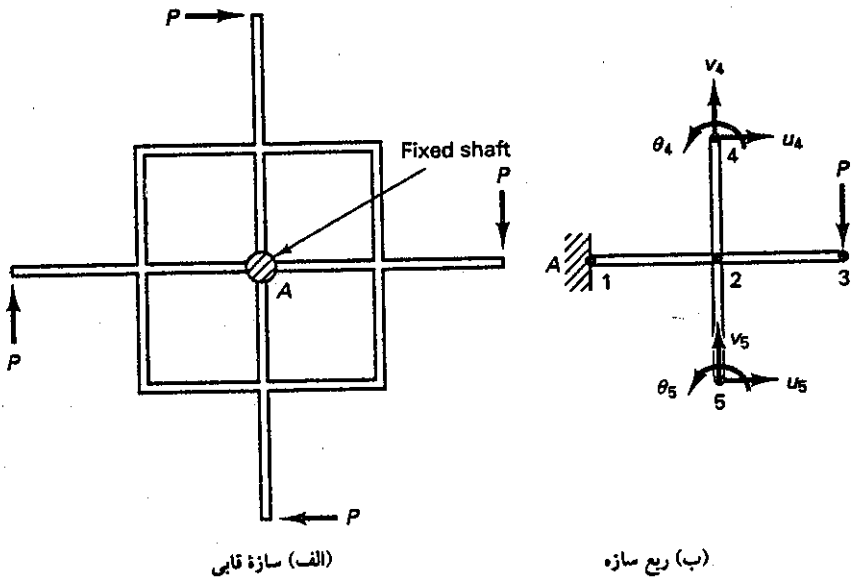
در این صورت ماتریس سختی کل سازه مستقیماً با انجام فرایند به هم سوار کردن ماتریس‌های عناصر حاصل می‌گردد:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{EA_1}{L_1} & -\frac{EA_1}{L_1} & 0 \\ -\frac{EA_1}{L_1} & \frac{EA_1}{L_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4EA_2}{L_2} & -\frac{2EA_2}{L_2} & 0 \\ -\frac{2EA_2}{L_2} & \frac{EA_2}{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{4EA_3}{L_3} & 0 & -\frac{2EA_3}{L_3} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2EA_3}{L_3} & 0 & \frac{EA_3}{L_3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{bmatrix}$$

که در آن داریم:

$$k \gg \frac{EA_3}{L_3}$$

مثال ۴.۱۴: تحلیل سازه قابی نشان داده شده در شکل (الف) E ۴.۱۴ مورد نظر است. در تحلیل سازه مذکور از شرایط تقارن و شرایط قیدی جهت ایجاد یک مدل مناسب استفاده نمایید.



شکل ۴.۱۴ تحلیل یک سازه متقارن دوری

حل:

کل سازه و بارگذاری وارد بر آن یک تقارن دوری را نشان می‌دهد، بنابراین لازم است که فقط یک چهارم سازه، بگونه‌ای که در شکل (ب) ۴.۱۴ E نشان داده شده است با شرایط قیدی زیر در نظر گرفته شود:

$$u_5 = v_4$$

$$v_5 = -u_4$$

$$\theta_5 = \theta_4$$

این یک مثال ساده‌ای است که نشان می‌دهد که چگونه کوشش مورد نیاز برای تحلیل را می‌توان به طور قابل توجهی با استفاده از شرایط تقارن کاهش داد. در عمل صرفه‌جویی از طریق استفاده از شرایط تقارن دوری در برخی حالات می‌تواند قابل توجه باشد و در حقیقت با استفاده از چنین شرایطی است که تحلیل سازه امکان‌پذیر می‌شود.

در این تحلیل، سازه و بارگذاری، تقارن دوری را نشان می‌دهد. در حالتی که سازه تقارن دوری داشته ولی تحت اثر بارگذاری دلخواهی قرار گرفته است، می‌توان با مدل نمودن مناسب بخشی از سازه ظرفیت و توانایی تحلیل را بسط داد (به عنوان مثال ر.ک. به: [A] W. Zhong and C. Qiu).

۴.۲.۳ مدل‌های مختصات تعمیم یافته برای مسائل خاص

در بخش ۴.۲.۱، روش گسسته‌سازی عناصر محدود و استخراج معادلات تعادل در حالت عمومی ارائه گردید، به عبارت دیگر، یک جسم عمومی سه بعدی در نظر گرفته شد. چنان که در مثال‌ها نشان داده شد، معادلات عمومی استخراج شده باید به صورت خاص در تحلیل‌های خاص برای شرایط معین تنش و کرنش بکار روند. هدف این بخش بحث و بیان اختصاری این نکته است که چگونه می‌توان ماتریس‌های عناصر محدود را برای مسائل خاص از معادلات عمومی عناصر محدود (۴.۸) الی (۴.۲۵) به دست آورد.

اگرچه هر جسمی در تئوری، سه بعدی تلقی می‌شود، ولی برای تحلیل عملی آن در اغلب حالات تبدیل آن به جسم یک بعدی یا دو بعدی الزامی و ضروری است. بنابراین اولین گام در یک تحلیل عناصر محدود تصمیم‌گیری در مورد نوع مسأله^(۸) مورد نظر برای تحلیل می‌باشد. تصمیم مذکور براساس فرضیاتی استوار است که در تئوری ارتجاعی مدل‌های ریاضی برای مسائل خاص مورد استفاده قرار می‌گیرند. مسائلی را که با آنها در تحلیل مهندسی روبرو می‌شویم، می‌توان به صورت زیر رده‌بندی کرد: (۱) خربا، (۲) تیر، (۳) تنش مسطح (۴) کرنش مسطح، (۵) متقارن محوری، (۶) خمش صفحه، (۷) پوسته نازک، (۸) پوسته کلفت و (۹) سه بعدی عمومی. برای هر یک از این حالات، فرمول‌بندی عمومی را می‌توان به کار برد، با وجود این تنها باید متغیرهای مناسب تغییر مکان، تنش و کرنش را مورد استفاده قرار داد. این متغیرها در جا اول ۴.۲ و ۴.۳ جمع‌بندی شده‌اند. همچنین در جداول مذکور ماتریس‌های تنش - کرنش با در نظر گرفتن مصالح ایزوتروپیک ارائه گردیده‌اند. شکل ۴.۵ شرایط مختلف تنش و کرنش را نشان می‌دهد که در فرمول‌بندی ماتریس‌های عناصر محدود در نظر گرفته می‌شوند.

جدول ۴.۲ متغیرهای سینماتیکی و ایستایی متناظر در مسائل مختلف

مسئله	مؤلفه‌های تغییر مکان	بردار کرنش ϵ^T	بردار تنش σ^T
میله	u	$\{\epsilon_{xx}\}$	$\{\sigma_{xx}\}$
تیر	w	$\{K_{xx}\}$	$\{M_{xx}\}$
تنش مسطح	u, v	$\{\epsilon_{xx} \epsilon_{yy} \gamma_{xy}\}$	$\{\tau_{xx} \tau_{yy} \tau_{xy}\}$
کرنش مسطح	u, v	$\{\epsilon_{xx} \epsilon_{yy} \gamma_{xy}\}$	$\{\tau_{xx} \tau_{yy} \tau_{xy}\}$
متقارن محوری	u, v	$\{\epsilon_{xx} \epsilon_{yy} \gamma_{xy} \epsilon_{zz}\}$	$\{\tau_{xx} \tau_{yy} \tau_{xy} \tau_{zx}\}$
سه بعدی	u, v, w	$\{\epsilon_{xx} \epsilon_{yy} \epsilon_{zz} \gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx}\}$	$\{\tau_{xx} \tau_{yy} \tau_{zz} \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx}\}$
خمش صفحه	w	$\{K_{xx} K_{yy} K_{xy}\}$	$\{M_{xx} M_{yy} M_{xy}\}$

$$\text{نمادگذاری: } \epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \dots, K_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, K_{yy} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, K_{xy} = 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

(۸) هنگامی که در تحلیل مهندسی از «انتخاب نوع مسأله» صحبت می‌کنیم در حقیقت منظورمان «انتخاب نوع مدل ریاضی» می‌باشد.

در مثال‌های ۴.۵ الی ۴.۱۰ پیش از این برخی ماتریس‌های خاص عناصر محدود را ایجاد نمودیم. اگر به مثال ۴.۶ که در آن شرط تنش مسطح را در نظر گرفتیم، رجوع کنیم، برای تغییر مکان‌های u و v چند جمله‌ای‌های خطی ساده فرض کردیم که در آنها ضرایب مجهول چند جمله‌ای‌ها را به عنوان مختصات تعمیم یافته مشخص نمودیم. تعداد ضرایب مجهول در چند جمله‌ای‌ها مساوی تعداد تغییر مکان‌های نقاط گرهی عنصر بود. با بیان مختصات تعمیم یافته بر حسب تغییر مکان‌های نقاط گرهی عنصر دریافتیم که عموماً هر ضریب چند جمله‌ای یک تغییر مکان واقعی نیست بلکه برابر یک ترکیب خطی تغییر مکان‌های نقاط گرهی عنصر می‌باشد.

اگر ماتریس‌های عناصر محدود با این فرض فرمول‌بندی شوند که تغییر مکان‌ها بر مبنای تابعی تغییر می‌کنند که ضرایب مجهول آن تابع، مختصات تعمیم یافته هستند، در این صورت به آنها، مدل‌های عناصر محدود مختصات تعمیم یافته اطلاق می‌شود. چند جمله‌ای‌ها رده‌ای از توابع می‌باشند که طبیعتاً برای تقریب‌سازی تغییر مکان‌های عناصر مورد استفاده قرار می‌گیرند، زیرا این نوع توابع عموماً برای تقریب‌سازی توابع مجهول به کار می‌روند و هر چقدر درجه چند جمله‌ای‌ها بالاتر باشد، به همان میزان تقریب‌سازی بهتری را می‌توان انتظار داشت. همچنین، چند جمله‌ای‌ها به آسانی مشتق‌گیری می‌شوند؛ به عبارت دیگر اگر چند جمله‌ای‌ها تغییر مکان‌های سازه را تقریب‌سازی کنند، در این صورت کرنش‌ها را می‌توان با سهولت نسبی تعیین نمود.

با استفاده از فرض چند جمله‌ای برای تغییر مکان‌ها، تعداد بسیار زیادی از عناصر محدود را برای تمامی مسائل عمومی در مکانیک سازه‌ای ایجاد نموده‌اند.

هدف این بخش توصیف فرمول‌بندی تعداد متنوعی از مدل‌های عناصر محدود مختصات تعمیم یافته می‌باشد که در آنها برای تقریب‌سازی میدان‌های تغییر مکان از چند جمله‌ای‌ها استفاده می‌شود. در اصل از توابع دیگری نیز به طریق مشابه می‌توان استفاده نمود و کاربرد آنها در مسائل خاصی می‌تواند مفید باشد (ر.ک. به: مثال ۴.۲۰). در ارائه این مدل‌ها، به جای پرداختن به عناصر محدودی که از نظر عددی مؤثر می‌باشند، بر فرمول‌بندی عمومی آن مدل‌ها تأکید خواهد شد. بنابراین، نقش این بخش عمدتاً تقویت و افزایش فهم عمومی ما از روش عناصر محدود خواهد بود. عناصر محدود بسیار مؤثر برای کاربردهای عمومی، عناصر تک‌پارامتری می‌باشند که در فصل پنجم توصیف خواهند شد.

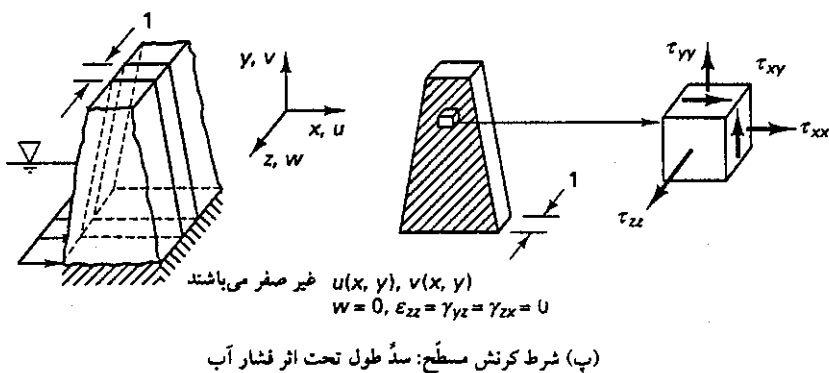
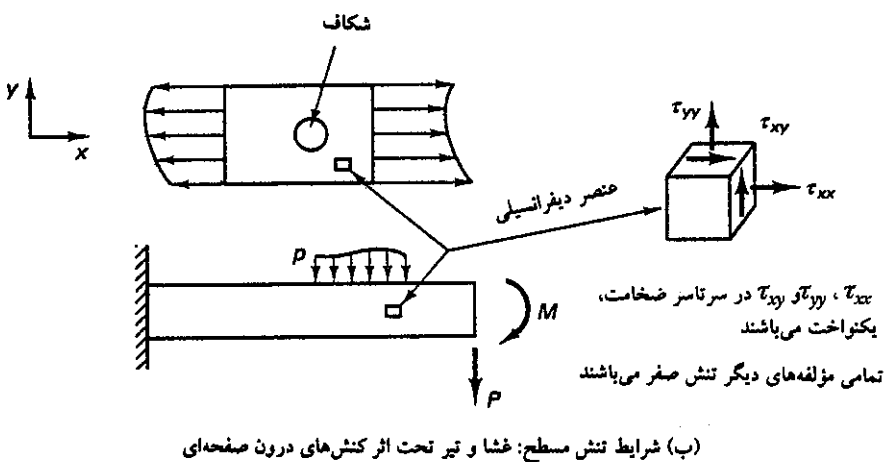
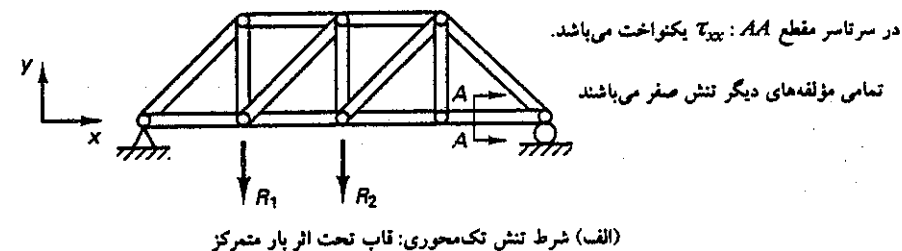
در استخراج معادلات زیر، تغییر مکان‌های عناصر محدود همواره در دستگاه مختصات محلی نشان داده شده در شکل ۴.۵ توصیف خواهند شد. همچنین، از آنجا که یک عنصر خاص را در نظر می‌گیریم، اندیس بالایی (m) را که در بخش ۴.۲.۱ استفاده کردیم حذف خواهیم کرد [ر.ک. به: (۴.۳۱)].

جدول ۴.۳ ماتریس‌های تعمیم یافته تنش - کرنش برای مصالح ایزوتروپیک و مسائل جدول ۴.۲

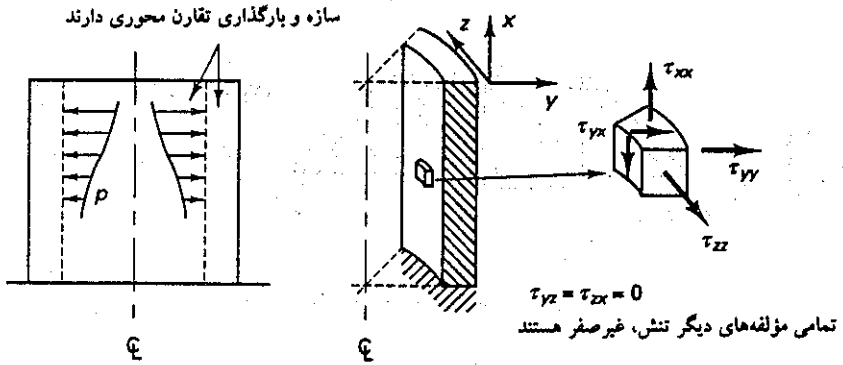
مسئله	ماتریس مصالح C
میله تیر تنش سطح	$\frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$
کرنش سطح	$\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$
مقاوم محوری	$\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 1 \end{bmatrix}$
سه بعدی	$\frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 \\ \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}$
خمش صفحه	$\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$

عناصر نشان داده نشده، صفراند

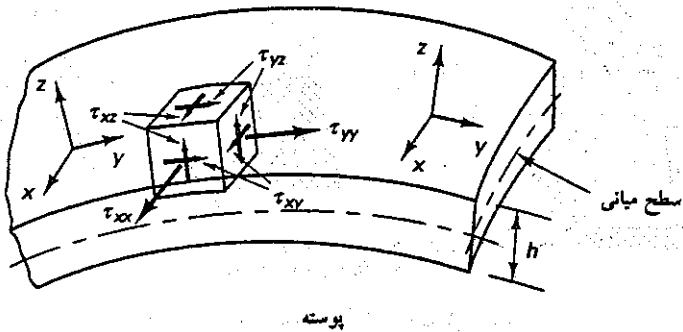
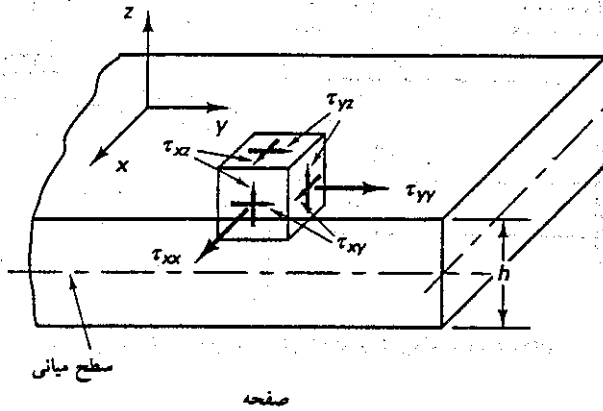
E = مدول یانگ، ν = ضریب پواسون، h = ضخامت صفحه، I = ممان اینرسی



شکل ۴.۵ شرایط مختلف تنش و کرنش با مثالهای مصور



(ت) شرط متقارن محوری: استوانه تحت اثر فشار داخلی



$\tau_{zz} = 0$
تمامی مؤلفه‌های دیگر تنش، غیر صفر هستند

(ث) سازه‌های صفحه‌ای و پوسته‌ای

شکل ۴.۵ (ادامه)

برای عناصر یک بعدی میله‌ای (عناصر خربایی) داریم:

$$u(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \dots \quad (۴.۵۱)$$

که در آن x در طول عنصر تغییر می‌کند و u تغییر مکان محلی مربوط به عنصر بوده و $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ مختصات تعمیم یافته می‌باشند. بسط تغییر مکانی (۴.۵۱) را می‌توان برای تغییر مکان‌های جانبی و طولی یک تیر نیز به کار برد.

برای عناصر دوبعدی (به عبارت دیگر تنش مسطح، کرنش مسطح و عناصر متقارن محوری)، تغییر مکان‌های u و v را به عنوان توابعی از مختصات x و y در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 + \dots \\ v(x, y) &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy + \beta_5 x^2 + \dots \end{aligned} \quad (۴.۵۲)$$

که در آنها $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ و β_1, β_2, \dots مختصات تعمیم یافته می‌باشند. در حالت عنصر خمش صفحه‌ای، تغییر مکان جانبی w به عنوان تابعی از مختصات x و y به صورت فرض می‌شود:

$$w(x, y) = \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y + \gamma_4 xy + \gamma_5 x^2 + \dots \quad (۴.۵۳)$$

که در آن $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ مختصات تعمیم یافته می‌باشند. سرانجام برای عناصری که در آنها تغییر مکان‌های u و v و w به عنوان توابعی از مختصات x و y و z فرض می‌شوند، در حالت کلی داریم:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xy + \dots \\ v(x, y, z) &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 z + \beta_5 xy + \dots \\ w(x, y, z) &= \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y + \gamma_4 z + \gamma_5 xy + \dots \end{aligned} \quad (۴.۵۴)$$

که در آنها $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ و β_1, β_2, \dots و $\gamma_1, \gamma_2, \dots$ مختصات تعمیم یافته می‌باشند. همانگونه که برای عنصر تنش مسطح در مثال ۴.۶ بحث کردیم، روابط (۴.۵۱) الی (۴.۵۴) را می‌توان به صورت ماتریسی نوشت:

$$u = \Phi \alpha \quad (۴.۵۵)$$

که در آن بردار u متناظر با تغییر مکان‌های مورد استفاده در (۴.۵۱) الی (۴.۵۴) می‌باشد و عناصر Φ عبارات چند جمله‌ای متناظر، و α برداری است که شامل مختصات تعمیم یافته می‌باشد که به صورت مناسبی مرتب شده‌اند.

برای تعیین مختصات تعمیم یافته بر حسب تغییر مکان‌های نقاط گرهی عناصر نیاز داریم

که به تعداد تغییر مکان‌های نقاط گرهی، مختصات تعمیم یافته فرضی داشته باشیم. در این صورت، از جایگذاری مختصات نقاط گرهی عنصر در (۴.۵۵)، تغییر مکان‌های نقاط گرهی \hat{u} عنصر را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\hat{u} = A\alpha \quad (۴.۵۶)$$

با این فرض که معکوس ماتریس A وجود دارد، داریم:

$$\alpha = A^{-1}\hat{u} \quad (۴.۵۷)$$

کرنش‌های عنصر مورد نظر بستگی به مسئله خاصی دارد که می‌خواهد حل شود. اگر بردار کرنش تعمیم یافته را با ϵ نشان دهیم که مؤلفه‌های آن برای مسائل خاص در جدول ۴.۲ مشخص شده‌اند، در این صورت داریم:

$$\epsilon = E\alpha \quad (۵.۵۸)$$

که در آن ماتریس E با استفاده از رابطه (۴.۵۵) که بیانگر فرض‌های تغییر مکان می‌باشد، تعیین می‌شود. با استفاده از رابطه زیر، بردار تنش‌های تعمیم یافته τ به دست می‌آید:

$$\tau = C\epsilon \quad (۴.۵۹)$$

که در آن C یک ماتریس ارتجاعی تعمیم یافته است. کمیت‌های τ و C برای برخی مسائل در جداول ۴.۲ و ۴.۳ تعریف شده‌اند. یادآوری می‌کنیم که بجز خمش صفحه‌ای، ماتریس‌های تعمیم یافته τ و ϵ و C ، همان ماتریس‌هایی هستند که در نظریه ارتجاعی به کار می‌روند. از کلمه «تعمیم یافته» صرفاً برای دربرگرفتن انحناها و لنگرها به ترتیب به عنوان کرنش‌ها و تنش‌ها استفاده می‌شود. امتیاز استفاده از انحناها و لنگرها در تحلیل خمشی این است که در تعیین سختی، نیازی به یک انتگرال‌گیری در امتداد ضخامت عنصر نیست، زیرا تغییر کرنش و تنش در ضخامت عنصر پیش از این در نظر گرفته شده است (ر.ک. به: مثال ۴.۱۵).

در ارتباط با جدول ۴.۳، ذکر این نقطه ضروری است که تمامی ماتریس‌های تنش-کرنش را می‌توان از روابط عمومی تنش-کرنش سه بعدی استخراج نمود. ماتریس‌های تنش-کرنش برای حالات کرنش مسطح و حالت تقارن محوری، به آسانی از حذف سطرها و ستون‌هایی از ماتریس تنش-کرنش سه بعدی که متناظر با مؤلفه‌های کرنش صفر می‌باشد، به دست می‌آیند. در این صورت ماتریس تنش-کرنش برای تحلیل تنش مسطح نیز از ماتریس تنش-کرنش حالت تقارن محوری با استفاده از این شرط که τ_{zz} صفر است به دست می‌آید. (ر.ک. به: برنامه QUADS در بخش ۵.۶). برای محاسبه ماتریس تنش-کرنش تعمیم یافته برای تحلیل خمش صفحه‌ای بگونه‌ای که در مثال زیر نشان داده می‌شود، از ماتریس تنش-کرنش مربوط به شرایط تنش مسطح استفاده می‌شود.

مثال ۴.۱۵: ماتریس تنش - کرنش C را که برای تحلیل خمش صفحه استفاده می‌شود، استخراج کنید (ر.ک به: جدول ۴.۳).

کرنش‌هایی که در فاصله z از «میان - سطح» صفحه اندازه گرفته می‌شوند عبارتند از:

$$\left[-z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad -z \frac{2\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]$$

در تحلیل خمش صفحه، فرض می‌شود که هر لایه‌ای از صفحه در شرایط تنش مسطح عمل می‌کند و نیز انحنای مثبت متناظر با لنگرهای مثبت است (ر.ک. به: بخش ۵.۴.۲). بنابراین، با انتگرال‌گیری از تنش‌های عمودی صفحه برای یافتن لنگر در واحد طول، ماتریس تنش - کرنش تعمیم یافته به صورت زیر به دست می‌آید:

$$C = \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

یا

$$C = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

اگر روابط (۴.۵۵) الی (۴.۵۹) را در نظر بگیریم، در حالت کلی، درمی‌یابیم که تمامی روابط برای تعیین ماتریس‌های عناصر محدود، متناظر با تغییر مکان‌های نقاط گرهی محلی عنصر تعریف شده‌اند و با استفاده از نمادگذاری بخش ۴.۲.۱، روابط زیر به دست می‌آیند:

$$H = \Phi A^{-1} \quad (۴.۶۰)$$

$$B = EA^{-1} \quad (۴.۶۱)$$

حال می‌خواهیم به اختصار انواع مختلفی از عناصر محدود را که در تحلیل‌ها با آنها مواجه می‌شویم، مورد ملاحظه قرار دهیم. در این عناصر فرض‌های معین ایستایی یا سینماتیکی در نظر گرفته شده‌اند.

عناصر خرابایی و تیری. عناصر خرابایی و تیری به طور گسترده‌ای در مهندسی سازه برای مدل نمودن قابهای ساختمانی و پل‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند [ر.ک. به: شکل (الف) ۴.۵]. برای یک مجموعه همبسته عناصر خرابایی].

همچنان که در بخش ۴.۲.۱ گفته شد، ماتریس‌های سختی این عناصر در اغلب حالات از

حل معادلات دیفرانسیل تعادل محاسبه می‌شوند (ر.ک. به: مثال ۴.۸) و متون علمی زیادی در خصوص استخراج این ماتریس‌ها منتشر شده‌اند. نتایج این استخراج در روش تحلیل تغییر مکان و تکنیک‌های حل تقریبی مربوط به آنها نظیر روش توزیع لنگر به کار رفته‌اند. با وجود این استفاده از فرمول‌بندی عناصر محدود - یعنی اصل کار مجازی - در تعیین ماتریس‌های سختی می‌تواند نقش مؤثری داشته باشد، بویژه هنگامی که هندسه‌های پیچیده تیر و تحلیل غیرخطی هندسی مورد نظر است (ر.ک. به: بخش ۵.۴.۱).

عناصر تنش مسطح و کرنش مسطح. عناصر تنش مسطح برای مدل نمودن سازه‌های غشایی، رفتار درون صفحه‌ای تیرها و صفحه‌ها بگونه‌ای که در شکل (ب) ۴.۵ نشان داده شده است و نیز در سایر موارد به کار می‌روند. در هر یک از این حالات، یک وضعیت تنش دوبعدی در صفحه xy وجود دارد و تنش‌های τ_{xx} و τ_{yz} و τ_{zx} مساوی صفر می‌باشند. عناصر کرنش مسطح برای نمایش قسمتی (با ضخامت واحد) از یک سازه به کار می‌روند که در آن قسمت مؤلفه‌های کرنش ϵ_{xx} و γ_{yz} و γ_{zx} مساوی صفر می‌باشند. این وضعیت در تحلیل یک سدّ طولی به گونه‌ای که در شکل (پ) ۴.۵ نشان داده شده است، پیش می‌آید.

عناصر متقارن محوری. عناصر متقارن محوری برای مدل نمودن اجزای سازه‌ای که حول یک محور دارای تقارن دورانی می‌باشند، مورد استفاده قرار می‌گیرند. مخازن فشاری و حلقه‌های جامد از جمله سازه‌هایی هستند که این نوع عنصر در آنها به کار می‌رود. اگر این سازه‌ها تحت اثر بارهای با تقارن محوری نیز باشند، در این صورت تحلیل دوبعدی یک رادیان واحد از سازه توزیع کامل تنش و کرنش در کل سازه را بگونه‌ای که در شکل (ت) ۴.۵ نشان داده شده است به دست می‌دهد.

از سوی دیگر، اگر یک سازه با تقارن محوری به طور غیرمتقارن بارگذاری شود، در این صورت یا باید یک تحلیل سه بعدی کامل را انتخاب کرد که در آن از روش زیر سازه نمودن (ر.ک. به: بخش ۸.۲.۴) یا تقارن دوری استفاده می‌شود (ر.ک. به: مثال ۴.۱۴) و یا باید از تجزیه Fourier بارها برای جمع آثار جواب‌های هارمونیک استفاده کرد (ر.ک. به: مثال ۴.۲۰).

عناصر خمش صفحه‌ای و پوسته‌ای. گزاره اساسی در خمش صفحه و تحلیل‌های پوسته‌ای این است که سازه در یک بعد نازک می‌باشد و از اینرو فرض‌های زیر را می‌توان انجام داد (ر.ک. به: شکل (ث) ۴.۵):

۱. تنش در سرتاسر ضخامت صفحه / پوسته (در جهت عمود بر میان - سطح) صفر می‌باشد.
۲. ذرات مصالح که در ابتدا در روی یک خط مستقیم عمود بر میان - سطح قرار دارند، در

حین تغییر شکل نیز در روی یک خط مستقیم باقی خواهند ماند. در نظریه Kirchhoff، از تغییر شکل‌های برشی صرف‌نظر می‌شود و در حین تغییر شکل، خط مستقیم، عمود بر میان - سطح باقی می‌ماند. در نظریه Reissner/Mindlin، تغییر شکل‌های برشی در تحلیل در نظر گرفته می‌شوند، از اینرو خطی که در ابتدا عمود بر میان صفحه بود، در حالت کلی در حین تغییر شکل عمود بر میان - سطح باقی نمی‌ماند (ر.ک. به: بخش ۵.۴.۲).

نخستین عناصر محدودی که برای مدل نمودن صفحه‌های نازک در خمش و پوسته‌ها ایجاد شدند، براساس نظریه صفحه Kirchhoff استوار بودند (ر.ک. به: R. H. Gallagher [A]). دو مشکل اساسی در هنگام کاربرد این نظریه پیش می‌آید: اولاً عناصر باید شرایط همگرایی را تأمین نمایند و نیز این عناصر باید به روش نسبتاً مؤثری به کار روند. کوشش تحقیقاتی زیادی برای ایجاد و بسط این گونه عناصر انجام شد، ولی این نکته مورد تصدیق قرار گرفت که غالباً عناصر مؤثرتر را می‌توان با استفاده از نظریه صفحه Reissner/Mindlin فرمول‌بندی کرد. (ر.ک. به: بخش ۵.۴.۲).

یک روش ساده برای فرمول‌بندی یک عنصر پوسته‌ای، جمع آثار سختی خمشی صفحه و سختی غشایی تنش مسطح می‌باشد. در این روش عناصر پوسته‌ای تخت را می‌توان برای مدل نمودن اجزای پوسته‌ای تخت (نظیر صفحات پلیسه‌ای) به کار برد و نیز می‌توان از این عناصر برای مدل نمودن پوسته‌های عمومی انحنا دار به عنوان یک مجموعه همبسته عناصر تخت استفاده کرد. در مثال‌های ۴.۱۸ و ۴.۱۹، ایجاد و بسط یک عنصر خمشی صفحه‌ای بر مبنای نظریه صفحه Kirchhoff و نیز ایجاد یک عنصر پوسته‌ای تخت را نشان خواهیم داد.

مثال ۴.۱۶: در مورد استخراج ماتریس‌های درونیابی تغییر مکان و کرنش - تغییر مکان تیر نشان داده شده در شکل ۴.۱۶ بحث کنید.

حل:

ماتریس سختی کامل این تیر (بر مبنای نظریه تیر) را می‌توان از حل معادلات دیفرانسیل

تعادل تیر به دست آورد که برای رفتار خمشی عبارتند از:

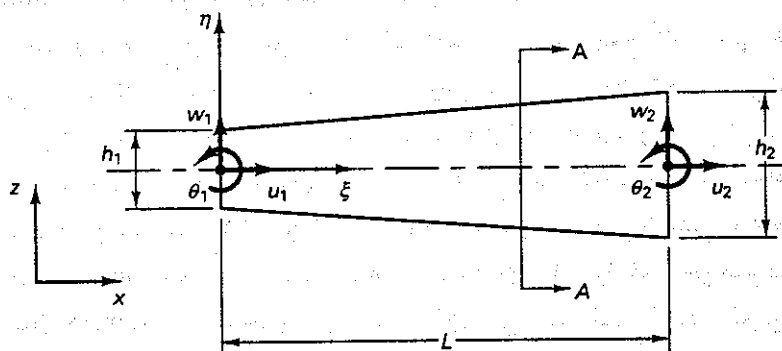
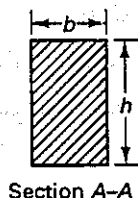
$$\frac{d^2}{d\xi^2} \left(EI \frac{d^2 w}{d\xi^2} \right) = 0; \quad EI = E \frac{bh^3}{12} \quad (\text{الف})$$

و برای رفتار محوری عبارتند از:

$$\frac{d}{d\xi} \left(EA \frac{du}{d\xi} \right) = 0; \quad A = bh \quad (\text{ب})$$

که در آن E ضریب ارتجاعی است. روش عمل به این صورت است که نخست یک تغییر مکان انتهایی واحد اعمال شده و سایر تغییر مکان‌ها مساوی صفر قرار داده می‌شوند و سپس معادله دیفرانسیل مناسبی برای تعادل تیر ایجاد شده، با اعمال شرایط مرزی حل می‌گردد. به محض

اینکه تغییر مکان‌های داخلی عنصر برای شرایط مرزی مذکور محاسبه شدند، با روش‌های مناسبی نیروهای انتهایی عنصر استخراج می‌شود که این نیروها در کنار هم، ستونی از ماتریس سختی را که متناظر با تغییر مکان انتهایی اعمال شده، می‌باشد تشکیل می‌دهند. باید دانست که این ماتریس سختی، تنها برای تحلیل ایستایی «کامل» می‌باشد، زیرا در تحلیل دینامیکی، ضرایب سختی وابسته به فرکانس می‌باشند.



شکل ۴.۱۶ عنصر تیری با مقطع متغیر

در یک روش دیگر می‌توان از فرمول‌بندی داده شده در (۴.۸) الی (۴.۱۷) استفاده نمود. اگر تغییر مکان‌های داخلی کاملی [که روابط (الف) و (ب) را ارضا می‌کنند] برای ایجاد ماتریس کرنش - تغییر مکان مورد استفاده قرار گیرند، در این صورت ماتریس سختی که به دست می‌آید مشابه ماتریس به دست آمده در روش پیشین خواهد بود. با وجود این، در عمل غالباً مناسب است که از درون‌یابی‌های تغییر مکان که مربوط به یک تیر با سطح مقطع یکنواخت می‌باشد استفاده شود که در این صورت یک ماتریس سختی تقریبی به دست خواهد آمد. این تقریب‌سازی هنگامی کافی می‌باشد که h_1 از h_2 خیلی بزرگتر نباشد (بنابراین باید به اندازه کافی از عناصر تیری بر مدل نمودن کل سازه استفاده شود). خطاهایی که در تحلیل بیش می‌آید از نوع

خطاهایی هستند که در مورد آنها در بخش ۴.۳ بحث شده است، زیرا فرمول‌بندی مورد استفاده، مربوط به تحلیل عناصر محدود مبتنی بر تغییر مکان می‌باشد. با استفاده از متغیرهای تعریف شده در شکل ۴.۱۶ E و تغییر مکان‌های «کامل» (توابع ارمیتی) که متناظر با یک تیر منشوری می‌باشند، روابط زیر را داریم:

$$u = \left(1 - \frac{\xi}{L}\right)u_1 + \frac{6\eta}{L}\left(\frac{\xi}{L} - \frac{\xi^2}{L^2}\right)w_1 - \eta\left(1 - 4\frac{\xi}{L} + 3\frac{\xi^2}{L^2}\right)\theta_1 \\ + \frac{\xi}{L}u_2 - \frac{6\eta}{L}\left(\frac{\xi}{L} - \frac{\xi^2}{L^2}\right)w_2 + \eta\left(2\frac{\xi}{L} - 3\frac{\xi^2}{L^2}\right)\theta_2$$

بنابراین

$$H = \left[\left(1 - \frac{\xi}{L}\right) \middle| \frac{6\eta}{L}\left(\frac{\xi}{L} - \frac{\xi^2}{L^2}\right) \middle| -\eta\left(1 - 4\frac{\xi}{L} + 3\frac{\xi^2}{L^2}\right) \middle| \frac{\xi}{L} \right] \\ - \frac{6\eta}{L}\left(\frac{\xi}{L} - \frac{\xi^2}{L^2}\right) \middle| \eta\left(2\frac{\xi}{L} - 3\frac{\xi^2}{L^2}\right) \right] \quad (\text{پ})$$

برای (پ)، تغییر مکان‌های نقاط گرهی را به صورت زیر مرتب نموده‌ایم:

$$\hat{u}^T = [u_1 w_1 \theta_1 \quad u_2 w_2 \theta_2]$$

اگر تنها کرنش و تنش‌های عمودی را در تیر در نظر بگیریم و به عبارت دیگر از تغییر شکل‌های برشی صرف‌نظر کنیم، در این صورت تنها مؤلفه‌های تنش و کرنش را به صورت زیر داریم:

$$\epsilon_{\xi\xi} = \frac{du}{d\xi}; \quad \tau_{\xi\xi} = E\epsilon_{\xi\xi}$$

و بنابراین نتیجه زیر حاصل می‌گردد:

$$B = \left[-\frac{1}{L} \middle| \frac{6\eta}{L}\left(\frac{1}{L} - \frac{2\xi}{L^2}\right) \middle| -\eta\left(-\frac{4}{L} + \frac{6\xi}{L^2}\right) \middle| \frac{1}{L} \right] - \frac{6\eta}{L}\left(\frac{1}{L} - \frac{2\xi}{L^2}\right) \middle| \eta\left(\frac{2}{L} - \frac{6\xi}{L^2}\right) \right] \quad (\text{ت})$$

روابط (پ) و (ت) را می‌توان مستقیماً برای تعیین ماتریس‌های عنصری تعریف شده در (۴.۳۳) الی (۴.۳۷) به کار برد؛ به عنوان مثال داریم:

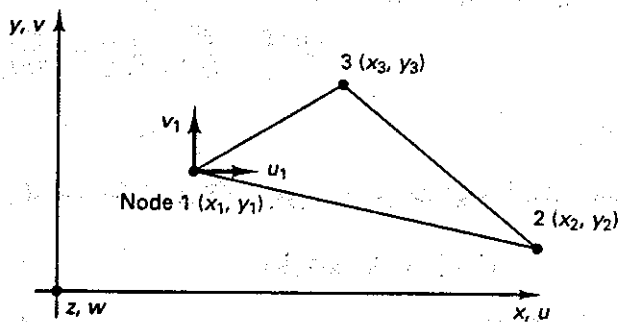
$$\mathbf{K} = Eb \int_0^L \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{B}^T \mathbf{B} d\eta d\xi$$

که در آن

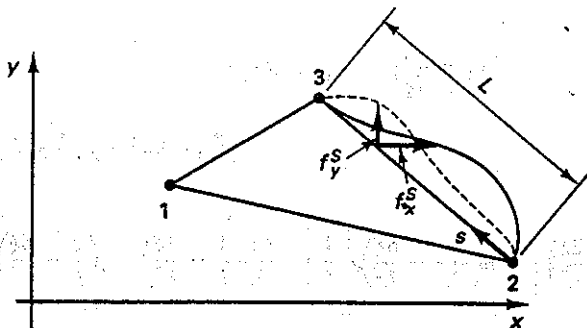
$$h = h_1 + (h_2 - h_1) \frac{\xi}{L}$$

فرمول‌بندی مذکور را می‌توان مستقیماً برای ایجاد ماتریس‌های عنصری مربوط به عمل سه بعدی عنصر تیری که شامل تغییر شکل‌های برشی نیز می‌باشد استفاده نمود (ر.ک. به: [A] J. Bathe and S. Bolourchi).

مثال ۴.۱۷: در مورد استخراج ماتریس‌های سختی، جرم و بار عنصر محدود سه گرهی متقارن محوری شکل E ۴.۱۷ بحث کنید.



(الف) نقاط گرهی



(ب) بارگذاری سطحی

شکل E ۴.۱۷ عنصر سه گرهی متقارن محوری

حل:

این عنصر از نخستین عناصر محدودی می‌باشد که ایجاد شده‌اند. در حال حاضر برای اغلب کاربردهای عملی، عناصر محدود بسیار مؤثرتری در دسترس می‌باشند (ر.ک. به: فصل پنجم)، ولی این عنصر به آسانی برای هدف آموزشی و راهنمایی مورد استفاده قرار می‌گیرد، زیرا معادلاتی که مربوط به آن هستند، نسبتاً ساده می‌باشند.

فرض تغییر مکان مورد استفاده عبارت است از:

$$u(x, y) = \alpha_1 + x_2 x + \alpha_3 y$$

$$v(x, y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y$$

بنابراین یک تغییر خطی برای تغییر مکان فرض می‌شود، یعنی به همان گونه که برای استخراج ماتریس‌های مربوط به عنصر تنش مسطح چهارگرمی در مثال ۴.۶ عمل کردیم که در آن برای گره چهارم ضروری بود که عبارت xy در فرض تغییر مکان وارد شود. با رجوع به استخراج روابط انجام شده در مثال ۴.۶، مستقیماً روابط زیر را می‌توان ایجاد نمود:

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \mathbf{H} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \mathbf{A}^{-1}$$

که در آن داریم:

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_1^{-1} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$\mathbf{A}_1^{-1} = \frac{1}{\det \mathbf{A}_1} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

که در آن

$$\det \mathbf{A}_1 = x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)$$

یادآوری می‌کنیم که $\det A_1$ تنها هنگامی صفر است که هر سه نقطه گرهی عنصر بر روی یک خط مستقیم واقع باشند. کرنش‌ها در جدول ۴.۲ داده شده‌اند که عبارتند از:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{u}{x}$$

با استفاده از چندجمله‌ایهای فرض شده برای تغییر مکان، روابط زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \\ \epsilon_{zz} \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{x} & 1 & \frac{y}{x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A^{-1} = EA^{-1}$$

در این صورت با استفاده از روابط (۴.۳۳) الی (۴.۳۷) داریم:

$$K = A^{-T} \left[\int_A \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{x} \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{y}{x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 1 \end{bmatrix} \right]$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{x} & 1 & \frac{y}{x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x \, dx \, dy \right\} A^{-1} \quad (\text{الف})$$

که در آن یک رادیان از عنصر متقارن محوری در انتگرال‌گیری حجمی در نظر گرفته می‌شود. به

طور مشابه نتایج زیر حاصل می‌شوند:

$$\mathbf{R}_s = \mathbf{A}^{-T} \int_A \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x & 0 \\ y & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & x \\ 0 & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x^s \\ f_y^s \end{bmatrix} x \, dx \, dy$$

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{A}^{-T} \int_A \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau'_{xx} \\ \tau'_{yy} \\ \tau'_{xy} \\ \tau'_{xz} \end{bmatrix} x \, dx \, dy \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{M} = \rho \mathbf{A}^{-T} \left\{ \int_A \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} x \, dx \, dy \right\} \mathbf{A}^{-1}$$

که در آن فرض می‌شود که چگالی جرمی ρ ثابت است.

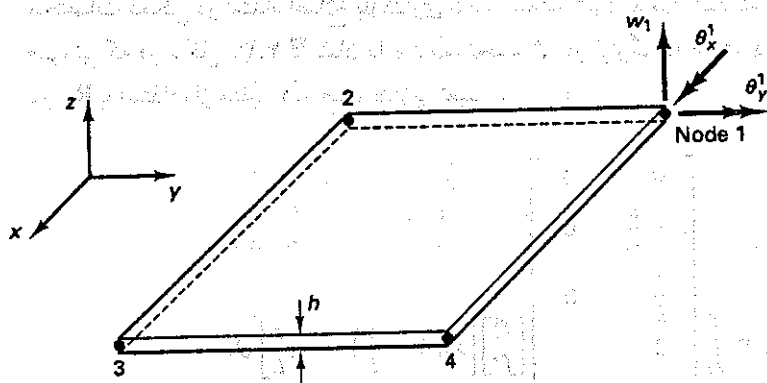
برای محاسبه بردار بار سطحی \mathbf{R}_s ، در عمل روش مناسب این است که از دستگاه‌های مختصات کمکی در امتداد اضلاع بارگذاری شده استفاده شود. فرض کنید که ضلع ۲-۳ عنصر به صورتی که در شکل ۴.۱۷ نشان داده شده، تحت اثر بار قرار گرفته است. در این صورت بردار بار \mathbf{R}_s با استفاده از متغیر s به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\mathbf{R}_s = \int_s \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 - \frac{s}{L} & 0 \\ \frac{s}{L} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 - \frac{s}{L} \\ 0 & \frac{s}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_x^s \\ f_y^s \end{bmatrix} \left[x_2 \left(1 - \frac{s}{L} \right) + x_3 \frac{s}{L} \right] ds$$

با ملاحظه نحوه تعیین ماتریس‌های عنصر محدود در این مثال، نکات زیر را می‌توان مورد توجه قرار داد. اولاً برای تعیین انتگرال‌ها، به دست آوردن جواب‌های بسته فرم امکان‌پذیر است و یا می‌توان از انتگرال‌گیری عددی (که در بخش ۵.۵ بحث خواهد شد) استفاده کرد. ثانیاً درمی‌یابیم که ماتریس‌های سختی، جرم و بار مربوط به عناصر محدود تنش مسطح و کرنش مسطح را می‌توان به آسانی با رعایت موارد زیر به دست آورد: (۱) با وارد نمودن سطر چهارم ماتریس کرنش - تغییر مکان E که در (الف) و (ب) مورد استفاده قرار گرفته است، (۲) به کارگیری ماتریس تنش - کرنش مناسب C در (الف) و (۳) استفاده از حجم دیکرانسیلی عنصر $h dx dy$ به جای $dx dy$ که در آن ضخامت عنصر است که جهت سهولت محاسبات در تحلیل کرنش مسطح مساوی یک در نظر گرفته می‌شود. بنابراین تحلیل‌های متقارن محوری، تنش مسطح و کرنش مسطح را می‌توان به طور مؤثری در یک برنامه کامپیوتری واحد اجرا نمود. همچنین ماتریس E نشان می‌دهد که شرایط کرنش ثابت ϵ_{xx} و ϵ_{yy} و γ_{xy} در هر یک از تحلیل‌های مذکور فرض می‌شود.

روش انجام تحلیل‌های متقارن محوری، تنش مسطح و کرنش مسطح به طریقه‌ای مؤثر در یک برنامه کامپیوتری واحد در بخش ۵.۶ ارائه خواهد شد که در آن بخش در مورد پیاده‌سازی تحلیل عناصر محدود تک پارامتری که دارای کارایی می‌باشند بحث خواهد شد.

مثال ۴.۱۸: ماتریس‌های $\Phi(x, y)$ و $E(x, y)$ را برای عنصر مستطیلی خمش صفحه‌ای شکل ۴.۱۸ استخراج نمایید.



شکل ۴.۱۸ عنصر مستطیلی خمش صفحه‌ای

حل:

این عنصر یکی از نخستین عناصر خمش صفحه‌ای است که ماتریس‌های مربوط به آن استخراج شده‌اند. ولی عناصر خمش صفحه‌ای مؤثری در حال حاضر مورد استفاده قرار نمی‌گیرند.

همانطوری که در شکل ۴.۱۸ E نشان داده شده است، عنصر خمش صفحه‌ای مورد نظر دارای سه درجه آزادی در هر گره می‌باشد. بنابراین ضروری است که ۱۲ مختصات تعمیم یافته مجهول $\alpha_1, \dots, \alpha_{12}$ در فرض تغییر مکان برای w وجود داشته باشد. چندجمله‌ای مورد استفاده عبارت است از:

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3$$

بنابراین

$$\Phi(x, y) = [1 \quad x \quad y \quad x^2 \quad xy \quad y^2 \quad x^3 \quad x^2 y \quad xy^2 \quad y^3 \quad x^3 y \quad xy^3] \quad (\text{الف})$$

حال می‌توان $\partial w / \partial x$ و $\partial w / \partial y$ را محاسبه کرد:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 3\alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 xy + \alpha_9 y^2 + 3\alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} y^3 \quad (\text{ب})$$

و

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \alpha_3 + \alpha_5 x + 2\alpha_6 y + \alpha_8 x^2 + 2\alpha_9 xy + 3\alpha_{10} y^2 + \alpha_{11} x^3 + 3\alpha_{12} xy^2 \quad (\text{پ})$$

با استفاده از شرایط:

$$\left. \begin{aligned} w_i &= (w)_{x_i, y_i} \quad \theta_i^x = \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{x_i, y_i} \\ \theta_i^y &= \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{x_i, y_i} \end{aligned} \right\} i = 1, \dots, 4$$

حال می‌توان ماتریس A را ایجاد نمود:

$$\begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_4 \\ \theta_x^1 \\ \vdots \\ \theta_x^4 \\ \theta_y^1 \\ \vdots \\ \theta_y^4 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_{12} \end{bmatrix}$$

که در آن داریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & x_1 y_1 & y_1^2 & x_1^3 & x_1^2 y_1 & x_1 y_1^2 & y_1^3 & x_1^2 y_1 & x_1 y_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4^2 & x_4 y_4 & y_4^2 & x_4^3 & x_4^2 y_4 & x_4 y_4^2 & y_4^3 & x_4^2 y_4 & x_4 y_4^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_1 & 2y_1 & 0 & x_1^2 & 2x_1 y_1 & 3y_1^2 & x_1^3 & 3x_1 y_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_4 & 2y_4 & 0 & x_4^2 & 2x_4 y_4 & 3y_4^2 & x_4^3 & 3x_4 y_4^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_1 & -y_1 & 0 & -3x_1^2 & -2x_1 y_1 & -y_1^2 & 0 & -3x_1^2 y_1 & -y_1^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & 0 & -2x_4 & -y_4 & 0 & -3x_4^2 & -2x_4 y_4 & -y_4^2 & 0 & -3x_4^2 y_4 & -y_4^3 \end{bmatrix} \quad (ت)$$

که می‌توان نشان داد که ماتریس مذکور همواره غیرتکین است.

برای تعیین ماتریس E یادآوری می‌کنیم که در تحلیل خمش صفحه انحناها و لنگرها به عنوان تنش‌ها و کرنش‌های تعمیم یافته مورد استفاده قرار می‌گیرند (ر.ک. به: جداول ۴.۲ و ۴.۳). با محاسبه مشتقات مورد نیاز (ب) و (پ)، نتایج زیر را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 2\alpha_4 + 6\alpha_7 x + 2\alpha_8 y + 6\alpha_{11} xy$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 2\alpha_6 + 2\alpha_9 x + 6\alpha_{10} y + 6\alpha_{12} xy \quad (ث)$$

$$2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 2\alpha_5 + 4\alpha_8 x + 4\alpha_9 y + 6\alpha_{11} x^2 + 6\alpha_{12} y^2$$

بنابراین داریم:

$$E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & -2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix} \quad (\text{ج})$$

حال با داشتن ماتریس‌های Φ و A و E که در (الف) و (ت) و (ج) داده شده‌اند و نیز با داشتن ماتریس C در جدول ۴.۳، ماتریس سختی، ماتریس جرم و ماتریس بار عنصر را می‌توان محاسبه نمود.

یک نکته مهم در تعیین ماتریس سختی عنصر این است که آیا عنصر مذکور کامل و سازگار است یا نه؟ عنصر موردنظر در این مثال همان گونه که در (ث) نشان داده شده است کامل می‌باشد (به عبارت دیگر، عنصر می‌تواند نمایشگر حالات انحنا ثابت باشد)، اما عنصر مذکور سازگار نیست. شرایط سازگاری در شماری از عناصر خمش صفحه‌ای نقض می‌شود، بدین معنی که همگرایی در تحلیل عموماً یکنوا نیست (ر.ک. به: بخش ۴.۳).

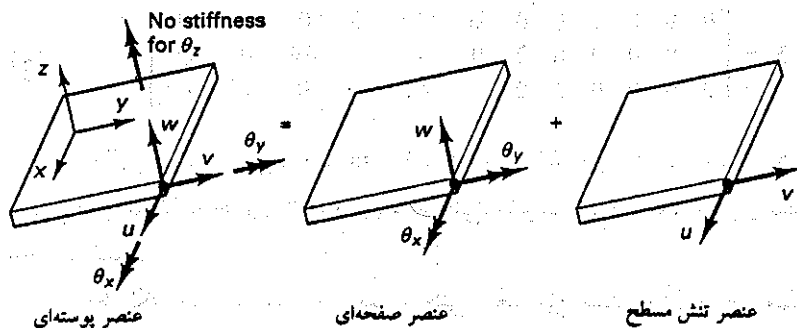
مثال ۴.۱۹: در مورد تعیین ماتریس سختی یک عنصر تخت مستطیلی پوسته‌ای بحث نمایید.
حل:

یک عنصر تخت مستطیلی پوسته‌ای ساده را می‌توان از جمع آثار رفتار خمش صفحه‌ای ملاحظه شده در مثال ۴.۱۸ و رفتار تنش مسطح عنصر مورد استفاده در مثال ۴.۶ به دست آورد. عنصر به دست آمده، در شکل ۴.۱۹ E نشان داده شده است. این عنصر را می‌توان برای مدل نمودن مجموعه همبسته صفحات تخت (نظیر سازه‌های پلیسه‌ای) و پوسته‌های با انحنا استفاده نمود. برای تحلیل‌های واقعی، عناصر پوسته‌ای مؤثرتری در دسترس می‌باشند و در این جا تنها در مورد عنصر شکل ۴.۱۹ E بحث می‌کنیم تا برخی روش‌های اساسی تحلیل را نشان دهیم. فرض کنید که \bar{K}_B و \bar{K}_M ماتریس‌های سختی در دستگاه مختصات محلی به ترتیب مربوط به رفتار خمشی عنصر و رفتار غشایی آن باشند. در این صورت ماتریس سختی عنصر پوسته‌ای عبارت است از:

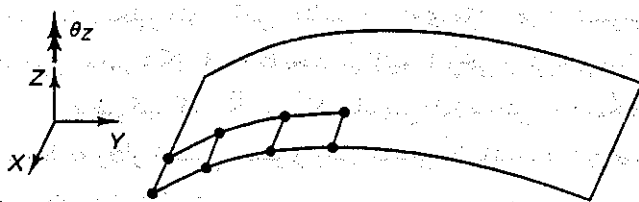
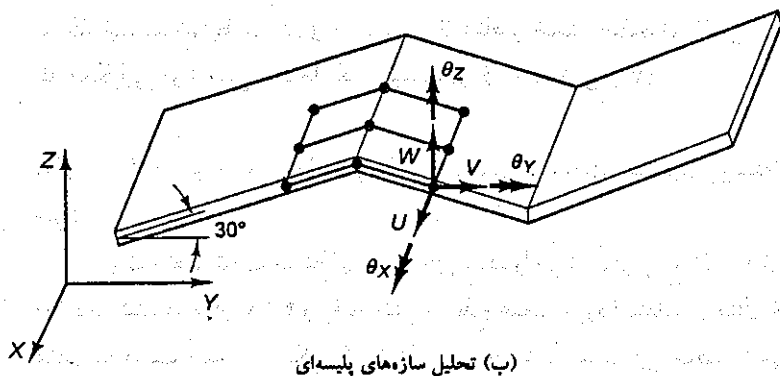
$$\bar{K}_S = \begin{bmatrix} \bar{K}_B & 0 \\ 0 & \bar{K}_M \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

$\begin{matrix} 12 \times 12 & & \\ & 8 \times 8 & \end{matrix}$

ماتریس‌های \bar{K}_B و \bar{K}_M به ترتیب در مثال‌های ۴.۶ و ۴.۱۸ مورد بحث قرار گرفته‌اند. این عنصر پوسته‌ای را می‌توان مستقیماً در تحلیل انواع مختلفی از سازه‌های پوسته‌ای به کاربرد. سازه‌های موردنظر در شکل ۴.۱۹ E را می‌توان به گونه‌ای که در شکل نشان داده شده



(الف) یک عنصر بنیادی پوسته‌ای با ۵ درجه آزادی محلی در یک گره



شکل ۴.۱۹ کاربرد یک عنصر تخت پوسته‌ای

است ایده‌آل‌سازی نمود. از آنجا که در این تحلیل‌ها، در هر گره شش درجه آزادی داریم، ماتریس‌های سختی عنصری را که متناظر با درجات آزادی کلی می‌باشند می‌توان با استفاده از تبدیل داده شده در (۴.۴۱) محاسبه نمود:

$$\mathbf{K}_S = \mathbf{T}^T \tilde{\mathbf{K}}_S^* \mathbf{T} \quad (\text{ب})$$

که در آن داریم:

$$\tilde{\mathbf{K}}_S^* = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{پ})$$

$\begin{matrix} 20 \times 20 & & \\ & 4 \times 4 & \end{matrix}$

\mathbf{T} ماتریس تبدیل بین درجات آزادی محلی و کلی عنصر می‌باشد. برای تعریف $\tilde{\mathbf{K}}_S^*$ متناظر با شش درجه آزادی در هر گره، $\tilde{\mathbf{K}}_S$ را در سمت راست رابطه (پ) اصلاح کرده‌ایم تا ضرایب سختی مربوط به دوران‌های محلی θ_z (حول محور z) در گره‌ها را شامل شود. این ضرایب سختی در (پ) مساوی صفر قرار داده شده‌اند. دلیل آن کار این است که این درجات آزادی در فرمول‌بندی عنصر در نظر گرفته نشده‌اند؛ بنابراین دوران θ_z عنصر در یک گره تعیین نمی‌شود و اثری در انرژی کرنشی ذخیره شده در عنصر ندارد.

جواب یک مدل را می‌توان با استفاده از $\tilde{\mathbf{K}}_S^*$ در (پ) به دست آورد، به شرط اینکه عناصر احاطه کننده یک گره، هم‌صفحه نباشند. این نکته برای مدل صفحه پلیسه‌ای صادق نیست، ولی اگر تحلیل یک پوسته با انحنای کم را که در شکل (پ) ۴.۱۹ E نشان داده شده است در نظر بگیریم، عناصر تقریباً می‌توانند هم‌صفحه باشند (البته برخسب انحنای پوسته و ایده‌آل‌سازی مورد استفاده). در این حالت ماتریس سختی کلی می‌تواند به علت وجود عناصر قطری صفر در $\tilde{\mathbf{K}}_S^*$ و مشکلات ناشی از حل معادلات تعادل کلی "تکین" یا "بدطرح" باشد (ر.ک. به: بخش ۸.۲.۶). برای اجتناب از این مسأله، افزودن یک ضریب کوچک سختی متناظر با دوران θ_z امکان‌پذیر است، به عبارت دیگر به عوض $\tilde{\mathbf{K}}_S^*$ در (پ)، رابطه زیر را استفاده می‌کنیم:

$$\tilde{\mathbf{K}}_S^{*'} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}}_S & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & k\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (\text{ت})$$

$\begin{matrix} 20 \times 20 & & \\ & 4 \times 4 & \end{matrix}$

که در آن k در حدود یک هزارم کوچکترین عنصر قطری $\tilde{\mathbf{K}}_S$ می‌باشد. ضریب سختی k باید به اندازه کافی بزرگ باشد تا اینکه جواب دقیقی از حل معادلات تعادل عناصر محدود حاصل شود و نیز باید به اندازه کافی کوچک باشد تا در پاسخ سیستم اثر قابل ملاحظه‌ای نگذارد. بنابراین، در عملیات حسابی ممیز شناور باید از تعداد کافی ارقام استفاده شود. (ر.ک. به: بخش ۸.۲.۶).

یک طریقه بسیار مؤثر برای اجتناب از این مشکل استفاده از عناصر پوسته‌ای با انحنا با پنج درجه آزادی در هر گره می‌باشد که در آن این درجات آزادی متناظر با یک صفحه مماس بر میان - سطح پوسته تعریف می‌شوند. در این حالت دوران عمود بر سطح پوسته یک درجه آزادی نیست (ر.ک. به: بخش ۵.۴.۲).

در فرمول‌بندی مزبور برای عناصر محدود، از توابع چندجمله‌ای برای بیان تغییر مکان‌ها استفاده کردیم. با وجود این به اختصار یادآوری می‌کنیم که برای کاربردهای معینی، استفاده از سایر توابع نظیر عبارات مثلثاتی می‌تواند مؤثر باشد. به عنوان مثال، توابع مثلثاتی در تحلیل سازه‌های متقارن محوری که تحت اثر بارگذاری غیرمتقارن محوری قرار گرفته‌اند (ر.ک. به: E. L. Wilson) و نیز در روش نوارهای محدود (ر.ک. به: Y. K. Cheung [A]) مورد استفاده قرار می‌گیرند. امتیاز توابع مثلثاتی در خواص متعامد بودن آنها نهفته است. به عنوان مثال، اگر حاصل ضرب‌های سینوسی و کوسینوسی در یک بازه مناسب انتگرال‌گیری شوند، انتگرال می‌تواند صفر باشد. در این صورت، این بدان معنی است که در معادلات تعادل تداخلی بین مختصات تعمیم یافته که متناظر با توابع سینوسی و کوسینوسی می‌باشند وجود ندارد و معادلات تعادل را می‌توان به طور مؤثرتری حل نمود. در این زمینه باید اضافه کرد که بهترین توابعی که می‌توان در تحلیل عناصر محدود از آنها استفاده کرد، از ویژه بردارهای مسأله حاصل می‌شوند، زیرا آنها یک ماتریس سختی قطری را به دست خواهند داد. با وجود این، توابع مذکور مشخص نیستند و برای کاربردهای عمومی، استفاده از توابع چندجمله‌ای، مثلثاتی و سایر فرض‌ها برای تغییر مکان‌های عناصر محدود بسیار طبیعی می‌باشد.

البته استفاده از توابع درون‌یابی خاص می‌تواند منجر به روش‌های حل با کارایی زیاد در تحلیل جریانات سیال خاصی شود (به عنوان مثال ر.ک. به: A. T. Patera [A]). استفاده از توابع مثلثاتی را در مثال زیر نشان می‌دهیم.

مثال ۴.۲۰: شکل E. ۴.۲۰ یک سازه با تقارن محوری را نشان می‌دهد که تحت اثر بارگذاری غیرمتقارن محوری در جهت شعاعی است. در مورد تحلیل این سازه با استفاده از عنصر متقارن محوری سه گرهی مثال ۴.۱۷ بحث کنید، در صورتی که بارگذاری به صورت جمع آثار مؤلفه‌های Fourier نمایش داده شود.

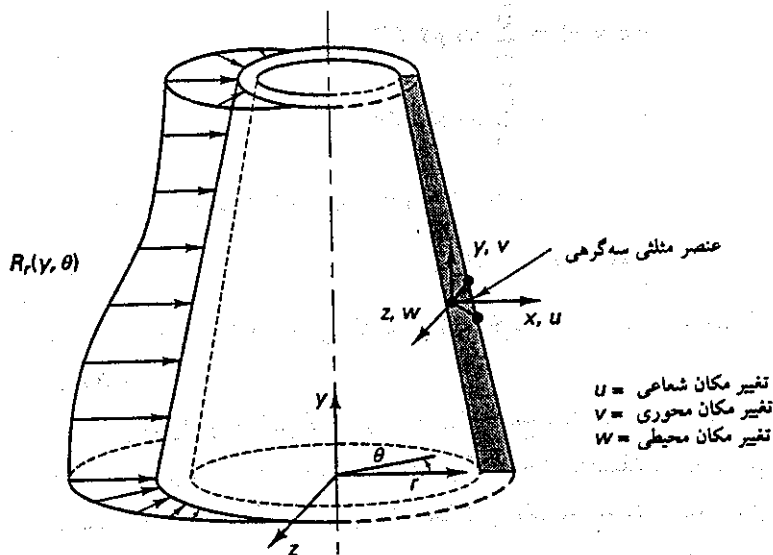
حل:

توزیع تنش در سازه، سه بعدی است و می‌تواند با استفاده از یک ایده‌آل‌سازی عناصر محدود سه بعدی محاسبه شود. ولی، بهره‌گیری از تقارن محوری هندسه سازه امکان‌پذیر می‌باشد و بسته به بارگذاری کامل وارده، کوشش محاسباتی را می‌توان به میزان قابل ملاحظه‌ای کاهش داد.

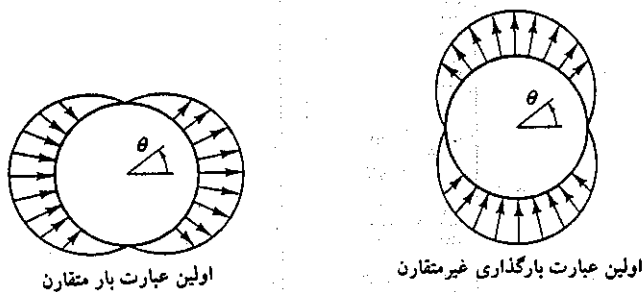
نکته اصلی در تحلیل این است که بارهای وارده $R_r(\theta, \gamma)$ را به صورت سری Fourier

بسط می‌دهیم:

$$R_r = \sum_{p=1}^{p_r} R_p^c \cos p\theta + \sum_{p=1}^{p_s} R_p^s \sin p\theta \quad (\text{الف})$$



(الف) سازه مورد نظر



(ب) نمایش بارگذاری غیرمتقارن محوری

شکل E ۴.۲۰ سازه با تقارن محوری تحت اثر بارگذاری غیرمتقارن محوری

که در آن p_e و p_s به ترتیب تعداد کل سهم‌های متقارن و غیرمتقارن بار حول $\theta = 0$ می‌باشند. شکل (ب) E ۴.۲۰ اولین عبارات در بسط (الف) را نشان می‌دهد.

تحلیل کامل را می‌توان با جمع آثار پاسخ‌های ناشی از سهم‌های متقارن و غیرمتقارن بار که در (الف) تعریف شده‌اند انجام داد. به عنوان مثال، اگر پاسخ متقارن را در نظر بگیریم، برای یک عنصر روابط زیر را پیدا می‌کنیم:

$$u(x, y, \theta) = \sum_{p=1}^{P_c} \cos p\theta \mathbf{H}\hat{\mathbf{u}}^p$$

$$v(x, y, \theta) = \sum_{p=1}^{P_c} \cos p\theta \mathbf{H}\hat{\mathbf{v}}^p \quad (\text{ب})$$

$$w(x, y, \theta) = \sum_{p=1}^{P_c} \sin p\theta \mathbf{H}\hat{\mathbf{w}}^p$$

که با رجوع به مثال ۴.۱۷، برای عناصر مثلثی داریم:

$$\mathbf{H} = [1 \quad x \quad y] \mathbf{A}_T^{-1} \quad (\text{پ})$$

و $\hat{\mathbf{u}}^p$ و $\hat{\mathbf{v}}^p$ و $\hat{\mathbf{w}}^p$ تغییر مکان‌های نقاط گرهی تعمیم یافته مجهول عنصر برای مد p می‌باشند.

باید یادآوری کنیم که در رابطه (ب)، پاسخ محاسبه شده در هر یک از توزیع‌های تغییر مکان هارمونیک منفرد را روی هم اضافه می‌کنیم. حال با استفاده از (ب)، می‌توان ماتریس کرنش - تغییر مکان عنصر را ایجاد نمود. از آنجا که با یک توزیع تنش سه بعدی سر و کار داریم، از عبارت مربوط به توزیع‌های کرنش سه بعدی در مختصات استوانه‌ای استفاده می‌کنیم:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} \\ \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{w}{r} \end{bmatrix} \quad (\text{ت})$$

که در آن داریم:

$$\boldsymbol{\epsilon}^T = [\epsilon_{rr} \quad \epsilon_{yy} \quad \epsilon_{\theta\theta} \quad \gamma_{ry} \quad \gamma_{y\theta} \quad \gamma_{r\theta}] \quad (\text{ث})$$

با جایگزینی (ب) در (ث) یک ماتریس کرنش - تغییر مکان \mathbf{B}_p را به ازای هر مقدار p به دست می‌آوریم و کل کرنش‌ها را می‌توان به عنوان جمع آثار توزیع‌های کرنش که در هر هارمونیک جای گرفته‌اند، در نظر گرفت.

حال تغییر مکان‌های نقاط گرهی مجهول را می‌توان با استفاده از روش‌های رایج تعیین

نمود. معادلات تعادل متناظر با تغییر مکان‌های نقاط گرهی تعمیمی یافته U_i^p و V_i^p و W_i^p و $i = 1, \dots, N$ (مساوی تعداد کل گره‌ها می‌باشد) و $p = 1, \dots, p_c$ با استفاده از روابط (۴.۱۷) الی (۴.۲۲) تعیین می‌شوند، که در این صورت داریم:

$$U^T = [U^{1T} \quad U^{2T} \quad \dots \quad U^{p_c T}] \quad (ج)$$

و

$$U^{pT} = [U_1^p \quad V_1^p \quad W_1^p \mid U_2^p \quad \dots \quad W_N^p] \quad (چ)$$

در محاسبه K و R_s یادآوری می‌کنیم که به علت خواص تعامد زیر:

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin n\theta \sin m\theta \, d\theta &= 0 & n \neq m \\ \int_0^{2\pi} \cos n\theta \cos m\theta \, d\theta &= 0 & n \neq m \end{aligned} \quad (ح)$$

ماتریس‌های سختی مربوط به هارمونیک‌های مختلف از همدیگر تفکیک می‌شوند. بنابراین، معادلات تعادل سازه به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$K^p U^p = R_s^p \quad p = 1, \dots, p_c \quad (خ)$$

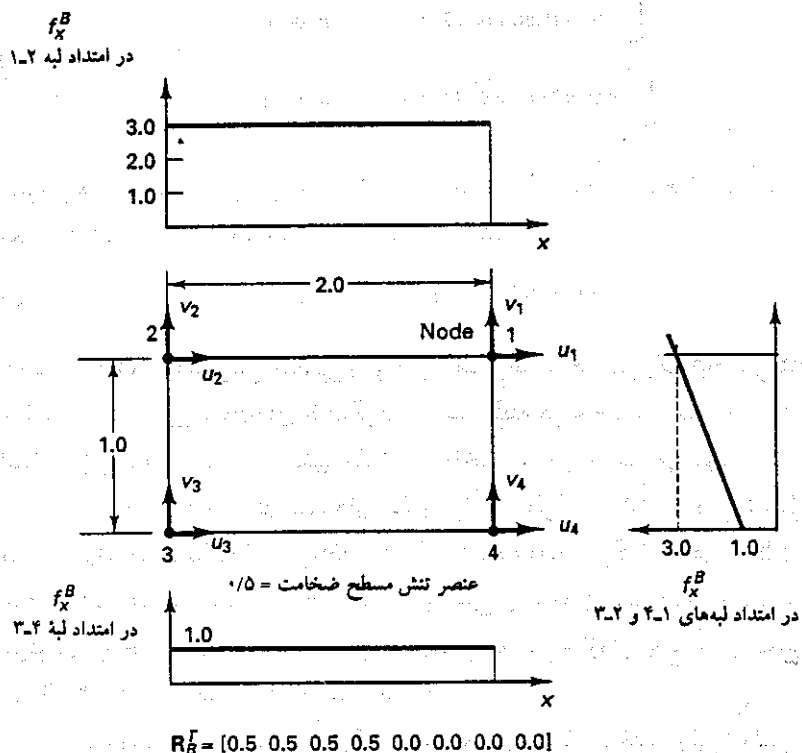
که در آن K^p و R_s^p ماتریس سختی و بردار بار مربوط به هارمونیک p ام می‌باشند. از حل معادلات (خ)، تغییر مکان‌های نقاط گرهی تعمیم یافته هر عنصر به دست می‌آیند و سپس با استفاده از روابط (ب)، تمامی تغییر مکان‌های داخلی عناصر حاصل می‌شوند.

در تحلیل مزبور، تنها سهم‌های متقارن بار در نظر گرفته شده‌اند ولی تحلیل مشابهی را می‌توان برای هارمونیک‌های غیرمتقارن بار (الف) انجام داد، بدین‌گونه که در روابط (ب) تا (خ) به جای تمامی عبارت سینوسی، عبارات کوسینوسی و به جای عبارات کوسینوسی، عبارات سینوسی را جایگذاری می‌کنیم. در این صورت پاسخ کل سازه از جمع آثار تغییر مکان‌های متناظر با تمامی هارمونیک‌ها به دست می‌آید.

اگرچه در این بحث صرفاً بارگذاری سطحی را در نظر گرفتیم، ولی تحلیل را می‌توان با استفاده از روش مشابهی برای در نظر گرفتن بارگذاری شامل نیروی جسمی و تنش‌های اولیه نیز بسط داد. سرانجام یادآوری می‌کنیم که کوشش محاسباتی مورد نیاز در تحلیل، با تعداد هارمونیک‌های مورد استفاده برای بار تناسب مستقیمی دارد. بنابراین اگر نمایش بارگذاری با تنها چند هارمونیک امکان‌پذیر باشد (به عنوان مثال، بارگذاری باد)، دراین صورت روش حل کارایی مطلوبی خواهد داشت، ولی در صورتی که برای نمایش بارگذاری از هارمونیک‌های زیادی استفاده شود (به عنوان مثال یک بار متمرکز)، در این صورت روش حل ناکارا خواهد بود.

۴.۲.۴ تمرکز خواص سازه‌ای و بارها

تفسیر فیزیکی روش تحلیل عناصر محدود که در بخش‌های پیشین ارائه گردید، این است که خواص سازه‌ای - سختی و جرم - و بارهای داخلی و خارجی با استفاده از اصل کار مجازی در گره‌های گسسته مجموعه همبسته عناصر متمرکز می‌شوند. از آنجا که در محاسبه بردارهای بار و ماتریس جرم از همان توابع درون‌یابی استفاده می‌شود که در تعیین ماتریس سختی به کار گرفته شده‌اند، گفته می‌شود که بردارهای بار «سازگار» و ماتریس جرم سازگار تعیین شده‌اند. در این صورت به شرط تأمین شرایط معینی (ر.ک. به: بخش ۴.۳.۳) روش حل عناصر محدود یک تحلیل Ritz می‌باشد.



شکل ۴.۶ توزیع نیروی جسمی و بردار نیروی متمرکز R_B متناظر با آن در یک عنصر مستطیلی

شاید قابل قبول باشد که به جای انجام انتگرال‌گیری‌هایی که منجر به ایجاد بردار بار سازگار می‌شود، یک بردار بار تقریبی تعیین شود، بدین‌گونه که به نیروهای واقعی گرهی متمرکز وارد R_e ، نیروهای دیگری که حدوداً هم‌ارز با بارهای گسترده در عناصر می‌باشند افزوده شوند.

یک روش تقریباً مشخص برای ایجاد بردارهای بار تقریبی بدین‌گونه است که در آغاز کل نیروهای جسمی و سطحی مربوط به یک عنصر محاسبه می‌شوند و سپس به طور مساوی به درجات آزادی گرهی مناسب آن عنصر اعمال می‌گردند. به عنوان مثال، عنصر مستطیلی تنش مسطح در شکل ۴.۶ را در نظر می‌گیریم که در آن تغییرات نیروی جسمی نشان داده شده است. کل نیروی جسمی مساوی ۲ است و در این صورت بردار نیروی جسمی متمرکز را به گونه‌ای که در شکل نشان داده شده است به دست می‌آوریم.

در مورد استخراج ماتریس جرم عنصر یادآوری می‌کنیم که نیروهای اینرسی به عنوان قسمتی از نیروهای جسمی در نظر گرفته شده‌اند. در این صورت ایجاد یک ماتریس جرم تقریبی، از طریق متمرکز کردن قسمتهای مساوی از کل جرم عنصر در نقاط گرهی امکان‌پذیر است. با ملاحظه اینکه هر جرم گرهی اساساً متناظر با سهم جرم حجم اطراف گره می‌باشد، یادآوری می‌کنیم که در موقع استفاده از روش متمرکز کردن جرم، در اساس فرض بر این است که شتاب‌های سهم حجم یک گره ثابت بوده و مساوی مقادیر گرهی می‌باشند.

امتیاز مهم استفاده از ماتریس جرم متمرکز این است که ماتریس قطری بوده و همان‌گونه که بعداً مشاهده خواهیم کرد در برخی حالات عملیات عددی برای حل معادلات تعادل دینامیکی به طور بسیار قابل توجهی کاهش می‌یابند.

مثال ۴.۲۱: بردار نیروی جسمی متمرکز و ماتریس جرم متمرکز سازه نشان داده شده در شکل ۴.۵ E را تعیین کنید.

حل:

ماتریس جرم متمرکز عبارت است از:

$$\mathbf{M} = \rho \int_0^{100} (1) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} dx + \rho \int_0^{80} \left(1 + \frac{x}{40}\right)^2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} dx$$

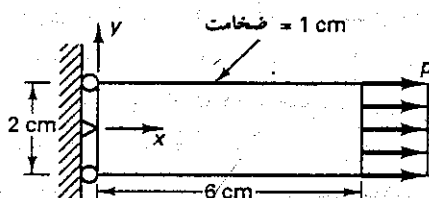
$$\mathbf{M} = \frac{\rho}{3} \begin{bmatrix} 150 & 0 & 0 \\ 0 & 670 & 0 \\ 0 & 0 & 520 \end{bmatrix}$$

یا

به طور مشابه، بردار نیروی جسمی متمرکز به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_B &= \left(\int_0^{100} (1) \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} (1) dx + \int_0^{80} \left(1 + \frac{x}{40}\right)^2 \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} \left(\frac{1}{10}\right) dx \right) f_2(t) \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 150 \\ 202 \\ 52 \end{bmatrix} f_2(t) \end{aligned}$$

یادآوری می‌کنیم همانگونه که انتظار می‌رفت، حاصل جمع عناصر ماتریس M و بردار R_B در این مثال و نیز مثال ۴.۵ یکسان می‌باشند. هنگامی که از روش متمرکز نمودن بار استفاده می‌شود، این نکته باید اذعان شود که عموماً بارهای نقاط گرهی به طور تقریبی محاسبه می‌شوند و اگر یک شبکه عناصر محدود درشتی در تحلیل به کار رود، جوابهای به دست آمده ممکن است که غیردقیق باشند. در حقیقت در برخی حالات، هنگامی که عناصر محدود از مرتبه بالاتر مورد استفاده قرار می‌گیرند، نتایج غیرمنتظره‌ای به دست می‌آیند. شکل ۴.۷ چنین حالتی را بخوبی نشان می‌دهد (همچنین ر.ک. به: مثال ۵.۱۲).

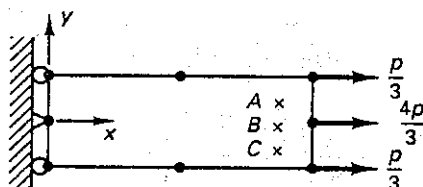


(الف) مسئله

$$p = 300 \text{ N/cm}^2$$

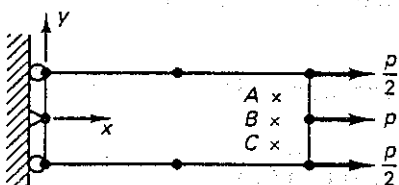
$$E = 3 \times 10^7 \text{ N/cm}^2$$

$$\nu = 0.3$$



(ب) مدل عناصر محدود بدون بارگذاری سازگار

Integration point	τ_{xx}	τ_{yy}	τ_{xy}
A	300.00	0.0	0.0
B	300.00	0.0	0.0
C	300.00	0.0	0.0

(واحد تمامی تنش‌ها N/cm^2 می‌باشد)

(پ) مدل عناصر محدود با بارگذاری متمرکز

Integration point	τ_{xx}	τ_{yy}	τ_{xy}
A	301.41	-7.85	-24.72
B	295.74	-9.55	0.0
C	301.41	-7.85	24.72

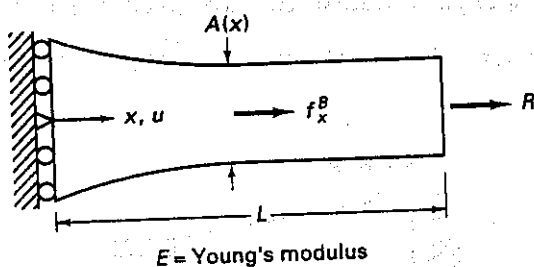
(واحد تمامی تنش‌ها N/cm^2 می‌باشد)

شکل ۴.۷ برخی نتایج نمونه تحلیل با بارگذاری سازگار و بارگذاری متمرکز

در یک تحلیل دینامیکی، اثرات اینرسی را می‌توان همچون اثرات نیروهای جسمی تلقی کرد. در این صورت، اگر یک ماتریس جرم متمرکز به کار رود، بهره حاصل از کاربرد یک بردار بار سازگار ناچیز است، ولی اگر در تحلیل، یک ماتریس جرم سازگار به کار رود، در این صورت باید از بارهای نقاط گرهی سازگار استفاده نمود.

۴.۲.۵ تمرین‌ها

۴.۱ از روش ارائه شده در مثال ۴.۲ استفاده نموده و اصل کار مجازی را برای یک میله یک بعدی نشان داده شده در زیر استخراج نمایید.



معادلات دیفرانسیل تعادل عبارتند از:

$$E \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial u}{\partial x} \right) + f_x^B = 0$$

$$EA \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=L} = R$$

۴.۲ سازه نشان داده شده در زیر را در نظر بگیرید.

(الف) معادله (۴.۷) را که بیانگر اصل تغییر مکان‌های مجازی می‌باشد، برای این حالت خاص استفاده نمایید.

(ب) اصل کار مجازی را برای کنترل اینکه آیا جواب کامل به صورت زیر می‌باشد یا نه، به کار ببرید.

$$\tau(x) = \left(\frac{72}{73} + \frac{24x}{73L} \right) \frac{R}{A_0}$$

از سه تغییر مکان مجازی زیر استفاده نمایید:

$$(i) \bar{u}(x) = a_0 x$$

$$(ii) \bar{u}(x) = a_0 x^2$$

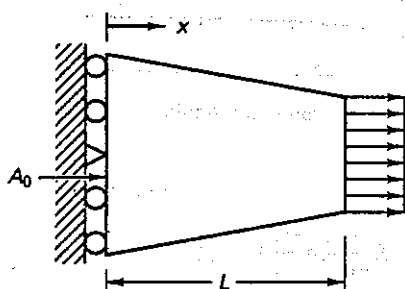
$$(iii) \bar{u}(x) = a_0 x^3$$

(پ) معادلات دیفرانسیل تعادل حاکم زیر را حل نمایید:

$$E \frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0$$

$$EA \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = F$$

(ت) از سه نوع تغییر مکان مجازی داده شده در قسمت (ب) استفاده نموده و در اصل کار مجازی با استفاده از جواب کامل تنش جایگذاری نموده [از قسمت (پ)] و به طور صریح نشان دهید که اصل مذکور برای این حالات صادق می‌باشد.



F = total force exerted on right end.

E = Young's modulus.

$A(x) = A_0(1 - x/4L)$

۴.۳ میله نشان داده شده در زیر را در نظر بگیرید:

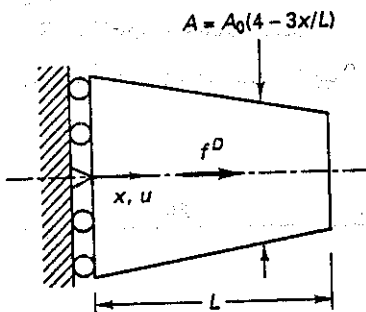
(الف) پاسخ کامل تغییر مکان سازه را به دست آورید.

(ب) به طور صریح نشان دهید که اصل کار مجازی با توابع تغییر مکانی زیر تأمین می‌شود:

$$(i) \bar{u} = ax$$

$$(ii) \bar{u} = ax^2$$

(پ) یک تنش τ_{xx} را پیدا کنید به گونه‌ای که به ازای آن اصل کار مجازی با فرض تغییر مکان (ii) تأمین شود ولی با فرض تغییر مکان (i) ارضا نگردد.



f^D = constant force per unit length
Young's modulus E

۴.۴ برای جسم دوبعدی نشان داده شده در زیر اصل کار مجازی را به کار ببرید تا اینکه نشان دهید که نیروهای جسمی با بارهای گرهی متمرکز وارد در حال تعادل می‌باشند.

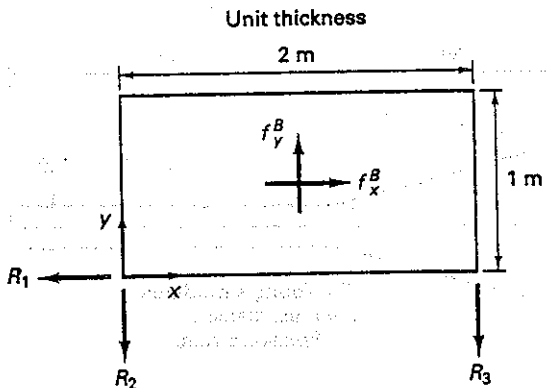
$$f_x^B = 10(1 + 2x) \text{ N/m}^3$$

$$f_y^B = 20(1 + y) \text{ N/m}^3$$

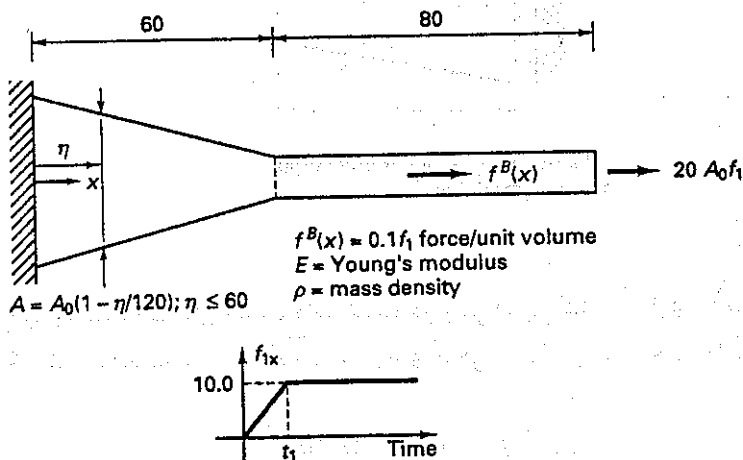
$$R_1 = 60 \text{ N}$$

$$R_2 = 45 \text{ N}$$

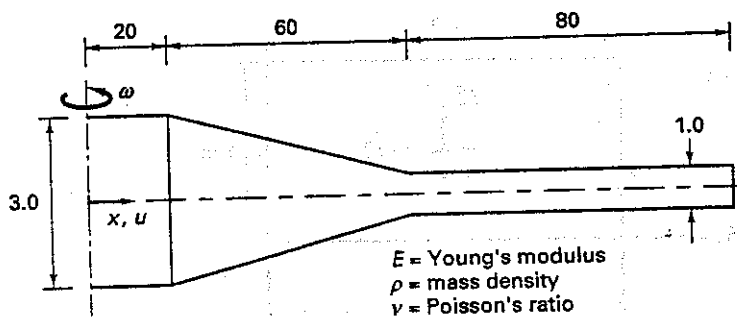
$$R_3 = 15 \text{ N}$$



- ۴.۵ سازه میله‌ای نشان داده شده در زیر را به صورت یک مجموعه همبسته از دو عنصر میله‌ای دوگره‌ای ایده‌آل‌سازی نمایید.
- (الف) معادلات تعادل $KU = R$ را محاسبه کنید.
- (ب) ماتریس جرم مجموعه همبسته عناصر را تعیین نمایید.



- ۴.۶ یک دیسک با یک سوراخ در محور مرکزی آن به شعاع ۲۰ را به گونه‌ای که در شکل زیر نشان داده شده است در نظر بگیرید که با یک سرعت دورانی ω (ثانیه/رادیان) در حال دوران است.



سازه را به صورت یک مجموعه همبسته از دو عنصر دو گرهی ایده‌آل‌سازی نموده و معادلات تعادل حالت پایا (شبه ایستایی) را محاسبه کنید. (توجه کنید که کرنش‌ها عبارتند از $\partial u / \partial x$ و u/x که در آن u/x کرنش حلقوی می‌باشد).

۴.۷ در مثال ۴.۵، حالت مربوط به زمان $t = 2$ را با شرط $U_1(t) = 0$ در تمامی زمانها، در نظر بگیرید.

(الف) از فرمول‌بندی عناصر محدود داده شده در مثال مذکور برای محاسبه تغییر مکان ایستایی نقاط گرهی و تنش‌های عنصری استفاده نمایید.

(ب) نیروی واکنش تکیه‌گاهی را محاسبه کنید.

(پ) فرض کنید که جواب تحلیل عناصر محدود، u^{FE} باشد. تابع خطای r را که در مطابقت با معادلات دیفرانسیل تعادل ایجاد می‌شود رسم نمایید، به عبارت دیگر r عبارت است از:

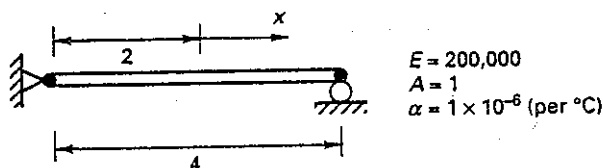
$$r = E \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(A \frac{\partial u^{FE}}{\partial x} \right) \right] + f_x^B A$$

(ت) انرژی کرنشی سازه را که از حل عناصر محدود به دست می‌آید محاسبه نموده و آن را با انرژی کرنشی کامل مدل ریاضی مقایسه کنید.

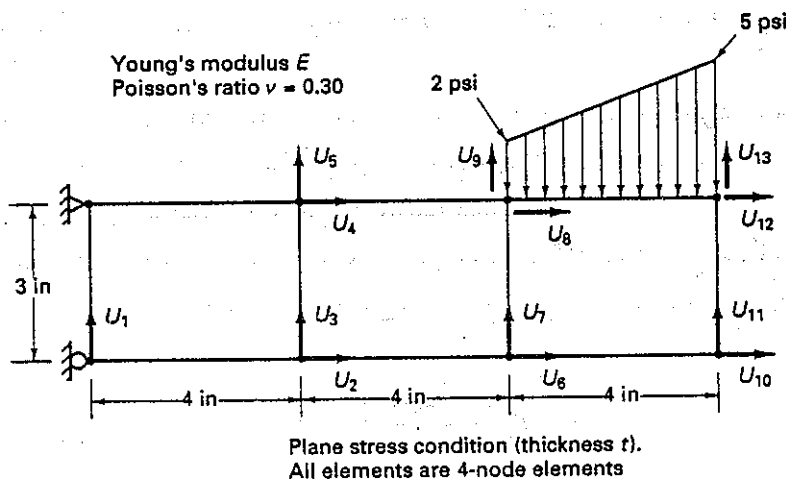
۴.۸ عنصر خربایی دو گرهی نشان داده شده در زیر، که در آغاز در یک دمای یکنواخت $20^\circ C$ قرار دارد، تحت اثر تغییر دمای زیر قرار داده می‌شود:

$$\theta = (10x + 20)^\circ C$$

تنش حاصله و تغییر مکان نقاط گرهی عنصر را محاسبه کنید. همچنین جواب تحلیلی مسأله را با فرض یک محیط پیوسته به دست آورید و به طور خلاصه در مورد نتایج حاصل بحث نمایید.



۴.۹ تحلیل عناصر محدود را که در شکل زیر نشان داده شده است، در نظر بگیرید:



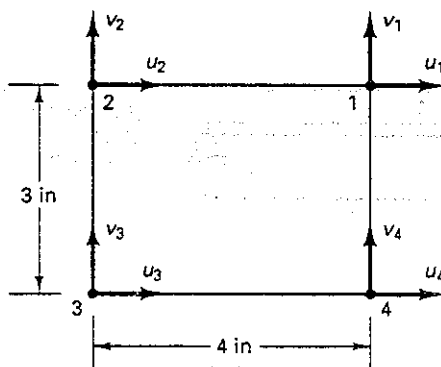
(الف) ماتریس نمونه B یک عنصر را به ازای بردار $\hat{u}^T = [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3 \ u_4 \ v_4]$

ایجاد نمایید.

(ب) عناصر $K_{u_2 u_2}$ ، $K_{u_6 u_7}$ ، $K_{u_7 u_6}$ و $K_{u_5 u_{12}}$ از ماتریس سختی K سازه را

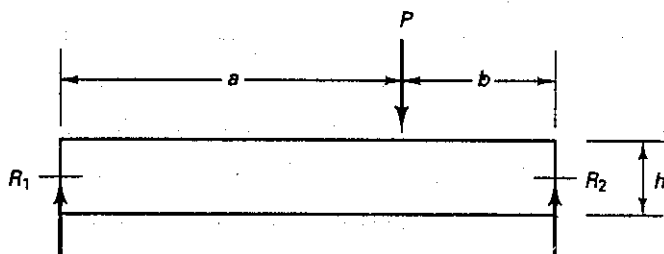
محاسبه کنید.

(پ) بار گزهی و R را که ناشی از توزیع خطی فشار سطحی می‌باشد محاسبه کنید.

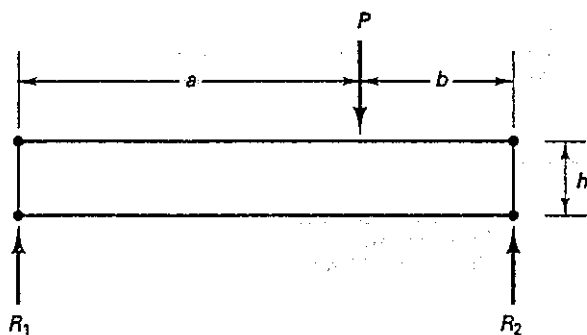


۴.۱۰ تیر دو سر تکیه گاه ساده زیر را در نظر بگیرید:

(الف) فرض کنید که نظریه معمول تیر به کار می‌رود، در این صورت واکنش‌های تکیه گاهی R_1 و R_2 را با استفاده از اصل کار مجازی تعیین کنید.



(ب) حال فرض کنید که تیر مذکور با یک عنصر محدود چهار گرهی مدل می‌شود. نشان دهید برای اینکه تعیین واکنش‌های تکیه گاهی R_1 و R_2 مانند قسمت (الف) امکان‌پذیر باشد، ضروری است که توابع تغییر مکان عنصر محدود بتوانند نمایشگر تغییر مکان‌های مُد صلب جسمی باشند.



۴.۱۱ عنصر تنش مسطح چهار گرهی را که در شکل نشان داده شده است با تنش‌های اولیه زیر در نظر بگیرید:

$$\tau_{xx}^I = 0 \text{ MPa}$$

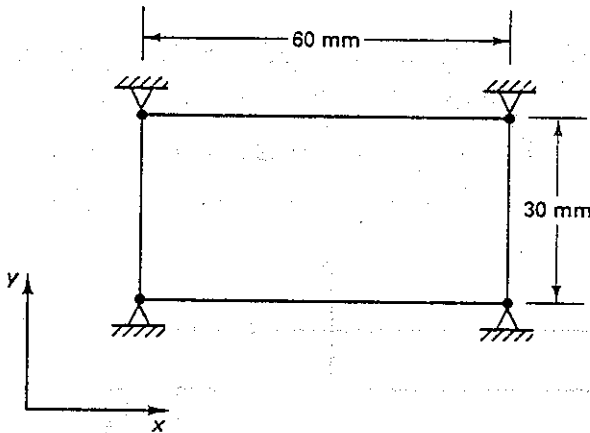
$$\tau_{yy}^I = 10 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xy}^I = 20 \text{ MPa}$$

(الف) نیروهای نقاط گرهی R_I را که متناظر با تنش‌های اولیه می‌باشند محاسبه کنید.

(ب) نیروهای نقاط گرهی R_S را که هم‌ارز با نیروهای سطحی متناظر با تنش‌های عنصری می‌باشند تعیین کنید. نتایج حاصل را با استفاده از اصول ایستایی مقدماتی کنترل کنید؛ و نشان دهید که R_S مساوی با R_I تعیین شده در قسمت (الف) می‌باشد. شرح دهید که چرا این نتیجه معقول به نظر می‌رسد.

(پ) یک نتیجه عمومی را به دست آورید: فرض کنید که به ازای هر گونه تنش داده شده، R_I و R_S محاسبه شده‌اند. تنش‌های مذکور چه شرایطی را باید احراز کنند تا $R_I = R_S$ باشد؟ لازم به یادآوری است که نیروهای سطحی R_S از معادله (ب) در مثال ۴.۲ بدست می‌آیند.



Young's modulus E
Poisson's ratio ν
Thickness = 0.5 mm

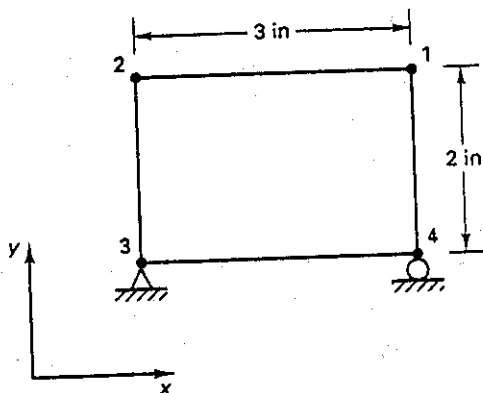
۴.۱۲ عنصر کرنش مسطح چهار گرهی را که در شکل زیر نشان داده شده است، تحت اثر تنش‌های ثابت زیر در نظر بگیرید.

$$\tau_{xx} = 20 \text{ psi}$$

$$\tau_{yy} = 10 \text{ psi}$$

$$\tau_{xy} = 10 \text{ psi}$$

تغییر مکان‌های نقاط گرهی عنصر را محاسبه نمایید.



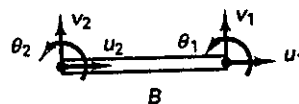
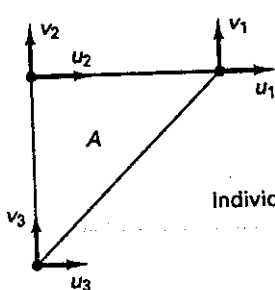
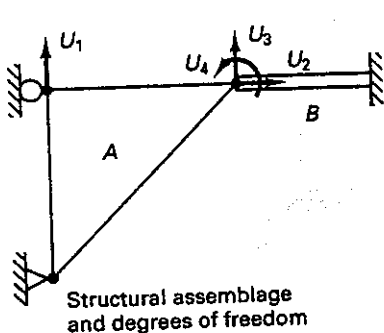
Young's modulus $E = 30 \times 10^6$ psi
Poisson's ratio $\nu = 0.30$

۴.۱۳ عنصر شماره ۲ در شکل ۴.۹ E را در نظر بگیرید:
(الف) بطور صریح نشان دهید که

$$\mathbf{F}^{(2)} = \int_{V^{(2)}} \mathbf{B}^{(2)T} \boldsymbol{\tau}^{(2)} dV^{(2)}$$

(ب) نشان دهید که نیروهای نقاط گرهی عنصری $\mathbf{F}^{(2)}$ در تعادل هستند.

۴.۱۴ فرض کنید که ماتریس‌های سختی \mathbf{K}_A و \mathbf{K}_B عناصر که متناظر با تغییر مکان‌های آنها می‌باشند محاسبه شده‌اند. این ماتریس‌ها را مستقیماً در روی ماتریس سختی سازه سوار کنید و شرایط مرزی تغییر مکانی را به گونه‌ای که در زیر نشان داده شده است در آن اعمال کنید.

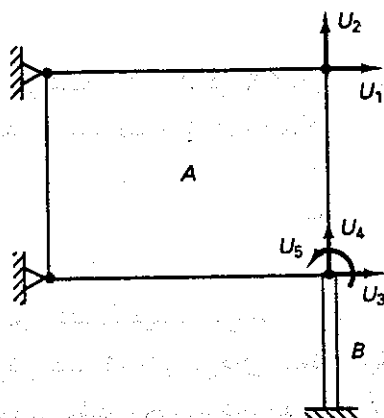


Individual elements

$$K_A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} & a_{46} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{matrix}$$

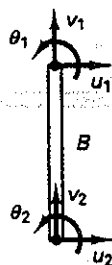
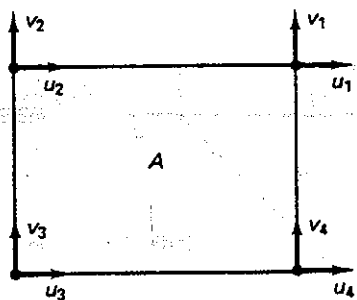
$$K_B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} & b_{36} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} & b_{46} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} & b_{56} \\ b_{61} & b_{62} & b_{63} & b_{64} & b_{65} & b_{66} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{matrix}$$

۴.۱۵ فرض کنید که ماتریس‌های سختی و عناصر که متناظر با تغییر مکان‌های آنها می‌باشند محاسبه شده‌اند. این ماتریس‌ها را مستقیماً در روی ماتریس سختی سازه سوار نموده و شرایط مرزی تغییر مکانی را به گونه‌ای که در زیر نشان داده شده است در آن اعمال کنید.

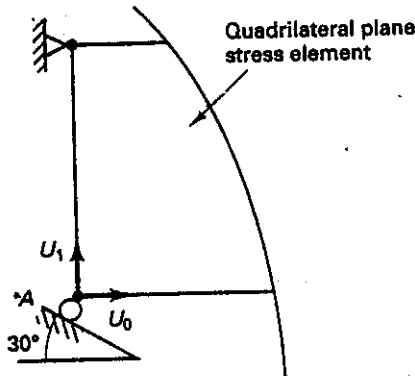


$$K_A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & \dots & a_{18} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{81} & \dots & \dots & a_{88} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_4 \end{matrix}$$

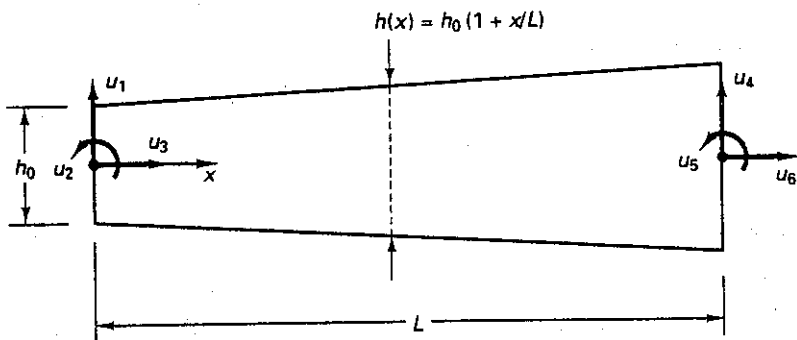
$$K_B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & \dots & b_{16} \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b_{61} & \dots & \dots & b_{66} \end{bmatrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{matrix}$$



- ۴.۱۶ مثال ۴.۱۱ را در نظر بگیرید. فرض کنید که یک غلتک در تکیه‌گاه A ، تغییر مکان در امتداد شیبی با زاویه 30° درجه نسبت به جهت افقی را میسر می‌سازد. چه اصلاحات ضروری باید در جواب مثال ۴.۱۱ اعمال شود تا ماتریس سختی K سازه برای این حالت به دست آید.
- (الف) اعمال کامل شرط تغییر مکان صفر را در نظر بگیرید.
- (ب) اعمال شرط تغییر مکان صفر را با استفاده از روش تاوان در نظر بگیرید.



- ۴.۱۷ عنصر تیری نشان داده شده در زیر را در نظر بگیرید. ضرایب سختی k_{11} و k_{12} را تعیین کنید.
- (الف) ضرایب کامل را از حل معادله دیفرانسیل تعادل به دست آورید (با استفاده از مدل ریاضی نظریه تیر Bernoulli).
- (ب) ضرایب را با استفاده از اصل کار مجازی و با توابع تیری ارمیتی به دست آورید (ر.ک. به: مثال ۴.۱۶).

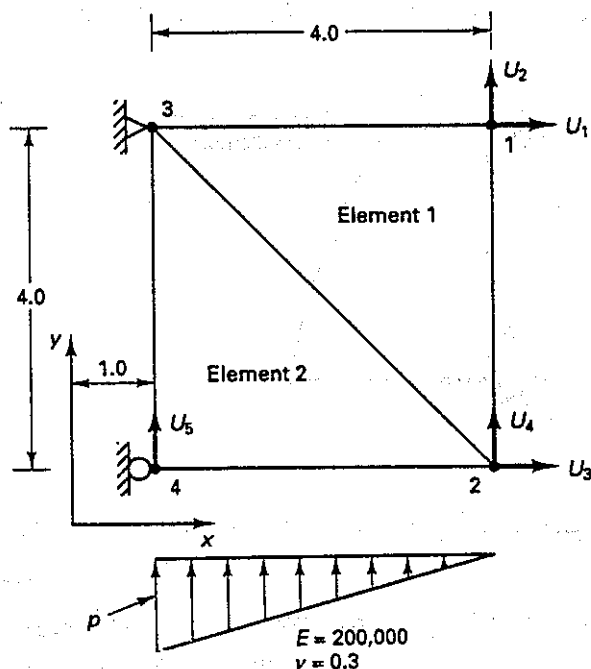


Young's modulus E
Unit thickness

۴.۱۸ مجموعه همبسته دو عنصری را که در شکل زیر نشان داده شده است در نظر بگیرید:

(الف) ضرایب سختی K_{11} و K_{14} را برای ایده‌آل‌سازی عناصر محدود مذکور تعیین کنید.

(ب) بردار بار مجموعه همبسته عناصر را محاسبه نمایید.



Plane stress, thickness = 0.1

۴.۱۹ مجموعه همبسته دو عنصری تمرین ۴.۱۸ را در نظر بگیرید، ولی شرایط تبارن

محوری را فرض کنید. محور y ، محور دوران است.

(الف) ضرایب سختی K_{11} و K_{14} را برای ایده‌آل‌سازی عناصر محدود تعیین کنید.

(ب) بردار بار متناظر با تعیین کنید.

۴.۲۰ مثال ۴.۲۰ را در نظر بگیرید و فرض کنید که بارگذاری در روی سازه به صورت

$$R_r = f_1(t) \cos \theta$$

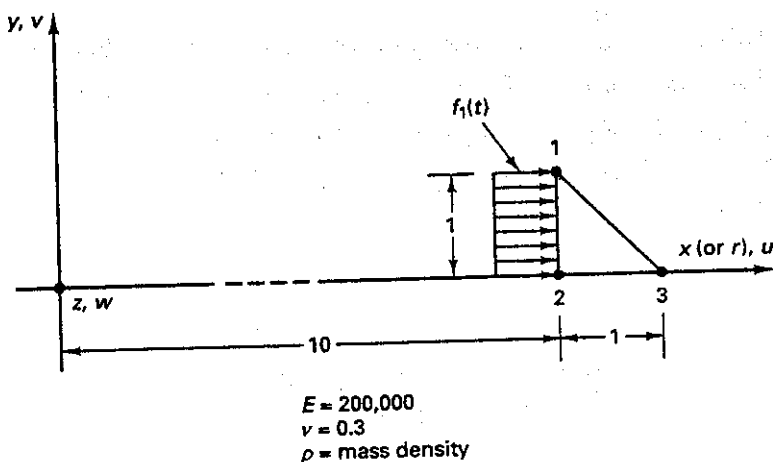
(الف) ماتریس سختی، ماتریس جرم و بردار بار عنصر سه گرهی نشان داده در شکل

زیر را ایجاد کنید. تمامی ماتریس‌های مورد نیاز را به طور صریح و بدون انجام

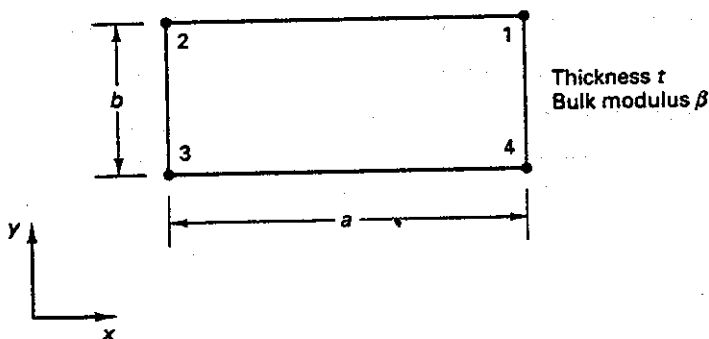
عملیات ضرب و انتگرال‌گیری به دست آورید.

(ب) شرح دهید (با استدلال فیزیکی) که فرض‌های به کار رفته برای u و v و w معقول

به نظر می‌رسند.



۴.۲۱ یک عنصر سیال بدون لزجت (برای حرکات صوتی) را می‌توان با در نظر گرفتن صرفاً انرژی کرنشی حجمی به دست آورد (زیرا سیالات بدون لزجت مقاومتی در برابر برش از خود نشان نمی‌دهند). ماتریس سختی عنصر سیال محدود را برای عنصر صفحه‌ای چهار گرهی نشان داده شده فرمول‌بندی کرده و تمامی ماتریس‌های مورد نیاز را به دست آورید. هیچ نوع عملیات ضرب برداری و انتگرال‌گیری را انجام ندهید. راهنمایی: به یاد داشته باشید که $\Delta V/V = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}$ و $\tau^T = [\tau_{xx} \ \tau_{yy} \ \tau_{xy} \ \tau_{yz}] = [-p \ -p \ 0 \ -p]$ و $p = -\beta \Delta V/V$

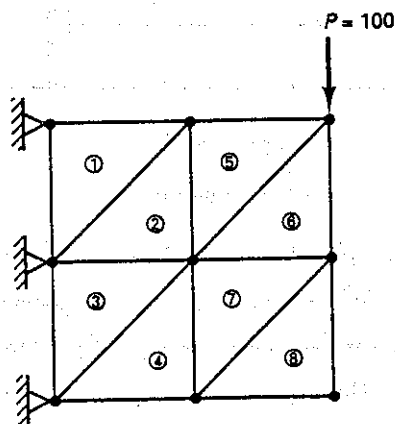


۴.۲۲ مجموعه‌های همبسته عناصر در تمرین‌های ۴.۱۸ و ۴.۱۹ را در نظر بگیرید. برای هر دو حالت تنش مسطح و مقارن محوری یک ماتریس جرم متمرکز (با استفاده از چگالی جرمی یکنواخت ρ) و یک بردار بار تمرکز یافته را تعیین کنید.

۴.۲۳ از یک برنامه کامپیوتری عناصر محدود برای حل مدل نشان داده شده در زیر که مربوط به مسأله مثال ۴.۶ می‌باشد، استفاده کنید.

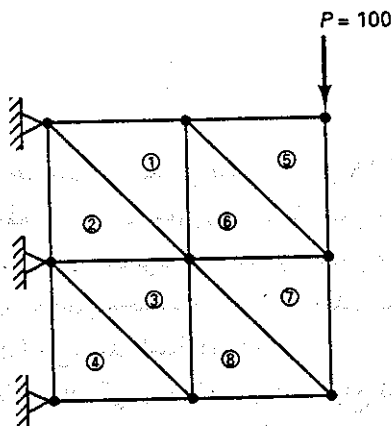
(الف) تنش‌ها و نیروهای نقاط گرهی عناصر را استخراج نموده و «نماهای بزرگ شده عناصر» را برای تنش‌ها و نیروهای نقاط گرهی مانند مثال ۴.۹ رسم نمایید.

- (ب) نشان دهید که نیروهای نقاط گرهی عنصر ۵ در حال تعادل می‌باشند و نیز نشان دهید که نیروهای نقاط گرهی عناصر ۵ و ۶، با بارهای وارده در حال تعادل‌اند.
- (پ) واکنش‌های تکیه‌گاهی را استخراج نموده و نشان دهید که نیروهای نقاط گرهی عناصر با این واکنش‌های تکیه‌گاهی در حال تعادل می‌باشند.
- (ت) انرژی کرنشی مدل عناصر محدود را محاسبه نمایید.



Eight constant-strain triangles

۴.۲۴ از یک برنامه کامپیوتری عناصر محدود برای حل مدل نشان داده شده در زیر که مربوط به مسئله مثال ۴.۶ می‌باشد استفاده کنید. تنش‌های عناصر و واکنش‌های تکیه‌گاهی را استخراج نموده و انرژی کرنشی مدل را محاسبه کنید. «نماهای بزرگ شده عناصر» را برای تنش‌ها و نیروهای نقاط گرهی رسم نمایید. نتایج حاصله را با نتایج به دست آمده در تمرین ۴.۲۳ مقایسه کنید و به طور مستدل بگویید که چرا به دست آوردن نتایج مختلف نباید غیرمنتظره باشد (اگرچه در هر دو ایده‌آل‌سازی مذکور از نوع مشابه و تعداد یکسان عناصر استفاده شده است).



Eight constant-strain triangles

۴.۳ همگرایی نتایج تحلیل

از آنجا که روش عناصر محدود یک روش عددی برای حل مسائل پیچیده مهندسی می‌باشد، از اینرو نکات مهمی در مورد دقت نتایج تحلیل و همگرایی جوابهای عددی باید در نظر گرفته شود. هدف این بخش، پرداختن به این مسائل و نکات می‌باشد. ما بحث را با تعریف معنی و مفهوم همگرایی، در بخش ۴.۳.۱ شروع خواهیم کرد؛ سپس به طریقه‌ای نسبتاً فیزیکی معیارهای همگرایی یکنوا را ملاحظه خواهیم نمود و این معیارها را به شرایط موردنظر در تحلیل Ritz (که در بخش ۳.۳.۳ ارائه شده است) ربط خواهیم داد. سپس برخی خواص مهم راه حل عناصر محدود را به اختصار بیان (و ثابت) می‌کنیم و در مورد نرخ همگرایی بحث می‌نماییم. سرانجام، محاسبه تنش‌ها و تعیین معیارهای خطا را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم که بیانگر میزان خطا در تنش‌های محاسبه شده در تکمیل یک تحلیل می‌باشد.

در این بخش روش عناصر محدود مبتنی بر تغییر مکان را که منجر به جواب‌های همگرای یکنوا می‌شود در نظر می‌گیریم. فرمول‌بندی‌هایی را که منتهی به یک همگرایی غیریکنوا می‌شوند، در بخش‌های ۴.۴ و ۴.۵ مورد ملاحظه قرار می‌دهیم.

۴.۳.۱ مسأله مدل و تعریف همگرایی

براساس آنچه پیشتر بحث شد، می‌توان گفت که در حالت کلی یک تحلیل عناصر محدود، ایجاب می‌کند که یک مسأله واقعی فیزیکی به یک مدل ریاضی ایده‌آل‌سازی شود و سپس آن مدل حل گردد (ر.ک. به: بخش ۱.۲). شکل ۴.۸ این مفاهیم را به اختصار نشان می‌دهد. تمایز قائل شده در شکل ۴.۸ در تحلیل‌های عملی اغلب رعایت نمی‌شود، زیرا عملاً با معادلات دیفرانسیل حرکت مربوط به مدل ریاضی مواجه نیستیم و در حقیقت ممکن است که این معادلات در تحلیل یک مسأله پیچیده نظیر تعیین پاسخ یک پوسته سه بعدی نامشخص باشند. در عوض، در یک تحلیل عملی، مستقیماً یک مسأله واقعی فیزیکی به یک مدل عناصر محدود ایده‌آل‌سازی می‌شود. با وجود این، برای مطالعه همگرایی جواب تحلیل عناصر محدود، هنگامی که تعداد عناصر افزایش پیدا می‌کند، قبول این نکته حائز ارزش است که در واقع نمایش عناصر محدود مسأله واقعی فیزیکی، به طور ضمنی مدل ریاضی را دربردارد. به عبارت دیگر جواب مناسب تحلیل عناصر محدود (به میزانی که تعداد عناصر افزایش پیدا می‌کند) باید به جواب تحلیلی (کامل) معادلات دیفرانسیلی که بر پاسخ مدل ریاضی حاکم است همگرا شود. همچنین، رفتار همگرایی، تمامی مشخصات یک تحلیل عناصر محدود را به نمایش می‌گذارد، زیرا معادلات دیفرانسیل حرکت مدل ریاضی به طریقه‌ای دقیق و فشرده تمامی

شرایط اساسی را که متغیرهای حل (تنش، تغییر مکان، کرنش و غیره) باید تأمین نمایند، بیان می‌کنند. اگر معادلات دیفرانسیل حرکت، مانند حالت تحلیل یک پوسته پیچیده، نامشخص باشند و / یا پیدا کردن جوابهای تحلیلی امکان‌پذیر نباشد، همگرایی جواب‌های تحلیل عناصر محدود را می‌توان تنها بر مبنای این واقعیت ارزیابی نمود که تمامی شرایط اساسی سینماتیک، ایستایی و شرایط مشخصه که در مدل ریاضی نهفته هستند، باید در نهایت (در همگرایی) تأمین شوند. بنابراین در تمامی مباحث مربوط به همگرایی جواب‌های تحلیل عناصر محدود، به طور ضمنی منظورمان همگرایی به جواب کامل مدل ریاضی می‌باشد.

مسئله واقعی فیزیکی

میدان هندسی

مصالح

بارگذاری

شرایط مرزی



مدل ریاضی (که مربوط به یک ایده‌آل‌سازی مکانیکی می‌باشد)

که منجر به معادلات دیفرانسیل حاکم بر حرکت می‌شود، به عنوان مثال $\frac{\partial}{\partial x} \left(EA \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -p(x)$ و اصل معادله کار مجازی (ر.ک. به: ۱ مثال ۴.۲)	خرپا	سینماتیک، به عنوان مثال،
	تنش مسطح	
	سه بعدی	
	صفحه kirchhoff و غیره	
	خطی ایزوتروپیک	مصالح، به عنوان مثال،
الاستیک لاستیک Mooney-Rivlin و غیره متمرکز گریز از مرکز و غیره تغییر مکان‌های از پیش تعیین شده و غیره		بارگذاری، به عنوان مثال،
		شرایط مرزی، به عنوان مثال،



حل عناصر محدود

انتخاب عناصر و روش‌های حل

که منجر به جواب تقریبی مدل ریاضی می‌شود (به عبارت دیگر، پاسخ تقریبی ایده‌آل‌سازی مکانیکی حاصل می‌شود)

شکل ۴.۸ فرایند حل عناصر محدود

در اینجا توجه به این نکته حائز اهمیت است که در تحلیل ارتجاعی خطی، یک جواب کامل منحصر به فرد برای مدل ریاضی وجود دارد. به عبارت دیگر اگر جوابی داشته باشیم که کاملاً در معادلات ریاضی حاکم صدق کند، در این صورت جواب مذکور، جواب کامل مسأله می‌باشد (ر.ک. به: بخش ۴.۳.۴).

حال اگر جواب تقریبی تحلیل عناصر محدود را با پاسخ کامل مدل ریاضی در نظر بگیریم، در این صورت شناخت منابع خطا که در نتایج حل عناصر محدود اثر می‌گذارند، ضروری است. جدول ۴.۴ به اختصار منابع مختلف خطاها را نشان می‌دهد.

جدول ۴.۴ خطاهای تحلیل عناصر محدود

خطا	محل وقوع خطا	رجوع به بخش
۱- گسسته‌سازی	استفاده از درون‌یابی‌های عناصر محدود برای هندسه و متغیرهای حل	۴.۲.۱، ۴.۲.۳، ۵.۳
۲- انتگرال‌گیری عددی در فضا	تعیین ماتریس‌های عناصر محدود با استفاده از انتگرال‌گیری عددی	۶.۸.۴ و ۵.۵
۳- تعیین روابط مشخصه	استفاده از مدل‌های مصالح غیرخطی	۶.۶.۳ و ۶.۶.۴
۴- حل معادلات تعادل دینامیکی	انتگرال‌گیری مستقیم زمانی، جمع آثار مدها	۹.۲، ۹.۴
۵- حل معادلات عناصر محدود به روشهای تکراری	Gauss-Seidel، شیب مزدوج، Newton-Raphson، روش‌های شبه نیوتونی، روش‌های حل ویژه مسائل	۸.۳ و ۸.۴ و ۹.۵ و ۱۰.۴
۶- گرد کردن	ایجاد معادلات و حل آنها	۸.۲.۶

خطاهای گرد کردن ناشی از دقت محدود عملیات حسابی انجام شده در کامپیوتر می‌باشند، خطاهای حل در مدل نمودن روابط مشخصه به علت خطی‌سازی و انتگرال‌گیری روابط مشخصه می‌باشند، خطاهای حل در محاسبه پاسخ دینامیکی در هنگام انتگرال‌گیری عددی معادلات حرکت ظاهر می‌شوند یا به علت استفاده تنها از تعداد اندکی مدها در روش جمع آثار مدها می‌باشند، خطاهای حل هنگامی که از روش‌های تکراری استفاده می‌شود نیز رخ می‌دهند، زیرا همگرایی در نمونه‌هایی در متغیرهای حل تعیین می‌گردد که کوچک بوده ولی صفر نمی‌باشند. در این بخش، تنها در مورد خطاهای گسسته‌سازی عناصر محدود بحث خواهیم کرد که ناشی از درون‌یابی متغیرهای حل می‌باشند. در این صورت، اساساً در این بخش مدلی را در نظر می‌گیریم که در آن سایر خطاهای مزبور در حل رخ نمی‌دهند. یک مسأله ایستایی

ارتجاعی خطی با هندسه‌ای که کاملاً با محاسبه کامل ماتریس‌های عناصر و حل معادلات نمایش داده می‌شود و نیز از خطاهای گرد کردن نیز صرف‌نظر می‌شود. برای آسان کردن ارائه مطالب، فرض می‌کنیم که تغییر مکان‌های از پیش تعیین شده، صفر می‌باشند. شرایط مرزی تغییر مکان غیر صفر، همان‌گونه که در بخش ۴.۲.۲ بحث گردید به مدل اعمال می‌شوند و چنین شرایط مرزی خواص حل عناصر محدود را تغییر نمی‌دهد.

برای این مدل با توجه به هدفی که از این مبحث داریم مجدداً معادله اساسی اصل کار مجازی را که بر جواب کامل مدل ریاضی حاکم است بیان می‌کنیم:

$$\int_V \bar{\epsilon}^T \tau \, dV = \int_{S_f} \bar{u}^S f^S \, dS + \int_V \bar{u}^T f^B \, dV \quad (4.62)$$

یادآوری می‌کنیم برای اینکه τ جواب کامل مدل ریاضی باشد، باید تغییر مکان‌های مجازی اختیاری \bar{u} (و کرنش‌های مجازی متناظر $\bar{\epsilon}$) در رابطه (۴.۶۲) صدق کنند، با این شرط که \bar{u} برای تغییر مکان‌های از پیش تعیین شده و متناظر با آن باید صفر باشد. یک نمادگذاری ساده برای رابطه (۴.۶۲) به صورت زیر می‌باشد:

تغییر مکان‌های u (و تنش‌های متناظر با آنها τ) را بگونه‌ای تعیین کنید که برای تمامی v ‌های قابل قبول داشته باشیم:

$$a(u, v) = (f, v)$$

(۴.۶۳)

در اینجا $a(0, 0)$ یک فرم دو خطی و $(f, 0)$ یک فرم خطی می‌باشد^(۹) - این فرمهای دو خطی و خطی بستگی به مدل ریاضی مورد نظر دارد، u جواب کامل تغییر مکان، v هرگونه تغییر مکان مجازی قابل قبول می‌باشد [«قابل قبول» به این دلیل که توابع v باید پیوسته بوده و در تغییر مکان‌های واقعی از پیش تعیین شده و متناظر با آنها صفر باشند (ر.ک. به: (۴.۷)] و f توابع نیرویی (بارهای f^S و f^B) را نشان می‌دهد. توجه شود که نمادگذاری مورد استفاده در (۴.۶۳) به طور ضمنی دلالت بر یک پروسه انتگرال‌گیری دارد. فرم‌های دوخطی $a(0, 0)$ که در این بخش در نظر می‌گیریم، متقارن می‌باشند به گونه‌ای که $a(u, v) = a(v, u)$.

از رابطه (۴.۶۳) انرژی کرنشی مربوط به جواب کامل u به صورت $1/2 a(u, u)$ به

(۹) دو خطی بودن $a(0, 0)$ بر این واقعیت دلالت می‌کند که به ازای مقادیر ثابت γ_1 و γ_2 داریم:

$$a(\gamma_1 u_1 + \gamma_2 u_2, v) = \gamma_1 a(u_1, v) + \gamma_2 a(u_2, v)$$

$$a(u, \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2) = \gamma_1 a(u, v_1) + \gamma_2 a(u, v_2)$$

و خطی بودن $(f, 0)$ بر این واقعیت دلالت دارد که به ازای مقادیر ثابت γ و γ_2 داریم:

$$(f, \gamma_1 v_1 + \gamma_2 v_2) = \gamma_1 (f, v_1) + \gamma_2 (f, v_2).$$

دست می‌آید. فرض می‌کنیم که خواص مصالح و شرایط مرزی مدل‌های موردنظر به گونه‌ای هستند که انرژی کرنشی مذکور متناهی و محدود می‌باشد. این نکته در عمل محدودیت جدی را ایجاد نمی‌کند ولی انتخاب مناسب یک مدل ریاضی را ضروری می‌سازد. به ویژه خواص مصالح باید از نکته نظر فیزیکی واقع‌بینانه باشند و توزیع‌های بار (وارد خارجی یا ناشی از قیدهای تغییر مکانی) باید به اندازه کافی هموار باشند. پیش از این در بخش ۱.۲ ضرورت مدل‌سازی مناسب بارهای وارده را مورد بحث قرار داده‌ایم و بعداً نیز در بخش ۴.۳.۴ نظراتی را در این زمینه بیان خواهیم نمود.

فرض کنید که جواب تحلیل عناصر محدود « u_h » می‌باشد، مشخص است که این جواب در فضای عناصر محدود مربوط به توابع درونیابی تغییر مکانی قرار دارد (h در اینجا نشانگر اندازه عنصر عمومی می‌باشد و از اینرو یک شبکه خاص را نشان می‌دهد). در این صورت «همگرایی» را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$a(u - u_h, u - u_h) \rightarrow 0 \quad \text{as } h \rightarrow 0 \quad (۴.۶۴)$$

یا معادل آن [ر.ک. به: (۴.۹۰)] بصورت زیر بیان می‌گردد:

$$a(u_h, u_h) \rightarrow a(u, u) \quad \text{as } h \rightarrow 0$$

از نکته نظر فیزیکی، گزاره مذکور بدین معنی است که به میزانی که شبکه عناصر محدود ریزتر می‌شود، انرژی کرنشی محاسبه شده از طریق حل عناصر محدود به انرژی کرنشی کامل مدل ریاضی همگرا می‌شود. اکنون یک مثال ساده‌ای را در نظر می‌گیریم تا نشان دهیم که منظورمان از فرم دو خطی $a(0, 0)$ چیست.

مثال ۴.۲۲: فرض کنید تحلیل یک سازه غشایی پیش‌تensionه با تکیه‌گاههای سرتاسری ساده و با کشش (ثابت) پیش‌تیدگی T که تحت اثر بارگذاری جانبی p می‌باشد، مورد نظر است (ر.ک. به: شکل ۴.۲۲ (B)). برای این مسأله فرم (۴.۶۳) را با استفاده از اصل کار مجازی ایجاد نمائید.

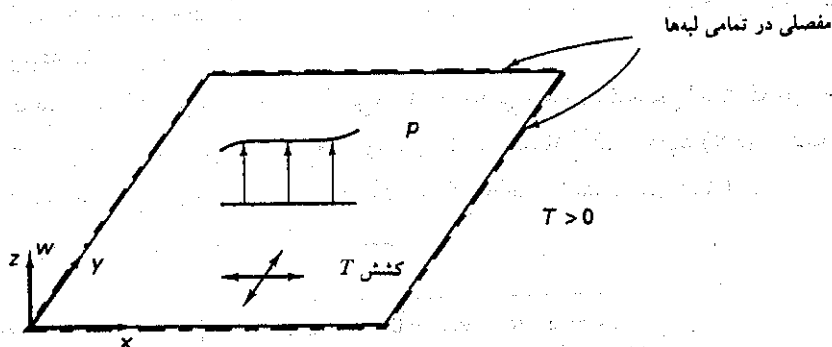
حل:

برای این مسأله، به کارگیری اصل کار مجازی نتیجه زیر را به دست می‌دهد:

$$\int_A \left[\begin{array}{c} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right]^T T \left[\begin{array}{c} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right] dx dy = \int_A p \bar{w} dx dy$$

که در آن $w(x, y)$ تغییر مکان جانبی است. سمت چپ این معادله فرم دو خطی $a(v, u)$ با

$v = \bar{w}$ و u را به دست می‌دهد و حاصل انتگرال‌گیری سمت راست، (f, v) می‌باشد.



شکل ۴.۲۲ سازه غشایی پیش تنیده

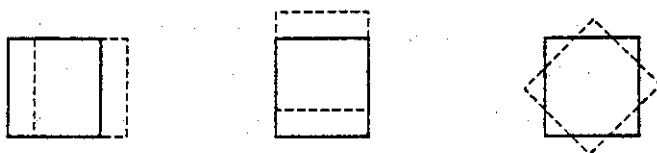
برحسب عناصر محدود خاصّ مبتنی بر تغییر مکان که در تحلیل مسأله تعریف شده در بالا مورد استفاده واقع می‌شوند (و به طور مناسبی فرمول‌بندی شده‌اند)، به میزانی که تعداد عناصر محدود افزایش پیدا می‌کنند همگرایی به جواب کامل ممکن است به صورت یکنوا یا غیر یکنوا باشد. در بحث بعدی، معیارهای همگرایی یکنوای جوابها را ملاحظه خواهیم کرد. شرایط تحلیل عناصر محدود که منجر به همگرایی غیر یکنوا می‌شود، در بخش ۴.۴ مورد بحث قرار خواهد گرفت.

۴.۳.۲ معیارهای همگرایی یکنوا

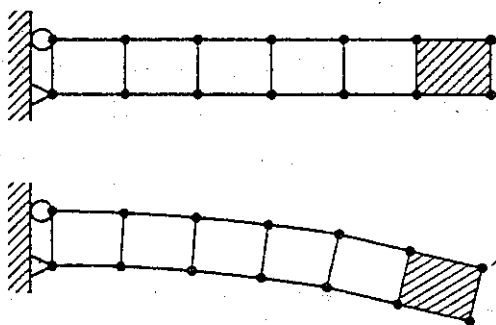
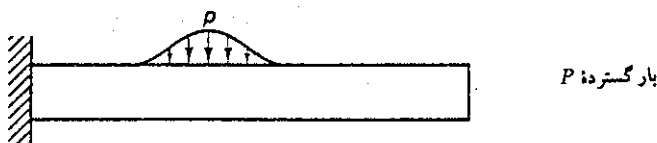
برای همگرایی یکنوا، عناصر باید کامل بوده و نیز عناصر و شبکه باید سازگار باشند. اگر این شرایط تأمین شوند، به میزانی که ریز کردن شبکه عناصر محدود ادامه پیدا می‌کند، دقت نتایج حل به طور پیوسته افزایش خواهند یافت. تعریف شبکه باید از طریق تقسیم نمودن عناصر استفاده شده پیشین به دو عنصر یا بیشتر انجام گیرد، در این صورت شبکه قدیمی در شبکه

جدید «محاط می‌شود». از نکته نظر ریاضی این بدان معنی است که فضای جدید توابع درونیابی عناصر محدود شامل فضای استفاده شده پیشین خواهد بود و به میزانی که شبکه ریزتر می‌شود، بُعد فضای جوابهای عناصر محدود بطور پیوسته افزایش پیدا می‌کند تا در نهایت شامل جواب کامل شود.

شرط کامل بودن یک عنصر بدین معنی است که توابع تغییر مکان عنصر باید قادر باشند که تغییر مکان‌های صلب جسمی و حالت‌های کرنش ثابت را به نمایش بگذارند.



(الف) مدهای صلب جسمی یک عنصر تنش مسطح



حرکت انتقالی و دوران جسم صلب
عنصر با هر اندازه‌ای باید
عاری از تنش باشد

(ب) تحلیلی برای نشان دادن شرط مد صلب جسمی

شکل ۴.۹ کاربرد عنصر تنش مسطح در تحلیل یک تیر طرّه‌ای

تغییر مکان‌های صلب جسمی آن مدهای تغییر مکانی هستند که عنصر باید قادر باشد به عنوان یک جسم صلب آنها را تحمل کند بدون اینکه تنش‌هایی در آن ایجاد شود. به عنوان مثال

یک عنصر تنش مسطح دوبعدی باید قادر باشد که به طور یکنواخت در هر دو جهت صفحه خودش حرکت انتقالی نموده و نیز دوران نماید بدون اینکه کرنشی در آن ایجاد شود. دلیل اینکه عنصر باید قادر باشد که چنین تغییر مکان‌هایی را بدون ایجاد تنش، تحمل نماید در تحلیل تیر طره‌ای که در شکل ۴.۹ دیده می‌شود نشان داده شده است: عنصری که در انتهای آزاد سمت راست تیر قرار دارد - با هر اندازه‌ای - باید بدون ایجاد تنش، حرکت انتقالی و دوران نماید زیرا از روابط ساده ایستایی می‌توان فهمید که تیره طره‌ای در آنسوی محل اعمال بار تحت اثر تنش نمی‌باشد. معمولاً تعداد مدهای صلب جسمی را که یک عنصر باید قادر به تحمل آنها باشد می‌توان براحتی با یک بررسی ساده مشخص نمود، ولی توجه به این نکته مفید می‌باشد که تعداد مدهای صلب جسمی یک عنصر مساوی تعداد درجات آزادی عنصر منهای تعداد مدهای کرنشی (یا مدهای طبیعی) آن می‌باشد. به عنوان مثال، یک عنصر خربایی دوگره‌ای یک مد کرنشی (حالت کرنش ثابت) داشته و از اینرو دارای یک، سه، پنج مد صلب جسمی به ترتیب در شرایط یک و دو و سه بعدی می‌باشد. برای عناصر محدود پیچیده‌تر، تعداد مدهای کرنشی منفرد و مدهای صلب جسمی را می‌توان به طور مؤثری با نمایش ماتریس سختی بر مبنای ویژه بردارها نشان داد. بنابراین از حل ویژه مسأله زیر:

$$K\Phi = \lambda\Phi \quad (4.65)$$

نتیجه زیر حاصل می‌شود (ر.ک. به: بخش ۲.۵)

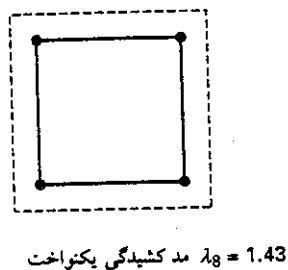
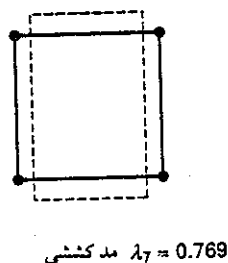
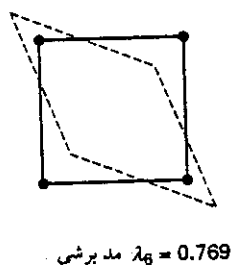
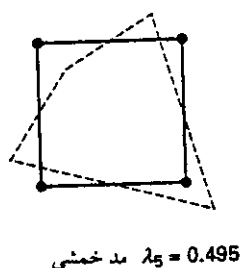
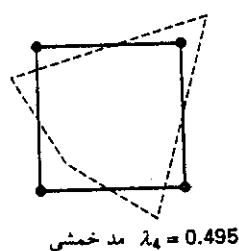
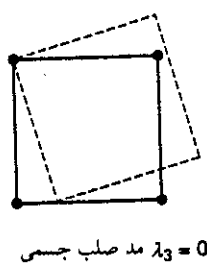
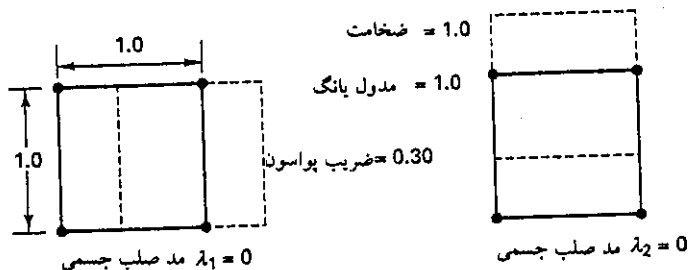
$$K\Phi = \Phi\Lambda \quad (4.66)$$

که در آن Φ ماتریسی است که ویژه بردارهای Φ_1, \dots, Φ_n را دربردارد و Λ یک ماتریس قطری است که شامل ویژه مقادیر متناظر می‌باشد، $\Lambda = \text{diag}(\lambda_i)$. در این صورت با استفاده از خاصیت یکاتعامدی ویژه بردارها، داریم:

$$\Phi^T K \Phi = \Lambda \quad (4.67)$$

Λ را می‌توان ماتریس سختی عنصری متناظر با مدهای تغییر مکانی ویژه بردار تلقی نمود. ضرایب سختی $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ مستقیماً میزان سختی عنصر را در مد تغییر مکان مربوطه نشان می‌دهد. بنابراین تبدیل (۴.۶۷) به روشنی نشان می‌دهد که آیا مدهای صلب جسمی وجود دارند یا نه و نیز چه مدهای کرنشی اضافی موجود هستند.^(۱۰) به عنوان یک مثال، هشت ویژه بردار و ویژه مقادیر متناظر مربوط به یک عنصر چهارگره‌ای در شکل ۴.۱۰ نشان داده شده‌اند.

(۱۰) همچنین توجه شود، همان‌گونه که در بخش ۴.۳.۴ نشان خواهیم داد، از آنجا که تحلیل عناصر محدود، سختی سازه را بیش از اندازه واقعی تخمین می‌زند، از اینرو هر اندازه ویژه مقادیر «کوچکتر» باشند، عنصر مؤثرتر خواهد بود.



شکل ۴.۱۰ ویژه مقادیر و ویژه بردارهای یک عنصر تنش سطح چهارگره‌ای

اگر تصوّر کنیم که برای نمایش سازه از عناصر بیشتر و بیشتری در مجموعه همبسته عناصر استفاده می‌شود، آنگاه ضرورت وجود حالات کرنش ثابت را می‌توان به طور فیزیکی

فهمید. در این صورت، در حد، هنگامی که هر عنصر به یک اندازه بسیار کوچک میل می‌کند، کرنش در هر عنصر به یک مقدار ثابت نزدیک می‌شود و هرگونه تغییر پیچیده تنش در سازه را می‌توان تقریب‌سازی کرد. به عنوان مثال عنصر تنش مسطح مورد استفاده در شکل ۴.۹ باید قادر باشد که دو شرط تنش عمودی ثابت و یک شرط تنش برشی ثابت را به نمایش گذارد. شکل ۴.۱۰ نشان می‌دهد که یک عنصر می‌تواند نمایشگر چنین شرایط تنش ثابت و نیز شامل دو مد کرنشی خمشی باشد.

مدهای صلب جسمی و حالات تنش ثابت را که یک عنصر می‌تواند از خود نشان دهد، می‌توان مستقیماً از مطالعه ماتریس کرنش - تغییر مکان عنصر نیز مشخص کرد (ر.ک. به: مثال ۴.۲۳).

شرط سازگاری بدین معنی است که تغییر مکان‌ها در عناصر و در سرتاسر مرزهای عناصر باید پیوسته باشند. از نکته نظر فیزیکی، هنگامی که سازه بارگذاری می‌شود، شرط سازگاری تضمین می‌کند که هیچ‌گونه فاصله‌ای بین عناصر ایجاد نشود. هنگامی که تنها درجات آزادی انتقالی در گره‌های عنصر تعریف می‌شوند، در این صورت پیوستگی در تغییر مکان‌های u و v و w - هر کدام که قابل کاربرد باشد - باید حفظ شود. با وجود این هنگامی که درجات آزادی دورانی نیز تعریف می‌شوند که از مشتق‌گیری تغییر مکان‌های جانبی به دست می‌آیند (نظیر آنچه که در فرمول‌بندی عنصر خمش صفحه‌ای در مثال ۴.۱۸ مشاهده شد)، در این صورت ضروری است که پیوستگی در مشتق‌های اول تغییر مکان‌های مربوطه نیز تأمین شود. این نکته پیامد فرض سینماتیک در تغییر مکان‌های سرتاسر ضخامت عنصر خمش صفحه‌ای است، به عبارت دیگر، پیوستگی در تغییر مکان w و مشتقات $\partial w / \partial x$ و $\partial w / \partial y$ در امتداد لبه‌های مربوطه عنصر، پیوستگی تغییر مکان‌ها در سرتاسر ضخامت عناصر دیگر اتصال یابنده به آن عنصر را تضمین می‌کند.

سازگاری بین عناصر خرابایی و تیری به طور خودکار تضمین می‌شود، زیرا آنها تنها در نقاط گرهی به یکدیگر متصل می‌شوند و نیز حفظ سازگاری در حالات کرنش مسطح دوبعدی، تنش مسطح و تحلیل متقارن محوری و نیز هنگامی که در تحلیل سه بعدی فقط درجات آزادی u و v و w به عنوان متغیرهای نقاط گرهی مورد استفاده قرار می‌گیرند، نسبتاً ساده می‌باشد. با وجود این احراز شرایط سازگاری در تحلیل خمش صفحه‌ای بویژه در تحلیل پوسته نازک که دور آنها از مشتق تغییر مکان‌های جانبی به دست می‌آیند، دشوار می‌باشد. بدین علت، تأکید زیادی به سمت بسط و ایجاد عناصر صفحه‌ای و پوسته‌ای سوق داده شده است که در آنها تغییر مکان‌ها و دور آنها به عنوان متغیر در نظر گرفته می‌شوند (ر.ک. به: بخش ۵.۴). در چنان عناصری، تأمین شرایط سازگاری مانند حالتی که تنها با درجات آزادی انتقالی مواجه هستیم، آسان می‌شود.

اینکه آیا یک عنصر خاص کامل و سازگار می‌باشد یا نه، بستگی به فرمول‌بندی مورد استفاده دارد و ضروری است که هر فرمول‌بندی به طور انفرادی تحلیل شود. مثال ساده زیر را در نظر می‌گیریم.

مثال ۴.۲۳ تحقیق کنید که آیا عنصر تنش مسطح مورد استفاده در مثال ۴.۶ سازگار و کامل می‌باشد یا نه.

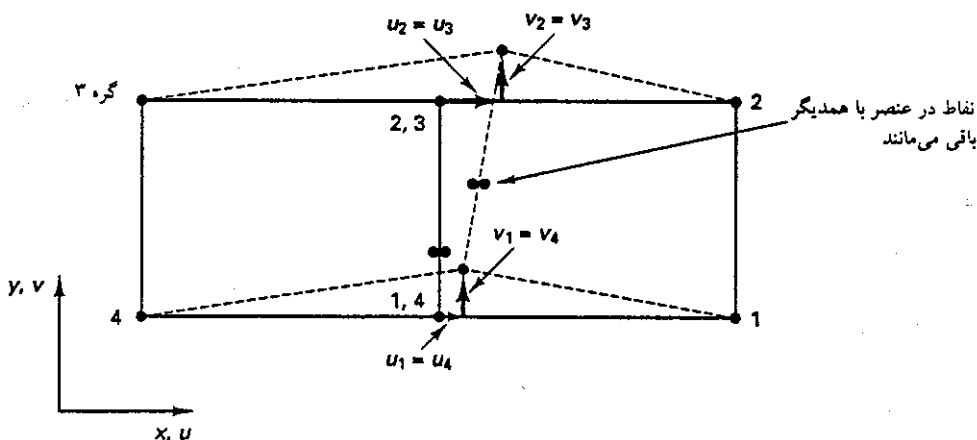
حل:

برای تغییر مکان‌های عنصر داریم:

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy$$

$$v(x, y) = \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 xy$$

مشاهده می‌کنیم که تغییر مکان‌ها در عنصر پیوسته می‌باشند، از اینرو برای اینکه نشان دهیم که عنصر سازگار می‌باشد، ضروری است هنگامی که مجموعهٔ همبستهٔ عناصر تحت اثر بارگذاری قرار می‌گیرند، تحقیق کنیم که آیا پیوستگی بین عناصر حفظ می‌شود یا نه. دو عنصر را که در دو نقطهٔ گرهی به یکدیگر متصل شده و دو تغییر مکان دلخواه به آنها اعمال شده است در نظر بگیرید. از فرض تغییر مکان نتیجه می‌شود که نقاط (به عبارت دیگر ذرات مادی) در لبه‌های اتصالی بطور خطی تغییر مکان می‌دهند، از اینرو پیوستگی بین عناصر حفظ می‌شود. بنابراین عنصر سازگار است.



شکل ۴.۲۳ سازگاری عنصر تنش مسطح

حال اگر کامل بودن عنصر را در نظر بگیریم، توابع تغییر مکان نشان می‌دهند که هنگامی که تنها α_1 غیر صفر باشد، در این صورت یک انتقال صلب جسمی در جهت x امکان پذیر است. به طور مشابه، یک تغییر مکان صلب جسمی در جهت y با داشتن β_2 غیر صفر اعمال می‌شود و برای یک دوران صلب جسمی، α_3 و β_2 باید با شرط $\beta_2 = -\alpha_3$ ، غیر صفر باشند. در هنگام استفاده از ماتریس E کرنش‌ها را به مختصات تعمیم یافته ارتباط می‌دهد نیز می‌توان به نتیجه‌گیری مشابهی دست یافت (ر.ک. به: مثال ۴.۶). همچنین این ماتریس نشان می‌دهد که حالات کرنش ثابت امکان پذیر می‌باشند. بنابراین عنصر کامل است.

۴.۳.۳ حل عناصر محدود همگرای یکنوا: یک روش حل Ritz

پیشتر ملاحظه نمودیم که کاربرد اصل کار مجازی و استفاده از شرط مانا بودن پتانسیل کلی سیستم یکسان می‌باشند (ر.ک. به: مثال ۴.۴). همچنین اگر بحث روش Ritz در بخش ۳.۳.۳ را در نظر بگیریم، می‌توان نتیجه گرفت که جواب‌های تحلیل عناصر محدود مبتنی بر تغییر مکان که به طور یکنوا همگرا هستند، در حقیقت صرفاً ناشی از کاربرد روش Ritz می‌باشند. در تحلیل عناصر محدود، توابع Ritz در ماتریس‌های درونیابی تغییر مکان عناصر $H^{(m)}$ و $m = 1, 2, \dots$ جای گرفته‌اند و پارامترهای Ritz تغییر مکان‌های نقاط گرهی مجهول انبار شده در U می‌باشند. همچنان که در زیر بیشتر شرح خواهیم داد، برای اینکه حل عناصر محدود، یک تحلیل Ritz باشد، شرایط ریاضی توابع درونیابی تغییر مکان در ماتریس‌های $H^{(m)}$ باید کاملاً آن شرایطی باشند که آنها را پیش از این با استفاده از استدلال فیزیکی مشخص نمودیم. تناظر بین تحلیل‌های مزبور در مثال‌های ۳.۲۲ و ۴.۵ نشان داده شده است.

اگر روش تحلیل Ritz را با درونیابی‌های عناصر محدود در نظر بگیریم، در این صورت خواهیم داشت:

$$\Pi = \frac{1}{2} U^T K U - U^T R \quad (4.68)$$

که در آن Π پتانسیل کلی سیستم است. با استفاده از شرط مانا بودن Π نسبت به پارامترهای Ritz (U_i) که در U ذخیره شده‌اند، و با قبول این نکته که ماتریس K متقارن است، رابطه زیر حاصل می‌شود:

$$K U = R \quad (4.69)$$

از حل (۴.۶۹)، پارامترهای Ritz بدست می‌آیند و در این صورت جواب تغییر مکان در میدان مورد نظر عبارت است از:

$$u^{(m)} = H^{(m)}U; \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.70)$$

روابط (۴.۶۸) الی (۴.۷۰) نمایشگر یک تحلیل Ritz می‌باشند، به شرط اینکه توابع مورد استفاده شرایط معینی را تأمین نمایند. در بخش ۳.۳.۲، یک مسأله وردشی C^{m-1} را به گونه‌ای تعریف کردیم که نشانگر وردشی مسأله شامل مشتقات از مرتبه m و پایین‌تر باشد. سپس یادآوری نمودیم که برای همگرایی، توابع Ritz باید شرایط مرزی اساسی (یا شرایط مرزی هندسی) مسأله را، که شامل مشتقات تا مرتبه $(m-1)$ می‌باشند، تأمین نمایند، ولی ضرورتی ندارد که توابع مذکور شرایط مرزی طبیعی (یا شرایط مرزی نیرویی) مسأله را، که شامل مشتقات مرتبه m الی $(2m-1)$ می‌باشند، ارضا کنند، زیرا نشانگر وردشی Π به طور ضمنی شامل شرایط مذکور می‌باشد. بنابراین، برای اینکه یک حل عناصر محدود، یک تحلیل Ritz باشد، شرایط مرزی اساسی باید کاملاً به وسیله تغییر مکان‌های نقاط گرهی عناصر محدود و توابع درونیابی بین نقاط گرهی تأمین شوند. با وجود این، در انتخاب توابع تغییر مکانی عناصر محدود، ضرورت ندارد توجه خاصی معطوف به شرایط مرزی طبیعی شود، زیرا این شرایط با بردار بار اعمال می‌گردند و به طور تقریبی در تحلیل Ritz ارضا می‌شوند. میزان دقت تأمین شرایط مرزی طبیعی یا نیرویی بستگی به توابع معین Ritz مورد استفاده دارند، اما دقت مذکور را همواره می‌توان با استفاده از تعداد زیادتری از توابع و یا به عبارت دیگر با کاربرد تعداد زیادتری از عناصر محدود جهت مدل کردن مسأله، افزایش داد.

در تحلیل کلاسیک Ritz، توابع Ritz به تمام میدان مورد نظر بسط می‌یابند، در حالی که در تحلیل عناصر محدود، توابع انفرادی Ritz تنها به زیر میدانهای مربوط به تمامی ناحیه (عناصر محدود) بسط پیدا می‌کنند. بنابراین، سؤالی به این صورت مطرح شود که چه شرایطی را باید درونیابی‌های عناصر محدود در ارتباط با شرایط پیوستگی بین زیر میدانهای همجوار احراز نمایند. برای جواب دادن به این سؤال، انتگرال‌گیری‌هایی را که باید انجام شوند تا ماتریس ضریب K تعیین شود در نظر می‌گیریم. قبول می‌کنیم که در یک مسأله C^{m-1} برای اینکه بتوانیم انتگرال‌گیری‌ها را در سرتاسر مرزهای عنصر انجام دهیم، وجود پیوستگی در حداقل $(m-1)$ امین مشتقات توابع آزمون Ritz ضروری است. ولی، شرایط پیوستگی مذکور کاملاً متناظر با شرایط سازگاری هستند که در بخش ۴.۳.۲ مورد بحث قرار گرفتند. به عنوان مثال، در تحلیل مسائل سه بعدی کامل تنها تغییر مکان‌های بین عناصر باید پیوسته باشند، در حالی که در تحلیل مسائل صفحه‌ای که با استفاده از تئوری صفحه Kirchhoff فرمول‌بندی شده‌اند وجود پیوستگی در اولین مشتقات توابع تغییر مکان نیز ضروری است.

بنابراین در یک جمع‌بندی باید گفت که برای یک مسأله $C^{m-1} \equiv C^{m-1}$ پیوستگی در توابع آزمون و مشتقات آنها تا مرتبه $(m-1)$ در تحلیل کلاسیک Ritz، توابع آزمون به گونه‌ای

انتخاب می‌شوند تا به طور کامل تمامی شرایط مرزی را که شامل مشتقات تا مرتبه $(m-1)$ می‌باشند تأمین نمایند. این نکته در تحلیل عناصر محدود نیز صادق است اما در ضمن باید پیوستگی در توابع آزمون و مشتقات آنها تا مرتبه $(m-1)$ بین عناصر تأمین گردند تا اینکه حل عناصر محدود متناظر با یک تحلیل Ritz باشد.

اگرچه روش تحلیل Ritz و روش عناصر محدود مبتنی بر تغییر مکان از نکته نظر تئوریک یکسان می‌باشند، با وجود این در عمل روش عناصر محدود امتیازهای مهمی بر تحلیل رایج Ritz دارد. یک اشکال تحلیل رایج Ritz این است که توابع Ritz در کل ناحیه مورد نظر تعریف می‌شوند. به عنوان مثال، در تحلیل تیر طره‌ای مثال ۳.۳۴، توابع Ritz از $x=0$ الی $x=L$ را پوشش دادند. بنابراین در تحلیل رایج Ritz، ماتریس K یک ماتریس کامل است و همچنان که در بخش ۸.۲.۳ اشاره شد، اگر توابع زیادی مورد استفاده قرار گیرند، عملیات عددی مورد نیاز برای حل معادلات جبری حاصل قابل توجه می‌باشند.

یک دشواری خاص در تحلیل رایج Ritz انتخاب توابع مناسب Ritz است، زیرا جواب تحلیل، یک ترکیب خطی از این توابع می‌باشد. برای به دست آوردن دقیق گرادین‌های بزرگ تغییر مکان و تنش ممکن است که توابع زیادی مورد نیاز باشند. بنابراین توابع مذکور به طور غیر ضروری در ناحیه‌هایی نیز بسط می‌یابند که در آنها تغییر مکان‌ها و تنش‌ها نسبتاً خیلی آهسته تغییر می‌کنند و نیز در آن ناحیه‌ها توابع زیادی مورد نیاز نمی‌باشند.

دشواری دیگر در تحلیل رایج Ritz هنگامی پیش می‌آید که کل ناحیه مورد نظر از زیر ناحیه‌هایی با انواع مختلف توزیع کرنش تشکیل شده باشد. به عنوان مثال یک صفحه‌ای را در نظر بگیرید که تکیه‌گاه‌های کناری آن شامل تیرها و ستون‌هایی می‌باشد. در چنین حالتی، توابع Ritz مورد استفاده برای یک ناحیه (نظیر صفحه)، برای ناحیه‌های دیگر (نظیر تیرها و ستون‌های لبه‌ای) مناسب نیستند و شرایط خاص پیوستگی تغییر مکان یا روابط مرزی باید در تحلیل وارد شوند.

دلایلی که پیشتر ارائه گردیدند، نشان می‌دهند که تحلیل رایج Ritz در حالت کلی، برای استفاده در برنامه‌های عمومی کامپیوتری مناسب نیست مگر در برخی حالات خاص که ایجاد برنامه‌های کامپیوتری با هدف مشخصی مورد نظر می‌باشند. از سوی دیگر، رفع مشکلات عملی روش عناصر محدود برای اینکه کاربرد وسیعتری پیدا کند ضروری است، ولی مزایای روش رایج Ritz نیز در تحلیل عناصر محدود باید حفظ شوند. در ارتباط با مشکلات اشاره شده در فوق، انتخاب توابع Ritz با استفاده از آرشیوی در برنامه کامپیوتری که شامل عناصر مختلفی می‌باشد عملی می‌شود. استفاده از توابع نسبتاً زیاد در ناحیه‌هایی با گرادین‌های بزرگ تغییر مکان و تنش، به آسانی با استفاده از عناصر زیاد امکان‌پذیر می‌شود و ترکیب میدان‌هایی با انواع مختلف توزیع‌های کرنش، با استفاده از عناصر مختلف برای ایده‌آل‌سازی میدانها عملی

می‌گردد. این خاصیت تعمیم‌پذیری روش عناصر محدود و شالوده مطلوب ریاضی آن موجب شده است که روش مذکور به طور گستره‌ای به عنوان یک ابزار تحلیل در فضای امروزی مهندسی مورد استفاده قرار گیرد.

۴.۳.۴ خواص جواب‌های عناصر محدود

یک مسأله ارتجاعی خطی عمومی و جواب عناصر محدود آن را در نظر می‌گیریم و خواص معینی را که برای فهم روش عناصر محدود مفید می‌باشند مشخص می‌کنیم. در این بحث از نمادگذاری خلاصه شده در جدول ۴.۵ استفاده خواهیم کرد.

جدول ۴.۵ نمادگذاری مورد استفاده در بحث خواص و همگرایی جوابهای عناصر محدود

نماد	معنی
$a(0, 0)$	فرم دو خطی مربوط به مسأله مورد نظر
f	بردار بار
u	جواب کامل تغییر مکان مدل ریاضی؛ یک عنصر از فضای V
v	تغییر مکان‌ها؛ یک عنصر از فضای V
u_h	جواب عناصر محدود؛ یک عنصر از فضای V_h
v_h	تغییر مکان‌های عناصر محدود؛ یک عنصر از فضای V_h
\forall	برای همه
\in	یک عنصر از
V, V_h	فضاهای توابع [ر.ک. به: (۴.۷۲) و (۴.۸۴)]
Vol	حجم جسم مورد نظر
L^2	فضای توابع قابل انتگرال‌گیری از توان دوم [ر.ک. به: (۴.۷۳)]
e_h	خطای بین جواب کامل و جواب تحلیل عناصر محدود و
\exists	وجود دارد یک
\subset	جای گرفته است در
\nsubseteq	جای گرفته است در ... ولی مساوی نیست با
$\ \cdot \ _{\varepsilon}$	نرم انرژی [رجوع به (۴.۷۴)]
\inf	بزرگترین کران پایین می‌گیریم
\sup	کوچکترین کران بالا می‌گیریم

مسئله ارتجاعی را می‌توان به صورت زیر نوشت (به عنوان مثال ر.ک. به: P. G. Ciarlet [A], G. Strang and G. F. Fix [A] یا F. Brezzi and Fortin [A]):

Find $u \in V$ such that

$$a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V$$

(۴.۷۱)

که در آن فضای V بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$V = \left\{ v \mid v \in L^2(\text{Vol}); \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\text{Vol}), i, j = 1, 2, 3; v_i|_{S_u} = 0, i = 1, 2, 3 \right\} \quad (۴.۷۲)$$

در اینجا $L^2(\text{Vol})$ فضای توابع قابل انتگرال‌گیری از توان دوم در حجم "Vol" از جسم مورد نظر می‌باشد که به صورت زیر بیان می‌گردد:

$$L^2(\text{Vol}) = \left\{ w \mid w \text{ is defined in Vol and } \int_{\text{Vol}} \left(\sum_{i=1}^3 (w_i)^2 \right) d\text{Vol} = \|w\|_{L^2(\text{Vol})}^2 < +\infty \right\} \quad (۴.۷۳)$$

بنابراین رابطه (۴.۷۲) فضایی از توابع را تعریف می‌کند که مربوط به یک تحلیل سه بعدی عمومی است. توابع موجود در این فضا در مرز S_u حذف می‌شوند و توان‌های توابع و اولین مشتقات آنها قابل انتگرال‌گیری هستند. متناظر با V ، نرم انرژی را به صورت زیر استفاده می‌کنیم:

$$\|v\|_E^2 = a(v, v) \quad (۴.۷۴)$$

نرم مذکور هنگامی که جسم تحت اثر میدان تغییر مکان v می‌باشد، متناظر با دو برابر انرژی کرنشی ذخیره شده در جسم است.

در بحث خود فرض می‌کنیم که سازه مورد نظر در (۴.۷۱) دارای تکیه‌گاه‌های مناسبی مطابق با شرایط تغییر مکان صفر در S_u می‌باشد، به گونه‌ای که $\|v\|_E^2$ به ازای هر v غیر صفر بزرگتر از صفر است.

همچنین، از نرم‌های Sobolev که از مرتبه $m = 0$ و $m = 1$ می‌باشند، استفاده می‌کنیم که

به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$m = 0$$

$$(\|\mathbf{v}\|_0)^2 = \int_{\text{Vol}} \left(\sum_{i=1}^3 (v_i)^2 \right) d\text{Vol} \quad (4.75)$$

$$m = 1$$

$$(\|\mathbf{v}\|_1)^2 = (\|\mathbf{v}\|_0)^2 + \int_{\text{Vol}} \left[\sum_{i=1, j=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 \right] d\text{Vol} \quad (4.76)$$

برای مسأله ارتجاعی مورد نظر، نرم از مرتبه ۱ مورد استفاده قرار می‌گیرد^(۱۱) و از اینرو فرم دو خطی a دارای دو خاصیت مهم زیر می‌باشد:

پیوستگی

$$\exists M > 0 \text{ such that } \forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V, \quad |a(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)| \leq M \|\mathbf{v}_1\|_1 \|\mathbf{v}_2\|_1 \quad (4.77)$$

حالت بیضوی

$$\exists \alpha > 0 \text{ such that } \forall \mathbf{v} \in V, \quad a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_1^2 \quad (4.78)$$

که در آن مقادیر ثابت α و M بستگی به مسأله واقعی ارتجاعی مورد نظر دارند که شامل مقادیر ثابت استفاده شده برای مصالح نیز می‌باشد؛ ولی مستقل از \mathbf{v} می‌باشند.

خاصیت پیوستگی تأمین می‌شود، زیرا نرم‌های معقولی در (۴.۷۷) مورد استفاده قرار می‌گیرند و خاصیت بیضوی بودن نیز به علت اینکه سازه مورد نظر دارای تکیه‌گاه‌های مناسبی می‌باشد (به عبارت دیگر سازه پایدار است)، تأمین می‌گردد (برای اثبات ریاضی مسأله ر.ک. به: (P. G. Ciarlet [A]).

براساس این خواص، داریم:

(۱۱) در بحث خود، از نامعادله Poincare-Friedrichs نیز استفاده می‌کنیم که در تحلیل مسائل مورد نظر به ازای هر \mathbf{v} داریم:

$$\int_{\text{Vol}} \left(\sum_{i=1}^3 (v_i)^2 \right) d\text{Vol} \leq c \int_{\text{Vol}} \left(\sum_{i,j=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 \right) d\text{Vol}$$

که در آن c یک مقدار ثابت است (به‌عنوان مثال ر.ک. به: (P. G. Ciarlet [A]).

$$c_1 \|v\|_1 \leq (a(v, v))^{1/2} \leq c_2 \|v\|_1 \quad (4.79)$$

که در آن c_1 و c_2 مقادیر ثابت مستقل از v می‌باشند و از اینرو نرم انرژی معادل با نرم ۱ است (ر.ک. به: بخش ۲.۷). در تحلیل ریاضی، نرم‌های Sobolev عموماً برای تعیین نرخ‌های همگرایی مورد استفاده قرار می‌گیرند (ر.ک. به: بخش ۴.۳.۵)، ولی در عمل، نرم انرژی اغلب به آسانی تعیین می‌گردد (ر.ک. به: (۴.۹۷)). بعلت وجود رابطه (۴.۷۹) می‌توان گفت که به جای استفاده از (۴.۶۴)، همگرایی را به صورت زیر نیز می‌توان تعریف کرد:

$$\|u - u_h\|_1 \rightarrow 0 \quad \text{as } h \rightarrow 0$$

و نرم انرژی در جواب‌های مسأله با مرتبه مشابه نرم ۱ همگرا خواهد شد. پیوستگی و بیضوی بودن یک فرم دوخطی a را در مثال زیر مورد ارزیابی قرار می‌دهیم.

مثال ۴.۲۴: مسأله ارائه شده در مثال ۴.۲۲ را در نظر بگیرید. نشان دهید که فرم دوخطی a شرایط پیوستگی و بیضوی بودن را تأمین می‌کند.
حل:

پیوستگی تأمین می‌شود زیرا^(۱۲):

$$\begin{aligned} a(w_1, w_2) &= \int_A T \left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \frac{\partial w_2}{\partial x} + \frac{\partial w_1}{\partial y} \frac{\partial w_2}{\partial y} \right) dx dy \\ &\leq \int_A T \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} \left[\left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2} dx dy \\ &\leq \left\{ \int_A T \left[\left(\frac{\partial w_1}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_1}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \right\}^{1/2} \\ &\quad \times \left\{ \int_A T \left[\left(\frac{\partial w_2}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_2}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \right\}^{1/2} \leq c \|w_1\|_1 \|w_2\|_1 \end{aligned}$$

بیضوی بودن ایجاب می‌کند که:

$$\begin{aligned} a(w, w) &= \int_A T \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\ &\geq \alpha \int_A \left[w^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy = \alpha \|w\|_1^2 \end{aligned} \quad (\text{الف})$$

(۱۲) در اینجا از نامعادله Schwarz استفاده می‌کنیم که بیان می‌کند که به ازای بردارهای a و b داریم:

$\|a \cdot b\|_2 \leq \|a\|_2 \|b\|_2$ که در آن $\| \cdot \|_2$ در (۲.۱۴۸) تعریف شده است.

با وجود این نامعادله Pioncare-Friedrichs

$$\int_A w^2 dx dy \leq c \int_A \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy$$

که در آن c یک مقدار ثابت است، تضمین می‌کند که (الف) ارضا می‌گردد.

آنچه در زمینه مسئله ارتجاعی گفته شد شامل یک نکته مهمی می‌باشد که بیشتر به آن اشاره کردیم: جواب کامل مسئله باید متناظر با یک انرژی کرنشی محدود باشد [ر.ک. به: (۴.۶۴) و (۴.۷۹)]. بنابراین، به عنوان مثال اکیداً سعی نمی‌کنیم که مسائل ارتجاعی عمومی دوبعدی یا سه بعدی را با ایده‌آل‌سازی ریاضی بارهای نقطه‌ای متمرکز حل کنیم (جواب حاصل از اعمال یک بار نقطه‌ای متمرکز در نصف فضا، متناظر با انرژی کرنشی نامتناهی است، به عنوان مثال ر.ک. به: [A] S. Timoshenko and J. N. Goodier). در عوض بارها را در مسئله ارتجاعی نزدیکتر به آنچه که واقعاً در طبیعت عمل می‌کنند نمایش می‌دهیم، به عنوان مثال به صورت بارهای گسترده هموار که می‌توانند دارای مقدار بسیار بزرگی باشند و در سطوح بسیار کوچک عمل می‌کنند. در این صورت حل فرمول‌بندی وردشی (۴.۷۱) مشابه حل فرمول‌بندی دیفرانسیلی است. البته در تحلیل عناصر محدود مادامی که عناصر محدود خیلی بزرگتر از سطح اعمال بار می‌باشند، می‌توان صرفاً برای افزایش کارایی روش حل، بار گسترده در روی یک سطح را با یک بار نقطه‌ای متمرکز معادل جایگزین نمود (ر.ک. به: بخش ۱.۲ و مثال شکل ۱.۴).

نکته مهم دیگر این است که جواب کامل مسئله ارتجاعی مورد نظر ما منحصر به فرد است. به عنوان مثال فرض کنید که u_1 و u_2 دو جواب مختلف می‌باشند، در این صورت خواهیم داشت:

$$a(u_1, v) = (f, v) \quad \forall v \in V \quad (4.80)$$

و

$$a(u_2, v) = (f, v) \quad \forall v \in V \quad (4.81)$$

از تفریق این دو رابطه، نتیجه زیر حاصل می‌گردد:

$$a(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \forall v \in V \quad (4.82)$$

و با فرض $v = u_1 - u_2$ ، داریم $a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0$. با استفاده از (۴.۷۹) و با داشتن $v = u_1 - u_2$ ، به دست می‌آوریم: $\|u_1 - u_2\|_1 = 0$ که بدین معنی است که $u_1 \equiv u_2$ و بنابراین ثابت کردیم که فرض وجود دو جواب مختلف غیر قابل قبول است.

حال فرض کنید که V_h فضای توابع تغییر مکان عناصر محدود است (که متناظر با درونیابی‌های تغییر مکان می‌باشند که در تمامی ماتریس‌های درونیابی تغییر مکان عنصری $H^{(m)}$ جای گرفته‌اند) و نیز فرض کنید که v_h هرگونه عنصری در آن فضا باشد (به عبارت دیگر هرگونه وضعیت تغییر مکان را که با استفاده از درونیابی‌های تغییر مکان می‌توان به دست آورد). فرض کنید u_h جواب تحلیل عناصر محدود باشد، بنابراین u_h نیز یک عنصر در V_h بوده و آن عنصر مشخصی است که دنبال آن هستیم. در این صورت جواب تحلیل عناصر محدود مسأله در (۴.۷۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

Find $u_h \in V_h$ such that

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

(۴.۸۳)

فضای V_h به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$V_h = \left\{ v_h \mid v_h \in L^2(\text{Vol}); \frac{\partial (v_h)_i}{\partial x_j} \in L^2(\text{Vol}), i, j = 1, 2, 3; (v_h)_i|_{S_u} = 0, i = 1, 2, 3 \right\} \quad (۴.۸۴)$$

و برای عناصر موجود در این فضا، از نرم انرژی (۴.۷۴) و نرم Sobolev (۴.۷۶) استفاده می‌نماییم. البته $V_h \subset V$.

رابطه (۴.۸۳) اصل کار مجازی برای گسسته‌سازی عناصر محدود متناظر با V_h است. با این فضای جواب، شرایط پیوستگی و بیضوی بودن (۴.۷۷) و (۴.۷۸) با استفاده از $v_h \in V_h$ تأمین می‌گردند و به ازای هر V_h یک ماتریس سختی مثبت معین به دست می‌آید.

باید یادآوری کنیم که V_h مربوط به یک شبکه معلوم است و در آن h ، اندازه عنصر عمومی را نشان می‌دهد و نیز باید دانست که در بحث همگرایی دنباله‌ای از فضاهای V_h را در نظر می‌گیریم (دنباله‌ای از شبکه‌ها با h کاهش یابنده). در شکل ۴.۱۱ عناصر V_h را برای گسسته‌سازی مربوط به مثال ۴.۶ نشان می‌دهیم.

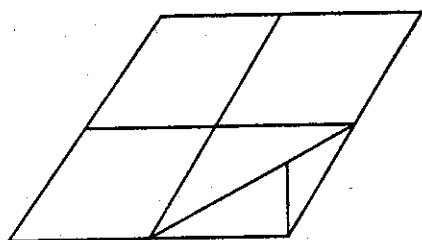
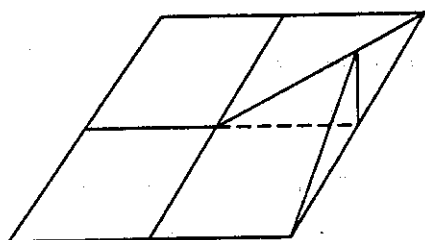
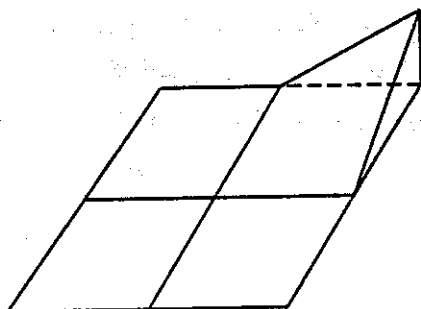
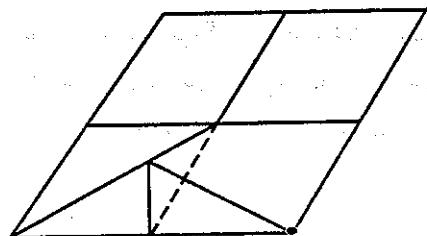
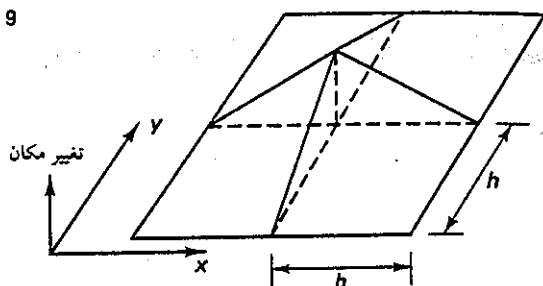
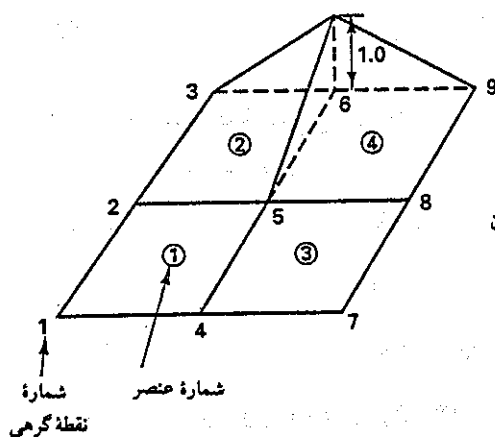
اگر جواب تحلیل عناصر محدود u_h و جواب کامل u مسأله را در نظر بگیریم، خواص مهم زیر را داریم:

خاصیت ۱. فرض کنید که خطای بین جواب کامل u و جواب تحلیل عناصر محدود u_h ، e_h باشد:

$$e_h = u - u_h$$

(۴.۸۵)

در این صورت نخستین خاصیت عبارت است از:



شکل ۴.۱۱ نمای هوایی توابع پایه برای فضای V_8 که در تحلیل صفحه طره‌ای مثال ۴.۶ مورد استفاده قرار گرفته‌اند. برای سهولت نمایش، توابع تغییر مکان به سمت بالا رسم شده‌اند، اما هر تابع نشان داده شده، برای تغییر مکان‌های " و قابل کاربرد می‌باشد. هر عنصر از V_8 ، ترکیب خطی دوازده تابع تغییر مکان است. توجه شود که توابع مذکور، متناظر با ماتریس‌های درون‌یابی تغییر مکان عنصری $K^{(m)}$ می‌باشند که در مثال ۴.۶ مورد بحث قرار گرفتند و نیز تغییر مکان‌های گره‌های ۱ و ۲ و ۳ صفر می‌باشند.

$$a(e_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h \quad (4.86)$$

اثبات خاصیت فوق به این صورت حاصل می‌شود که ملاحظه کنیم که اصل کار مجازی نتیجه زیر را به دست می‌دهد:

$$a(u, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (4.87)$$

و

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (4.88)$$

بنابراین از تفریق دو رابطه فوق، (۴.۸۶) به دست می‌آید. ممکن است گفته شود که خطا "متعامد" در (\cdot, \cdot) بر هر v_h در V_h می‌باشد. روشن است به میزانی که فضای V_h افزایش پیدا می‌کند، از آنجا که فضای بزرگتر همواره شامل فضای کوچکتر نیز است، دقت جواب به طور پیوسته افزایش می‌یابد. دو خاصیت بعدی بر مبنای خاصیت نخست می‌باشند.

خاصیت ۲. خاصیت دوم عبارت است از:

$$a(u_h, u_h) \leq a(u, u) \quad (4.89)$$

این خاصیت با در نظر گرفتن روابط زیر اثبات می‌شود:

$$\begin{aligned} a(u, u) &= a(u_h + e_h, u_h + e_h) \\ &= a(u_h, u_h) + 2a(u_h, e_h) + a(e_h, e_h) \\ &= a(u_h, u_h) + a(e_h, e_h) \end{aligned} \quad (4.90)$$

که در آن از رابطه (۴.۸۶) با $v_h = u_h$ استفاده نموده‌ایم. چون به ازای هر $e_h \neq 0$ ، $a(e_h, e_h) > 0$ است، از اینرو رابطه (۴.۸۹) نتیجه می‌شود (زیرا برای یک سازه با تکیه گاههای مناسب به ازای هر v غیر صفر، $\|v\|_E > 0$ است).

بنابراین، انرژی کرنشی مربوط به جواب تحلیل عناصر محدود همیشه کوچکتر یا مساوی انرژی کرنشی مربوط به جواب کامل مسئله می‌باشد.

خاصیت ۳. خاصیت سوم عبارت است از:

$$a(e_h, e_h) \leq a(u - v_h, u - v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (4.91)$$

برای اثبات خاصیت مذکور، برای هر w_h در V_h داریم:

$$a(e_h + w_h, e_h + w_h) = a(e_h, e_h) + a(w_h, w_h) \quad (۴.۹۲)$$

بنابراین داریم:

$$a(e_h, e_h) \leq a(e_h + w_h, e_h + w_h) \quad (۴.۹۳)$$

با انتخاب $w_h = u_h - v_h$ رابطه (۴.۹۱) حاصل می‌شود.

خاصیت سوم بیان می‌کند که جواب تحلیل عناصر محدود u_h برای تمام وضعیت‌های ممکن تغییر مکان v_h در V_h به گونه‌ای انتخاب می‌شود که انرژی کرنشی مربوط به $u - u_h$ مینیمم گردد. بنابراین، «فاصله انرژی» بین u و عناصر موجود در V_h به وسیله جواب u_h در V_h مینیمم‌سازی می‌شود.

با استفاده از (۴.۹۱) و پیوستگی و بیضوی بودن فرم دوخطی، روابط زیر نیز حاصل می‌گردند:

$$\begin{aligned} \alpha \|u - u_h\|^2 &\leq a(u - u_h, u - u_h) \\ &= \inf_{v_h \in V_h} a(u - v_h, u - v_h) \\ &\leq M \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_1 \|u - v_h\|_1 \end{aligned} \quad (۴.۹۴)$$

که در آن "inf" نشانگر بزرگترین کرانه پایینی می‌باشد (ر.ک. به: جدول ۴.۵). اگر فرض کنیم که $d(u, V_h) = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_1$ ، در این صورت وجود خاصیت زیر را نیز قبول می‌کنیم:

$\|u - u_h\|_1 \leq c d(u, V_h)$

(۴.۹۵)

که در آن c یک مقدار ثابت به صورت $c = \sqrt{M/\alpha}$ است که مستقل از h بوده ولی وابسته به خواص مصالح می‌باشد.^(۱۳) به این نتیجه، لم Cea اطلاق می‌شود (به عنوان مثال ر.ک. به: P. G. Ciarlet [A]).

سه خاصیت مزبور زمینه ارزشمندی را برای فهم دو نکته اساسی فراهم می‌کند: اولاً اینکه چگونه جواب تحلیل عناصر محدود از وضعیت‌های ممکن تغییر مکان در یک شبکه

(۱۳) از ملاحظه خاصیت (۴.۹۵) و شرط (۴.۱۵۶) که بعداً مورد بحث قرار خواهند گرفت به یک نکته ظریفی پی می‌بریم، در حالی که (۴.۹۵) به ازای هر مقداری از ضریب تغییر حجمی و ضریب برشی معتبر می‌باشد؛ با وجود این به میزانی که ضریب تغییر حجمی افزایش پیدا می‌کند، ثابت c خیلی بزرگ شده و در نتیجه، خاصیت (۴.۹۵) دیگر قابل استفاده نمی‌باشد. از اینرو هنگامی که ضریب تغییر حجمی K خیلی بزرگ است، وجود خاصیت جدید (۴.۱۵۶) ضروری است که در آن ثابت مستقل از c می‌باشد و این منجر به شرط $\inf\text{-sup}$ می‌گردد.

عناصر محدود مورد نظر، انتخاب می‌شود، ثانیاً موقعی که شبکه ریزتر می‌شود چه انتظاری می‌توان در مورد جوابها داشت.

خصوصاً یادآوری می‌کنیم که رابطه (۴.۹۵) که براساس خاصیت سوم ایجاد شده است، بیان می‌کند که شرط کافی برای همگرایی جواب با داشتن دنباله فضاهای عناصر محدود این است که به ازای هر $u \in V$ داشته باشیم: $\lim_{h \rightarrow 0} \inf \|u - v_h\|_1 = 0$. همچنین رابطه (۴.۹۵) را می‌توان برای تعیین نرخ همگرایی، موقعی که شبکه ریزتر می‌شود، به کار برد؛ بدین ترتیب که یک کران بالایی را می‌توان اعمال کرد تا چگونگی تغییر $d(u, V_h)$ را با نظریه شبکه نشان دهد (ر.ک. به: بخش ۴.۳.۵).

همچنین خواص ۲ و ۳ بیان می‌کنند که در جواب تحلیل عناصر محدود که در درون وضعیت‌های ممکن تغییر مکان یک شبکه معلوم قرار دارد، خطا در انرژی کرنشی مینیمم‌سازی می‌شود و نیز به میزانی که از شبکه‌های ریزتری استفاده می‌شود (با این شرط که وضعیت‌های تغییر مکان شبکه‌های ریزتر شامل وضعیت‌های تغییر مکان شبکه‌های درشت‌تر پیشین باشند)، انرژی کرنشی مربوط به جواب تحلیل عناصر محدود به انرژی کرنشی کامل میل خواهد کرد. همچنین می‌توان این مطالب را به نکات پیشین در خصوص تعیین جواب تحلیل عناصر محدود با استفاده از شرط مانا بودن پتانسیل کلی ارتباط داد (ر.ک. به: بخش ۴.۳.۲). به عبارت دیگر، برای یک شبکه معلوم و هرگونه تغییر مکان‌های U_{any} ، داریم:

$$\Pi|_{U_{any}} = \frac{1}{2} U_{any}^T K U_{any} - U_{any}^T R \quad (4.96)$$

جواب تحلیل عناصر محدود با استفاده از شرط مانا بودن Π به دست می‌آید:

$$KU = R$$

به ازای جواب تغییر مکان عناصر محدود U ، پتانسیل کلی Π و انرژی کرنشی عبارتند از:

$$\Pi = -\frac{1}{2} U^T R; \quad \mathcal{U} = \frac{1}{2} U^T R \quad (4.97)$$

بنابراین، برای تعیین انرژی کرنشی مربوط به جواب تحلیل عناصر محدود، تنها انجام یک حاصل ضرب برداری مورد نیاز است.

با استفاده از نمادگذاری استفاده شده، می‌خواهیم نشان دهیم که در تغییر مکان‌های ممکن حاصل از تحلیل عناصر محدود (به عبارت دیگر در فضای V_h)، پتانسیل کلی Π به ازای

جواب تحلیل عناصر محدود U مینیمم‌سازی می‌شود. برای این کار Π را در $U + \epsilon$ محاسبه می‌کنیم که در آن ϵ یک بردار دلخواه است:

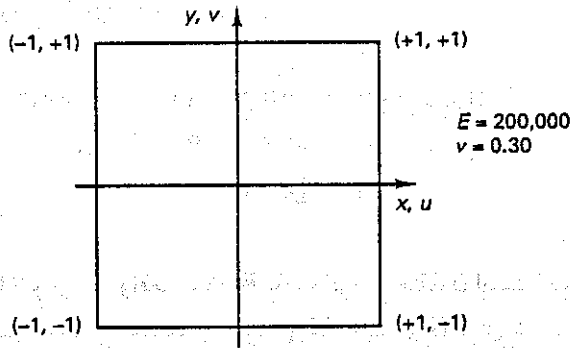
$$\begin{aligned}\Pi|_{U+\epsilon} &= \frac{1}{2}(U + \epsilon)^T K (U + \epsilon) - (U + \epsilon)^T R \\ &= \Pi|_U + \epsilon^T (KU - R) + \frac{1}{2} \epsilon^T K \epsilon \\ &= \Pi|_U + \frac{1}{2} \epsilon^T K \epsilon\end{aligned}\quad (4.98)$$

که در آن از رابطه $KU = R$ و از این واقعیت که K یک ماتریس متقارن است استفاده کرده‌ایم. با وجود این از آنجا که K مثبت معین است، از اینرو $\Pi|_U$ ، مینیمم Π برای شبکه عناصر محدود معلوم می‌باشد. به میزانی که شبکه ریزتر می‌شود Π کاهش یافته و در نتیجه مطابق با $94(4.97)$ نیز افزایش خواهد یافت.

اگر معادلات (4.89) ، (4.91) و (4.97) را در نظر بگیریم، مشاهده می‌کنیم که در تحلیل عناصر محدود، تغییر مکانها (در «کل») کمتر از حد واقعی تخمین زده می‌شوند و بنابراین سختی مدل ریاضی نیز (در کل) بیش از حد واقعی ارزیابی می‌گردد. این تخمین بیش از حد واقعی سختی (به طور فیزیکی) ناشی از «قیدهای تغییر مکانی داخلی» می‌باشد که آنها نیز به علت فرض‌های تغییر مکان، به طور ضمنی بر جواب تحلیل اعمال می‌گردند. به میزانی که گسسته‌سازی عناصر محدود ریزتر می‌گردد «قیدهای تغییر مکانی داخلی» کاهش پیدا می‌کنند و همگرایی به جواب کامل (و سختی) مدل ریاضی حاصل می‌شود.

برای نشان دادن موضوع پیشین با مثال، شکل ۴.۱۲ را در نظر می‌گیریم که نتایج به دست آمده در تحلیل یک مسأله آزمایشی خاص برای گسسته‌سازی عناصر محدود دویعدی را نشان می‌دهد. مسأله به گونه‌ای ایجاد شده که هیچ‌گونه حالت تکیه‌ناپذیری نداشته باشد. همان‌طور که در بخش بعدی بحث خواهیم کرد، در این حالت مرتبه کامل (ماکزیمم) همگرایی با استفاده از یک عنصر محدود مشخص در دنباله‌ای از شبکه‌های عناصر محدود یکنواخت به دست می‌آید (در هر شبکه تمامی عناصر به صورت مربعی با اندازه مساوی می‌باشند).

شکل ۴.۱۲ نشان می‌دهد هنگامی که دنباله‌ای از شبکه‌های یکنواخت عناصر ۹ گرهی در حل مورد استفاده قرار می‌گیرد، همگرایی در انرژی کرنشی حاصل می‌شود. در ابتدا شبکه‌ای 2×2 از عناصر مربعی با طول واحد (که در آن $h = 1$ می‌باشد)، سپس هر عنصر را به ۴ عنصر مربعی تقسیم می‌کنیم (که در آن $h = 1/2$) تا شبکه دوم حاصل می‌شود و این فرایند را به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. به روشنی مشاهده می‌کنیم که خطا در انرژی کرنشی با کاهش اندازه عناصر h ، همان‌گونه که طبق (4.91) انتظار می‌رود، کاهش پیدا می‌کند. در بخش آینده، مرتبه همگرایی مشاهده شده در محاسبات عناصر محدود را با مقدار به دست آمده تئوریک مقایسه خواهیم نمود.



الف) میدان مربعی مورد نظر $N, N = 2, 4, 8, \dots$ عنصر در هر ضلع

ب) تغییر مکان‌های کامل درون صفحه‌ای

$$u = c_1 (1 - x^2) (1 - y^2) e^{ky} \cos kx$$

$$v = c_1 (1 - x^2) (1 - y^2) e^{ky} \sin kx$$

$$c_1 = \text{constant}; k = 5$$

پیدا کنید جواب تحلیل عناصر محدود را برای بارهای جسمی f_x^B و f_y^B که به صورت زیر می‌باشند:

$$f_x^B = - \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right)$$

$$f_y^B = - \left(\frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right)$$

و τ_{xx} و τ_{yy} و τ_{xy} تنش‌های متناظر با تغییر مکان‌های درون صفحه‌ای داده شده در (ب)

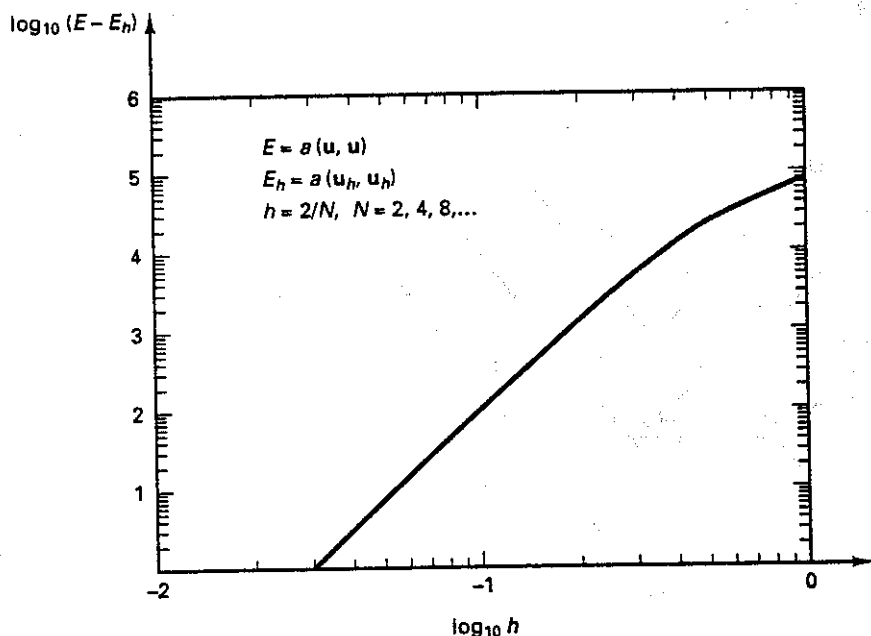
پ) مسئله آزمایشی

شکل ۴.۱۲ یک مسئله آزمایشی خاص برای عناصر تنش مسطح (یا کرنش مسطح، متقارن محوری). به ازای h کوچک، از رابطه $E-E_h = c h^\alpha$ استفاده می‌کنیم و از اینرو داریم: $\log(E-E_h) = \log c + \alpha \log h$ (همچنین ر.ک. به: (۴.۱.۱). از حل عددی مسئله، جواب $\alpha = ۳.۹۱$ به دست می‌آید.

۴.۳.۵ نرخ همگرایی

در مباحث پیشین شرایط مورد نیاز برای همگرایی نتایج تحلیل عناصر محدود را ملاحظه نمودیم و در حالت کلی بحث کردیم که چگونه همگرایی حاصل می‌شود ولی اشاره‌ای به نرخ همگرایی در آن همگرایی رخ می‌دهد ننمودیم.

همانگونه که باید انتظار داشته باشیم، نرخ همگرایی بستگی به مرتبه چندجمله‌ای‌های مورد استفاده در فرض‌های تغییر مکان دارد. در این زمینه، مفهوم چندجمله‌ای کامل مفید می‌باشد.

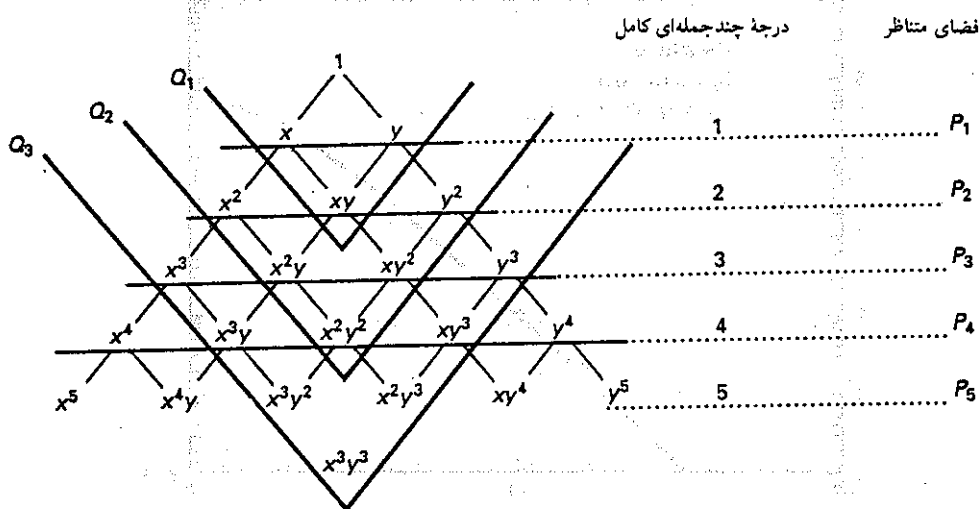


(ت) جواب سئوال تنش مسطح

شکل ۴.۱۲ (ادامه)

شکل ۴.۱۳ عبارات چندجمله‌ای را نشان می‌دهد که برای کامل شدن چندجمله‌ای‌های برحسب x و y در یک تحلیل دوبعدی مورد نیاز می‌باشند. مشاهده می‌شود که تمامی عبارات ممکن یا فرم $x^\alpha y^\beta$ موجود می‌باشند که در آن $\alpha + \beta = k$ و k درجه‌ای را نشان می‌دهد که در آن چندجمله‌ای کامل می‌باشد. به عنوان مثال یادآوری می‌کنیم که عنصر بررسی شده در مثال ۴.۶ از یک تغییر مکان چندجمله‌ای استفاده می‌کند که تنها در درجه ۱ کامل می‌باشد. همچنین شکل ۴.۱۳ نمادگذاری مهمی را برای فضا‌های چندجمله‌ای نشان می‌دهد. فضا‌های P_k متناظر با چندجمله‌ای‌های کامل تا درجه k می‌باشند. آنها را می‌توان به عنوان توابع پایه عناصر مثلثی نیز تلقی نمود: توابع P_1 متناظر با توابع تغییر مکان خطی (کرنش ثابت) مثلث می‌باشند (ر.ک. به: مثال ۴.۱۷)، توابع P_2 متناظر با توابع تغییر مکان سهموی (کرنش خطی) مثلث می‌باشند (ر.ک. به: بخش ۵.۳.۲) و غیره.

همچنین شکل ۴.۱۳ فضاهای چندجمله‌ای Q_k و $k = 1, 2, 3$ را نشان می‌دهد که مربوط به عناصر ۴ گرهی، ۹ گرهی و ۱۶ گرهی می‌باشند و به آنها عناصر لاگرانژی اطلاق می‌شود زیرا توابع تغییر مکان این عناصر توابع لاگرانژی می‌باشند (همچنین ر.ک. به: (۵.۵.۱)). برای یک تحلیل سه بعدی نیز مشخص است که می‌توان شکلی مشابه شکل ۴.۱۳ را کشید که در آن متغیر Z نیز وارد می‌شود.



شکل ۴.۱۳ عبارات چندجمله‌ای در تحلیل دوبعدی، مثلث Pascal

حال دنباله‌ای از شبکه‌های یکنواخت را که حجم کامل جسم مورد نظر را ایده‌آل‌سازی می‌کنند در نظر می‌گیریم. یک شبکه از یک دنباله شبکه‌های یکنواخت شامل عناصری با اندازه مساوی می‌باشد، به عبارت دیگر عناصر مربعی که از فضاهای چندجمله‌ای Q_k در آنها استفاده می‌شود. بنابراین پارامتر h را می‌توان به عنوان طول نمونه یک ضلع عنصر در نظر گرفت. دنباله به این صورت حاصل می‌شود که نخست یک شبکه در نظر گرفته می‌شود و سپس هر عنصر به صورتی مناسب تقسیم می‌شود تا شبکه بعدی حاصل گردد. بدین ترتیب فرایند تقسیم شبکه‌ها تکرار می‌شود. در حل مسئله آزمایشی خاص در شکل ۴.۱۲ بدین طریق عمل کردیم. اگر تحلیل یک، مسئله دیگری را نظیر مسئله ارائه شده در مثال ۴.۶ را در نظر بگیریم، هر عنصر چهار گرهی شکل ۴.۱۱ را به چهار عنصر مساوی چهار گرهی تقسیم می‌کنیم تا نخستین شبکه تعریف شده به دست می‌آید، سپس هر عنصر نخستین شبکه تعریف شده را به چهار عنصر مساوی چهار گرهی تقسیم می‌کنیم تا دومین شبکه تعریف شده حاصل شود و به همین ترتیب این فرایند را تکرار می‌کنیم. ادامه فرایند تقسیم عناصر منجر به ایجاد دنباله کامل شبکه‌ها می‌گردد.

برای یافتن رابطه‌ای برای نرخ همگرایی، به طور ایده‌آل از فرمولی استفاده می‌کنیم که $d(u, V_h)$ در (۴.۹۵) را به عنوان تابعی از h نتیجه می‌دهد. ولی، دستیابی به چنین فرمولی دشوار است و مناسب خواهد بود که از نظریه درونیابی استفاده شود و با یک کران بالایی در $d(u, V_h)$ کار شود.

فرض کنید که از عناصری با چندجمله‌ای‌های کامل از درجه k استفاده نموده‌ایم و اینکه جواب کامل u برای مسأله ارتجاعی مورد نظر ما «هموار» می‌باشد، بدین ترتیب که جواب مذکور در رابطه زیر صدق کند^(۱۴):

$$\|u\|_{k+1} = \left\{ \int_{Vol} \left[\sum_{i=1}^3 (u_i)^2 + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right)^2 + \sum_{n=2}^{k+1} \sum_{i=1}^3 \sum_{r+s+i=n} \left(\frac{\partial^n u_i}{\partial x_1^r \partial x_2^s \partial x_3^i} \right)^2 \right] dVol \right\}^{1/2} < \infty \quad (4.99)$$

مشخص است که در آن $k \geq 1$ می‌باشد.

بنابراین فرض می‌کنیم که تمامی مشتقات جواب کامل تا مرتبه $(k+1)$ در رابطه (۴.۹۹) را می‌توان محاسبه کرد.

نتیجه اساسی نظریه درونیابی این است که یک تابع درونیابی $u_I \in V_h$ وجود دارد، بگونه‌ای که:

$$\|u - u_I\|_1 \leq c h^k \|u\|_{k+1} \quad (4.100)$$

که در آن h پارامتر اندازه شبکه می‌باشد که «اندازه» عناصر را نشان می‌دهد و c یک مقدار ثابت مستقل از h است. به طور نمونه، h طول ضلع یک عنصر نمونه یا قطر یک دایره‌ای که محاط بر آن عنصر می‌باشد، در نظر گرفته می‌شود. توجه شود که u_I جواب تحلیل عناصر محدود در V_h نمی‌باشد بلکه صرفاً عضوی از V_h است که در گره‌های عناصر محدود دارای مقدار مجهول جواب کامل u است، و از اینرو به طور هندسی متناظر با تابعی نزدیک به u می‌باشد.

با استفاده از رابطه (۴.۱۰۰) و خاصیت ۳ که در بخش ۴.۳.۴ مورد بحث واقع شد [ر.ک. به: (۴.۹۱)] می‌توان نشان داد که نرخ همگرایی جواب تحلیل عناصر محدود u_h به جواب کامل مسأله ارتجاعی u با استفاده از تخمین خطای زیر به دست می‌آید:

$\|u - u_h\|_1 \leq c h^k \|u\|_{k+1}$

(4.101)

که در آن c یک مقدار ثابت مستقل از h بوده ولی وابسته به خواص مصالح می‌باشد. به عنوان مثال، با استفاده از روابط (۴.۹۵) و (۴.۱۰۰) داریم:

$$\begin{aligned}\|u - u_h\|_1 &\leq c d(u, V_h) \\ &\leq c \|u - u_l\| \\ &\leq c c h^k \|u\|_{k+1}\end{aligned}\quad (۴.۱۰۱ \text{ الف})$$

که رابطه (۴.۱۰۱) را با یک مقدار ثابت جدید c به دست می‌دهد. برای (۴.۱۰۱) می‌گوییم که نرخ همگرایی به وسیله عبارت کامل سمت راست به دست می‌آید و مرتبه همگرایی مساوی k است و یا بطور معادل می‌گوییم که همگرایی $O(h^k)$ را داریم. طریقه دیگر برای نگرش در استخراج (۴.۱۰۱) که البته ارتباط نزدیکی نیز با بحث پیشین دارد، استفاده از روابط (۴.۷۹) و (۴.۹۱) است. در این صورت داریم:

$$\begin{aligned}\|u - u_h\|_1 &\leq \frac{1}{c_1} [a(u - u_h, u - u_h)]^{1/2} \\ &\leq \frac{1}{c_1} [a(u - u_l, u - u_l)]^{1/2} \\ &\leq \frac{c_2}{c_1} \|u - u_l\|_1 \\ &\leq c h^k \|u\|_{k+1}\end{aligned}\quad (۴.۱۰۱ \text{ ب})$$

بنابراین مستقیماً مشاهده می‌کنیم که برای به دست آوردن نرخ همگرایی، ما در واقعیت صرفاً فاصله $d(u, V_h)$ را برحسب یک کرانه بالایی داده شده به وسیله (۴.۱۰۰) بیان نمودیم. در عمل اغلب رابطه (۴.۱۰۱) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\|u - u_h\|_1 \leq c h^k \quad (۴.۱۰۲)$$

و قبول می‌کنیم که مقدار ثابت c مورد استفاده در این رابطه مستقل از h بوده ولی بستگی به جواب و خواص مصالح دارد [زیرا c در (الف ۴.۱۰۱) و c_1 و c_2 در (ب ۴.۱۰۱) بستگی به خواص مصالح دارند]. هنگامی که شرایط مصالح غیرقابل تراکم را در نظر می‌گیریم، بستگی داشتن مقدار c به خواص مصالح اشکال دارد، زیرا در این صورت مقدار ثابت، بسیار بزرگ خواهد بود و درجه همگرایی k فقط در مقادیر خیلی کوچک (غیرعملی) h دقت مطلوبی را نتیجه خواهد داد. به همین علت در آن حالت، خاصیت (۴.۹۵) با مقدار ثابت مستقل از خواص

مصالص مورد نیاز خواهد بود و لزوم وجود چنین وضعیتی منجر به شرط (۴.۱۵۶) می‌شود (ر.ک. به: بخش ۴.۵).

مقدار ثابت c همچنین بستگی به نوع عنصر به کار رفته دارد. از آنجا که فرض کرده‌ایم که عنصر براساس یک چندجمله‌ای کامل از مرتبه k می‌باشد، از اینرو انواع مختلفی از عناصر در آن رده عموماً برای تحلیل مسئله یکسانی، مقدار مختلفی از ثابت c را به نمایش خواهند گذاشت (به عنوان مثال عناصر مثلثی و چهارضلعی). بنابراین مقدار واقعی خطا ممکن است که برای یک h معلوم به وجهی بارز متفاوت باشد، در حالی که درجه‌ای که با آن، کاهش خطا با تقریف شبکه انجام می‌پذیرد یکسان است. روشن است که مقدار ثابت c در تحلیل عملی می‌تواند بسیار مهم باشد، زیرا بطور قابل ملاحظه‌ای تعیین می‌کند که عملاً به چه میزانی باید h کوچک باشد تا اینکه خطای قابل قبولی در تحلیل حاصل شود.

استخراج روابط فوق نمایشگر نتایج تثوریک می‌باشد و ممکن است این سؤال مطرح شود که تا چه میزانی در عمل نتایج مذکور قابل کاربرد می‌باشند. تجربه نشان می‌دهد که در حقیقت نتایج تثوریک با تقریب نزدیکی رفتار واقعی همگرایی گسسته‌سازی عناصر محدود مورد نظر را نشان می‌دهند. در حقیقت برای تعیین درجه همگرایی، صرفاً ممکن است که علامت مساوی در (۴.۱.۲) را در نظر بگیریم تا رابطه زیر به دست آید:

$$\log (\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_i) = \log c + k \log h \quad (4.1.3)$$

در این صورت اگر با استفاده از نتایج محاسبه شده، نمودار $\log (\| \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \|_i)$ در مقابل $\log h$ را رسم کنیم، درمی‌یابیم که منحنی حاصله موقعی که h به اندازه کافی کوچک است، دارای شیب تقریبی k می‌باشد.

تعیین نرم Sobolev نیازمند کوشش زیادی می‌باشد و در عمل از هم‌ارزی نرم انرژی با نرم ۱ استفاده می‌شود. به عنوان مثال، به علت رابطه (۴.۷۹) مشاهده می‌کنیم که نرم انرژی در سمت چپ رابطه (۴.۱۰۱) صدق می‌کند و نرم مذکور را می‌توان اغلب به آسانی تعیین نمود (ر.ک. به: (۴.۹۷)). شکل ۴.۱۲ بیانگر کاربردی از اینگونه می‌باشد. توجه شود که خطا در انرژی کرنشی را می‌توان به آسانی از طریق تفریق انرژی کرنشی کنونی از انرژی کرنشی جواب حدی (یا جواب کامل در صورتی که مشخص باشد بدست آورد) (ر.ک. به: (۴.۹۰)). در حل ارائه شده در شکل ۴.۱۲ مرتبه همگرایی (نتایج عددی) را مساوی ۳.۹۱ پیدا کردیم که در مقایسه با مقدار تثوریک که مساوی ۴ است نتیجه مطلوبی به نظر می‌رسد (در اینجا $k = 2$ و انرژی کرنشی مساوی نرم انرژی به توان ۲ می‌باشد). نتایج دیگری از همگرایی برای این مسئله آزمایشی خاص در شکل ۵.۳۹ داده شده‌اند (که در آن عناصر دارای اعوجاج با ماتریس‌های سختی که به طور عددی انتگرال‌گیری شده‌اند، در نظر گرفته می‌شوند).

رابطه (۴.۱۰۱) در اساس یک تخمین خطا برای گرادیان تغییر مکان را به دست می‌دهد، از اینرو به علت نقش اولیه آن در نرم ۱، رابطه مذکور به ازای تنش‌ها و کرنش‌ها بیانگر خطا در مشتقات تغییر مکان خواهد بود. در ابتدا از روابط (۴.۱۰۱) و (۴.۱۰۲) استفاده خواهیم کرد، ولی یادآوری می‌کنیم که خطا در تغییر مکان با استفاده از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$\|u - u_h\|_0 \leq c h^{k+1} \|u\|_{k+1} \quad (4.104)$$

بنابراین، مرتبه همگرایی برای تغییر مکان‌ها یک مرتبه بالاتر از مرتبه همگرایی برای کرنش‌ها می‌باشد.

نتایج مذکور طبیعتاً معقول به نظر می‌رسند. به عنوان مثال، فرض کنید که می‌خواهیم از تحلیل سری Taylor استفاده کنیم. در این صورت، از آنجا که یک عنصر محدود دارای «بعد h » با بسط کامل تغییر مکان از مرتبه k را می‌توان با تغییرات تغییر مکان تا آن رتبه بطور کامل نمایش داد، لذا خطای محلی در نمایش تغییر مکان‌های داخلی با یک شبکه یک‌نواخت باید $o(h^{k+1})$ باشد. همچنین برای یک مسأله C^{m-1} ، تنش‌ها از طریق m بار مشتق‌گیری از تغییر مکان محاسبه می‌شوند و از اینرو خطا در تنش‌ها، $o(h^{k+1-m})$ است. برای مسأله نظریه ارتجاعی مورد نظر، $m = 2$ است و لذا روابط (۴.۱۰۱) و (۴.۱۰۴) بدان گونه‌اند که انتظار داشتیم.

مثال ۴.۲۵: مسأله نشان داده شده در شکل ۴.۲۵ را در نظر بگیرید. اگر در تحلیل مسأله از عناصر محدودی دو گرهی خطی استفاده شود، خطای جواب تحلیل عناصر محدود را تخمین بزنید.

حل:

مسأله عناصر محدود در این حالت محاسبه $u_h \in V_h$ است بگونه‌ای که:

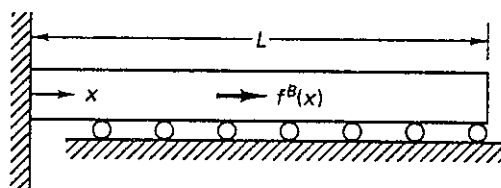
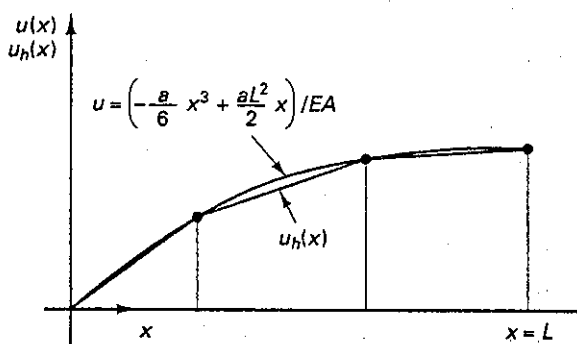
$$(EA u'_h, v_h) = (f^B, v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

$$V_h = \left\{ v_h \mid v_h \in L^2(\text{Vol}), \frac{\partial v_h}{\partial x} \in L^2(\text{Vol}), v_h|_{x=0} = 0 \right\} \quad \text{با}$$

برای تخمین خطا، از رابطه (۴.۹۱) استفاده می‌کنیم و برای این مسأله ساده مستقیماً می‌توان گفت که:

$$\int_0^L (u' - u'_h)^2 dx \leq \int_0^L (u' - u'_j)^2 dx \quad (\text{الف})$$

که در آن u جواب کامل و u_h جواب تحلیل عناصر محدود می‌باشند و u_j درون‌یاب می‌باشد بدین معنی که در نقاط گرهی، u_j مساوی با u در نظر گرفته می‌شود. بنابراین، هدف ما تعیین یک کرانه بالایی در $\int_0^L (u' - u'_j)^2 dx$ است.

سطح مقطع ثابت A مدول یانگ E (الف) میله تحت اثر بار در واحد طول $f^B(x) = ax$ 

(ب) جواب‌ها (برای حل عناصر محدود، از سه عنصر استفاده می‌شود)

شکل ۴.۲۵ تحلیل میله

یک عنصر دلخواه با نقاط انتهایی x_i و x_{i+1} در شبکه را در نظر بگیرید. در این صورت می‌توان گفت که برای جواب کامل $u(x)$ و $x_i \leq x \leq x_{i+1}$ داریم:

$$u'(x) = u'|_{x_c} + (x - x_c)u''|_{x=c}$$

که در آن $x = x_c$ یک نقطه انتخابی در عنصر را نشان می‌دهد و \bar{x} نیز یک نقطه در روی عنصر است. یک x_c را انتخاب می‌کنیم با این شرط که $u'|_{x_c} = u'_i$ که همواره قابل انجام است زیرا:

$$u_i(x_i) = u(x_i), u_i(x_{i+1}) = u(x_{i+1})$$

در این صورت برای عنصر مذکور داریم:

$$|u'(x) - u'_i| \leq h \left(\max_{0 \leq x \leq L} |u''| \right) \quad (\text{ب})$$

که در آن بزرگترین قدر مطلق دومین مشتق جواب کامل را در تحلیل وارد نموده‌ایم تا اینکه یک کران بالایی را پیدا کنیم.
با استفاده از (ب) داریم:

$$\int_0^L (u' - u_i')^2 dx \leq Lh^2 \left(\max_{0 \leq x \leq L} |u''| \right)^2$$

و بنابراین

$$\left(\int_0^L (u' - u_i')^2 dx \right)^{1/2} \leq ch \quad (\text{پ})$$

که در آن ثابت c بستگی به A و E و L و f^B داشته ولی مستقل از h است.
ملاحظه می‌کنیم که تحلیل مذکور کاملاً حالت عمومی دارد، ولی فرض می‌کنیم که جواب کامل هموار می‌باشد، بگونه‌ای که دومین مشتق آن را می‌توان محاسبه کرد (در این مثال با استفاده از f^B/EA به دست می‌آید). مشخص است که نتیجه ارائه شده در (پ) صرفاً تخمین خطای (۴.۱.۲) می‌باشد.

نتیجه جالب دیگر این است که تغییر مکان‌های نقاط گرهی به دست آمده از تحلیل عناصر محدود، بنابه دو علت تغییر مکان‌های کامل می‌باشند. اولاً جواب کامل در گره‌ها که ناشی از بارگذاری گسترده می‌باشد مساوی نتایج حاصله از بارگذاری معادل متمرکز می‌باشد (بارگذاری «معادل» با استفاده از اصل کار مجازی محاسبه شده). ثانیاً فضای توابع عناصر محدود V_h شامل جواب کامل ناشی از بارگذاری معادل متمرکز می‌باشد. البته این نتیجه مطلوب، خاصیت ویژه جواب مسائل یک بعدی بوده و در تحلیل عمومی دوبعدی و سه بعدی وجود ندارد.

در مطالعه همگرایی که در بالا ملاحظه شد، فرض می‌شود که گسسته‌سازی‌های یکنواخت مورد استفاده قرار می‌گیرند (که به عنوان مثال، در تحلیل دوبعدی، عناصر مورد استفاده مربعی بوده و دارای اندازه‌های یکسان می‌باشند) و نیز جواب کامل، هموار در نظر گرفته می‌شود. همچنین، درجه بسط‌های چندجمله‌ای برای تغییر مکان عناصر بطور ضمنی تغییر نمی‌یابند. در عمل، شرایط مذکور عموماً رخ نمی‌دهند و ضروری است که این سؤال مطرح شود که چه پیامدهایی ممکن است پیش آیند.

اگر جواب هموار نباشد، به عنوان مثال، به علت تغییرات ناگهانی در هندسه، در بارها و یا خواص مصالح و یا ضخامت عنصر - و تقسیم شبکه به طور یکنواخت انجام گیرد، مرتبه همگرایی کاهش پیدا می‌کند. بنابراین نمای h در (۴.۱.۲)، k نیست بلکه یک مقدار کوچکتری وابسته به درجه «فقدان همواری» می‌باشد.

البته در عمل در چنین تحلیل‌هایی از شبکه‌های مدرج استفاده می‌شود، به این صورت که در ناحیه‌هایی که تغییرات تنش شدید می‌باشند، از عناصر کوچک استفاده شده و در سایر

ناحیه‌های دور از این نوع تغییرات، عناصر بزرگتر مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این صورت مرتبه همگرایی جوابها، باز هم از رابطه (۴.۱۰۱) به دست می‌آید، ولی رابطه مذکور به صورت زیر بازنویسی می‌شود:

$$\|u - u_m\|_1^2 \leq c \sum_m h_m^{2k} \|u\|_{k+1,m}^2 \quad (\text{پ } ۴.۱۰۱)$$

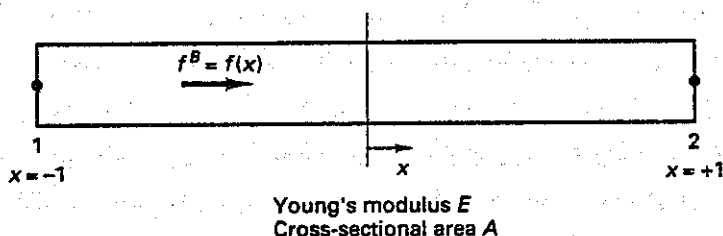
که در آن m نشانگر یک عنصر منفرد بوده و h_m معیاری برای اندازه عنصر است. بنابراین، اکنون خطای کلی معادل حاصل جمع سهم هر عنصر در (۴.۱۰۱) می‌باشد. یک درجه‌بندی خوب عناصر بدین معنی است که چگالی خطا در هر عنصر حدوداً یکسان می‌باشد.

در عمل هنگامی که شبکه‌ها درجه‌بندی می‌شوند، عناصری که به طور هندسی اعوجاج یافته‌اند، به طور ثابت مورد استفاده قرار می‌گیرند. بنابراین، به عنوان مثال با عناصر چهارضلعی عمومی غالباً در تحلیل‌های دوبعدی برخورد می‌کنیم. در فصل پنجم در مورد عناصر با اشکال هندسی عمومی بحث کرده و در بخش ۵.۳.۳ اشاره خواهیم کرد که مادامی که مقدار اعوجاج هندسی معقول می‌باشد، مرتبه‌های مشابهی از همگرایی را برای اینگونه عناصر می‌توان به کار برد.

در دنباله‌ای از شبکه‌ها که در بالا ملاحظه گردید، از یک نوع عنصر استفاده می‌شود و اندازه عناصر بطور یکنواخت کاهش پیدا می‌کند. به روش مذکور، روش تحلیل h اطلاق می‌شود. طریقه دیگر به این صورت است که یک شبکه اولیه با عناصر نسبتاً بزرگ و با مرتبه پایین‌تر انتخاب شده و سپس درجه بسط‌های چندجمله‌ای تغییر مکان در عناصر، به طور پیاپی افزایش داده می‌شود. به عنوان مثال، ممکن است که شبکه‌ای از عناصر با یک فرض تغییر مکان دوخطی مورد استفاده قرار گیرد (در اینجا $k = 1$) و سپس درجه بسط چندجمله‌ای تا مرتبه $p, 2, 3, \dots$ افزایش داده می‌شود که در آن p ممکن است ۱۰ یا حتی بیشتر باشد. به روش مذکور، روش تحلیل p اطلاق می‌گردد. برای اینکه افزایش درجه چندجمله‌ای عناصر با کارایی انجام گیرد، استفاده از توابع درونیابی خاصی پیشنهاد شده است که محاسبه ماتریس سختی عناصر با توابع درونیابی از مرتبه بالاتر را، با استفاده از ماتریس سختی محاسبه شده قبلی و انجام اصلاحاتی در آن میسر می‌سازد. توابع درونیابی مذکور دارای خواص تعامد بوده که بسیار ارزشمند می‌باشند (ر.ک. به: B. Szabo and I. Babuska [A]). ولی، متأسفانه توابع مذکور فاقد تغییرات تغییر مکان داخلی عناصر می‌باشند. تغییرات مذکور هنگامی که عناصر از نظر هندسی دارای اعوجاج می‌باشند، اهمیت اساسی در تحلیل دارند (ر.ک. به: K. Kato, N. S. Lee and K. J. Bathe [A] و بخش ۵.۳.۳). استفاده از این توابع را در مثال زیر نشان می‌دهیم.

مثال ۴.۲۶: عنصر میله‌ای یک بعدی نشان داده شده در شکل ۴.۲۶ را در نظر بگیرید. فرض کنید که (K_p) ماتریس سختی مربوط به تابع درونیابی تغییر مکان از مرتبه p باشد که در آن $p = 1, 2, 3, \dots$ و نیز فرض کنید تابع درونیابی با مرتبه $p = 1$ به صورت زیر می‌باشد:

$$h_1 = \frac{1}{2}(1 - x); \quad h_2 = \frac{1}{2}(1 + x) \quad (\text{الف})$$



شکل ۴.۲۶ عنصر میله‌ای تحت اثر نیروی جسمی متغیر

برای درونیابی‌های از مرتبه بالاتر، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$h_i(x) = \phi_{i-1}(x) \quad i = 3, 4, \dots \quad (\text{ب})$$

که در آن داریم:

$$\phi_j = \frac{1}{[2(2j-1)]^{1/2}} [P_j(x) - P_{j-2}(x)] \quad (\text{پ})$$

و P_j چندجمله‌ای‌های Legendre می‌باشند (به عنوان مثال رک. به: [E. Kreyszig A]).

$$P_0 = 1$$

$$P_1 = x$$

$$P_2 = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x)$$

$$P_4 = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3)$$

⋮

$$(n+1)P_{n+1} = (2n+1)xP_n - nP_{n-1}$$

ماتریس سختی $(K)_p$ عنصر و بردار بار متناظر با آن را برای حالت $p \geq 1$ محاسبه کنید.

حل:

در ابتدا باید یادآوری کنیم که توابع درون‌یابی مذکور شرایط همگرایی یکنوا را تأمین می‌کنند: پیوستگی تغییر مکان بین عناصر، موجود بوده و توابع کامل می‌باشند (آنها نمایشگر مد صلب جسمی و حالت کرنش ثابت می‌باشند). این بدین دلیل است که توابع (الف) شرایط مذکور را تأمین نموده و توابع (ب) صرفاً تغییرات تغییر مکان از مرتبه بالاتر را در عنصر با $h_i = 0$ در $x = \pm 1$ و $i \geq 3$ اضافه می‌نمایند.

ماتریس سختی و بردار بار عنصر با استفاده از (۴.۱۹) و (۴.۲۰) به دست می‌آیند. بنابراین عناصر نمونه ماتریس سختی و بردار بار عبارتند از:

$$K_{ij} = \int_{-1}^{+1} AE \frac{dh_i}{dx} \frac{dh_j}{dx} dx \quad (ت)$$

$$R_i^p = \int_{-1}^{+1} f(x) h_i dx$$

از (ت) نتیجه زیر حاصل می‌گردد:

$$(K)_p = \frac{AE}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & \text{zero} \\ -1 & 1 & \text{entries} \\ & 2 & \dots \\ & & 2 & \dots \\ & & & 2 & \dots \end{bmatrix}_{(p+1) \times (p+1)} \quad (ث)$$

که در آن یادآوری می‌کنیم که در اساس ماتریس سختی معمول 2×2 متناظر با توابع درون‌یابی (الف)، به وسیله عناصر قطری مربوط به مدهای تغییر مکان داخلی عنصر اصلاح شده‌اند. در این حالت خاص، هر چنین عنصری به علت خواص تعامد توابع Legendre از سایر عناصر تفکیک می‌شود. بنابراین به میزانی که مرتبه عنصر افزایش می‌یابد، عناصر قطری دیگری به آسانی محاسبه می‌شوند و سایر ضرایب سختی بدون تغییر باقی می‌مانند.

این گونه ساختار ماتریس $(K)_p$ حل معادلات حاکم یک مجموعه همبسته عناصر را آسان می‌سازد و وضعیت ماتریس سختی، صرف‌نظر از میزان بالا بودن مرتبه ماتریس‌های سختی مورد استفاده، مطلوب است. همچنین توجه شود که اگر جواب تحلیل عناصر محدود برای عناصری که توابع درون‌یابی آنها دارای مرتبه معلومی باشند، مشخص باشد، در این صورت جواب تحلیل عناصر محدود با توابع درون‌یابی از مرتبه بالاتر افزایش یافته را می‌توان به آسانی از محاسبه و اضافه نمودن تغییر مکان‌های ناشی از مدهای اضافی تغییر مکان داخلی عناصر به دست آورد.

از آنجا که مجموعه‌های توابع تغییر مکان مربوط به ماتریس $(K)_{p+1}$ شامل مجموعه‌ای از توابع مربوط به ماتریس $(K)_p$ می‌باشند، توابع تغییر مکان و ماتریس‌های سختی مذکور را توابع و ماتریس‌های سلسله‌مراتبی می‌نامند. این خاصیت سلسله‌مراتبی عموماً هنگامی که مرتبه درونیابی افزایش پیدا می‌کند، همچنان موجود و در دسترس می‌باشد (ر.ک. به: تمرین ۴.۲۹ و بخش ۵.۲).

از مفهوم ارائه شده در مثال ۴.۲۶ جهت ایجاد توابع تغییر مکان، برای عناصر دوبعدی و سه بعدی دارای مرتبه بالاتر نیز استفاده می‌شود. به عنوان مثال، در حالت دوبعدی، توابع پایه، توابع h_i و $i = 1, 2, 3, 4$ هستند که در مثال ۴.۶ مورد استفاده قرار گرفتند و نیز توابع اضافی که ناشی از مدهای جانبی و مدهای داخلی می‌باشند (ر.ک. به: تمرین‌های ۴.۳۰ و ۴.۳۱).

توجه کردیم که در تحلیل یک سازه میله‌ای که با استفاده از عناصر از نوع مورد بحث در مثال ۴.۲۶ ایده‌آل‌سازی می‌شود، ارتباط بین عناصر صرفاً ناشی از تغییر مکان‌های نقاط گرهی با توابع h_1, h_2 می‌باشد و این نکته منجر به حلی با کارایی بیشتری می‌شود. با وجود این، در حالات دوبعدی و سه بعدی، این کارایی محاسباتی وجود ندارد، زیرا مدهای جانبی عناصر، تغییر مکان‌های عناصر مجاور را به همدیگر ارتباط داده و در حقیقت معادلات عناصر محدود حاکم مجموعه همبسته عناصر دارای یک عرض نوار بزرگی می‌باشند (ر.ک. به: بخش ۸.۲.۳). اگر همزمان تعداد عناصر محدود و نیز مرتبه توابع تغییر مکان در عناصر افزایش داده شوند، در این صورت می‌توان در تحلیل شرایط عمومی تنش، نرخ بسیار بالایی از همگرایی را به دست آورد. به این روش نظریه شبکه / عنصر، روش h/p اطلاق می‌شود. در این روش یک نرخ نمایی همگرایی به صورت زیر حاصل می‌شود (ر.ک. به: [A] B. Szabo and I. Bauška):

$$\|u - u_h\|_1 \leq \frac{c}{\exp[\beta(N)^\gamma]} \quad (4.105)$$

که در آن c و β و γ مقادیر ثابت مثبت بوده و N تعداد گرهای شبکه می‌باشد. اگر برای مقایسه با (۴.۱۰۵)، رابطه (۴.۱۰۱) را به همان صورت بنویسیم، برای روش h ، نرخ جبری همگرایی را به صورت زیر پیدا می‌کنیم:

$$\|u - u_h\|_1 \leq \frac{c}{(N)^{k/d}}$$

که در آن $d = 1, 2, 3$ ، به ترتیب برای مسائل یک بعدی، دوبعدی و سه بعدی می‌باشند. مؤثر بودن روش h/p در این نکته نهفته است که این روش شامل نکات جالب و مثبت خواص روش‌های h و p می‌باشد؛ بدین ترتیب که از روش p ، هنگامی که جواب کامل هموار است، یک

نرخ‌نمایی همگرایی بدست می‌آید و با استفاده از روش h ، نرخ بهینه همگرایی به وسیله درجه‌بندی مناسب شبکه - مستقل از هموار بودن جواب کامل - حفظ می‌شود. در حالی که نرخ همگرایی می‌تواند در روش حل h/p بسیار بالا باشد، ولی اینکه آیا روش حل مؤثر می‌باشد یا نه، بستگی به کوشش کلی محاسباتی دارد که برای رسیدن به یک حد معینی از خطا صرف می‌شود (که آن نیز بستگی به مقدار ثابت c دارد). بنابراین نکته اصلی یک حل عناصر محدود با استفاده از روش‌های h ، p و یا h/p ، درجه‌بندی «مناسب» شبکه می‌باشد. عبارات مزبور نشان می‌دهند که چگونه به میزانی که چگالی عناصر و مرتبه توابع درونیابی افزایش می‌یابند، همگرایی به جواب کامل حاصل می‌گردد، ولی شبکه‌های مورد استفاده شده در حل‌های پیاپی، باید به طور مناسبی مدرج شوند.

در بحث مربوط به همگرایی با در نظر گرفتن مسأله مدل ایستایی خطی همچنین فرض کردیم که اولاً ماتریس‌های عناصر محدود به طور کامل محاسبه می‌شوند و نیز معادلات تعادل حاکم بدون خطا حل می‌گردند. در عمل، برای تعیین ماتریس‌های عناصر از انتگرال‌گیری عددی استفاده می‌شود (ر.ک. به: بخش ۵.۵) و دقت محدود حسابی، برای حل معادلات تعادل حاکم مورد استفاده قرار می‌گیرد (ر.ک. به: بخش ۸.۲.۶)؛ بنابراین روشن است که مقداری خطا در مراحل حل راه خواهد یافت. ولی خطاهای انتگرال‌گیری عددی، مرتبه همگرایی را کاهش نخواهند داد، به شرط اینکه از یک روش انتگرال‌گیری قابل اعتماد با مرتبه بالاتر استفاده شود (ر.ک. به: ۵.۵.۵) و خطاها در حل معادلات معمولاً کوچک می‌باشند، مگر اینکه یک مجموعه معادلات بسیار "بدطرح" حل شود (ر.ک. به: بخش ۸.۲.۶).

۴.۳.۶ محاسبه تنش‌ها و ارزیابی خطا

در بحث پیشین شرح داده شد که برای همگرایی یکنوا به نتایج کامل («کامل» در محدوده فرض‌های مکانیکی یا ریاضی مورد نظر)، عناصر باید کامل و سازگار باشند. استفاده از عناصر سازگار (یا همدیس) بدین معنی است که در نمایش عناصر محدود یک مسأله وردشی C^{m-1} ، تغییر مکان‌ها و مشتقات $(m-1)$ ام آنها در سرتاسر مرزهای عنصر پیوسته می‌باشند. بنابراین، به عنوان مثال در یک تحلیل تنش مسطح تغییر مکان‌های u ، v پیوسته بوده و در تحلیل یک مسأله خمش صفحه‌ای با استفاده از تغییر مکان جانبی w به عنوان تنها متغیر مجهول، این تغییر مکان w و مشتقات آن $\partial w/\partial x$ و $\partial w/\partial y$ پیوسته می‌باشند. با وجود این پیوستگی مزبور بدین معنی نیست که تنش‌های عنصر در سرتاسر مرزهای آن پیوسته باشند.

تنش‌های عنصری با استفاده از مشتقات تغییر مکان‌ها محاسبه می‌شوند [ر.ک. به:

(۴.۱۱) و (۴.۱۲) و اگر یک شبکه عناصر محدود درشت مورد استفاده قرار گیرد، در این صورت تنش‌های حاصله در لبه یک عنصر (یا وجه آن) ممکن است که تفاوت قابل توجهی با تنش‌های محاسبه شده در عناصر مجاور داشته باشند. به میزانی که شبکه عناصر محدود ریزتر می‌شود، تفاوت تنش در مرزهای عنصر کاهش می‌یابد؛ البته نرخ کاهش این تفاوت به وسیله مرتبه عناصر مورد استفاده در گسسته‌سازی مشخص می‌گردد.

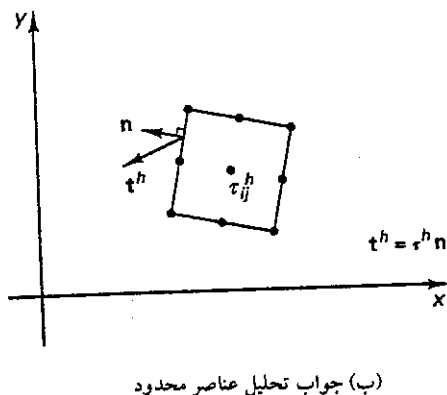
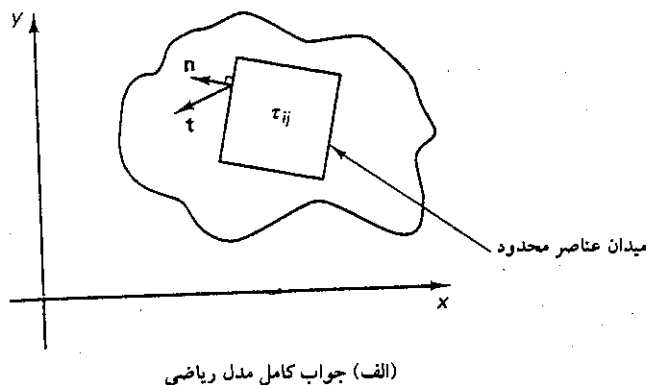
بنابر همین دلیل ریاضی که تنش‌های عناصر عموماً در سرتاسر مرزهای آنها پیوسته نمی‌باشند، تنش‌های عناصر در سطح سازه مدل شده نیز عموماً با نیروهای سطحی وارده خارجی در تعادل نیستند. با وجود این، مانند حالت پرش تنش بین عناصر، به میزانی که تعداد عناصر مورد استفاده برای مدل نمودن سازه افزایش می‌یابد، تفاوت بین نیروهای سطحی وارد خارجی و تنش‌های عناصر کاهش پیدا می‌کند.

البته پرش‌های تنش در سرتاسر مرزهای عناصر و عدم تعادل تنش‌ها در مرز جسم ناشی از این واقعیت می‌باشند که تعادل تنش در سطح دیفرانسیلی به طور دقیق تأمین نمی‌شود، مگر اینکه از یک گسسته‌سازی عناصر محدود بسیار ریز استفاده شود: در این ارتباط استخراج اصل کار مجازی در مثال ۴.۲ یادآوری می‌شود. مسیر حل مسأله ارائه شده در این مثال نشان می‌دهد که معادلات دیفرانسیل تعادل تنها هنگامی ارضا می‌شوند که معادله کار مجازی به ازای هرگونه تغییر مکان‌های مجازی اختیاری که در سطح شرایط مرزی تغییر مکان صفر می‌باشند، ارضا گردد. در تحلیل عناصر محدود، تعداد وضعیت‌های تغییر مکانی «حقیقی» و مجازی مساوی تعداد درجات آزادی گرهی می‌باشد و بنابراین تنها یک جواب تقریبی برحسب تأمین تعادل تنش در سطح دیفرانسیلی به دست می‌آید (در حالی که شرایط سازگاری و مشخصه کاملاً تأمین می‌شوند). بنابراین خطا در جواب را می‌توان با جایگزینی جواب تحلیل عناصر محدود برای تنش‌های τ_{ij}^h در معادلات بنیادی تعادل تعیین نمود، تا اینکه برای هر میدان هندسی که به وسیله یک عنصر محدود نمایش داده می‌شود رابطه زیر به دست آید:

$$\tau_{ij,j}^h + f_i^b \neq 0 \quad (4.106)$$

$$\tau_{ij}^h n_j - t_i \neq 0 \quad (4.107)$$

که در آن n_j نمایشگر کوسینوس‌های هادی عمود بر مرز میدان عنصر بوده و t_i مؤلفه‌های بردار نیروهای سطحی کامل در امتداد آن مرز می‌باشند (ر.ک. به: شکل ۴.۱۴). البته بردار نیروهای سطحی ناشی از جواب کامل مشخص نیست و این نکته که سمت چپ رابطه (۴.۱۰۷) صفر نمی‌باشد، به آسانی نشان می‌دهد که باید انتظار پرش تنش بین عناصر را داشته باشیم.



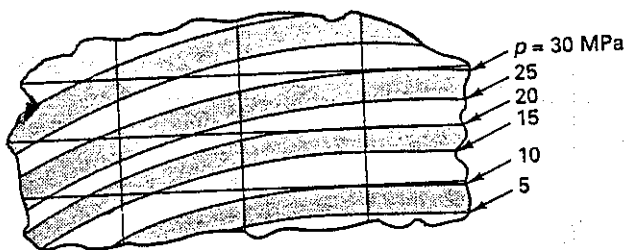
شکل ۴.۱۴ نمایش عناصر محدود زیر - میدان یک محیط پیوسته

می‌توان ثابت نمود که برای عناصر مرتبه پایین‌تر عدم تعادل در (۴.۱۰۷) بزرگتر از عدم تعادل در (۴.۱۰۶) می‌باشد و برای عناصر مرتبه بالاتر، عدم تعادل در (۴.۱۰۶) برجسته و تعیین کننده می‌شود. در عمل از رابطه (۴.۱۰۷) می‌توان جهت یافتن شاخصی برای دقت جواب تنش استفاده نمود و رابطه مذکور به سادگی با استفاده از تکنوارهای تنش‌ها به گونه‌ای که به وسیله T. Sussman and K. J. Bathe [A] پیشنهاد شده است، اعمال می‌شود. تکنوارهای مذکور با استفاده از تنش‌های محاسبه شده و بدون هموار کردن تنش‌ها به صورتی که در زیر شرح داده می‌شود، ایجاد می‌گردند:

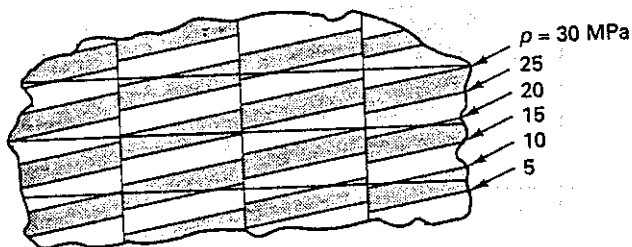
یک معیار تنش را انتخاب کنید، معمولاً فشار یا تنش مؤثر (von Mises) انتخاب می‌شود ولی می‌توان هر مؤلفه تنشی را برگزید.

تمامی حوزه‌ای که در آن معیار تنش تغییر می‌کند، به محدوده‌های تنش تقسیم کنید و هر

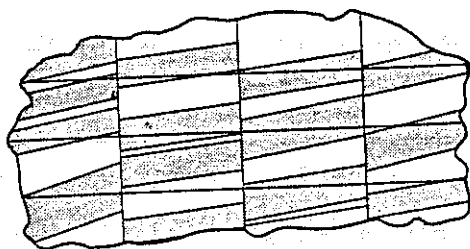
محدوده را با یک رنگ مشخص نمایید (یا از سایه‌زنی سیاه و سفید و یا محدوده‌های سیاه و سفید استفاده کنید).
مقدار معیار تنش در هر نقطه‌ای به وسیله رنگ محدوده‌ای که نقطه مذکور در آن قرار دارد، مشخص می‌شود.



(a)



(b)



(c)

شکل ۴.۱۵ تخمین نموداری عدم پیوستگی‌های تنش با استفاده از نوارهای فشار، عرض باند = 5 MPa، از محدوده‌های سیاه و سفید استفاده می‌شود،

(الف) عدم پیوستگی‌های ناچیز، $\Delta p \ll 5 \text{ MPa}$

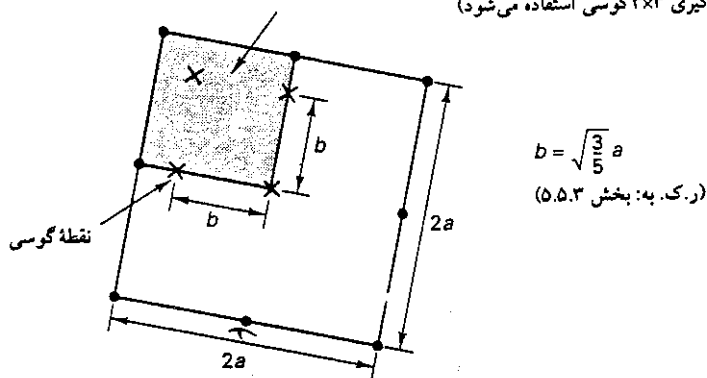
(ب) عدم پیوستگی‌های برجسته، ولی هنوز نوارها قابل تشخیص هستند، $\Delta p = 2 \text{ MPa}$

(پ) عدم پیوستگی‌های برجسته، نوارها قابل تشخیص نیستند، $\Delta p > 5 \text{ MPa}$

اگر تمامی تنش‌ها در سرتاسر مرزهای عناصر پیوسته باشند، در این صورت با استفاده از این شیوه، تک‌نوارهای غیرشکسته تنش حاصل می‌شوند. ولی در عمل عدم پیوستگی‌های تنش در سرتاسر مرزهای عناصر رخ می‌دهند که در نتیجه «شکستگی‌هایی» در نوارها ایجاد می‌شوند. مقدار مربوط به هر محدوده تنش به همراه شدت شکستگی‌ها در نوارهای تنش مستقیماً میزان عدم پیوستگی‌ها در تنش‌ها را نشان می‌دهند (ر.ک. به: شکل ۴.۱۵). بنابراین، تک‌نوارها نمایشگر یک «نرم چشمی» برای دقت پیش‌بینی تنش τ_{ij}^h حاصل از تحلیل عناصر محدود یک شبکه مشخص می‌باشند.

در تحلیل خطی، مقادیر تنش حاصل از تحلیل عناصر محدود را می‌توان با استفاده از رابطه $CB\hat{u} = \mathbf{t}$ در هر نقطه از عنصر محاسبه نمود، ولی اینگونه تعیین تنش‌ها نسبتاً پرهزینه است و بندرت در یک تحلیل غیرخطی عمومی (که شامل اثرات غیرخطی مصالح نیز است) امکان‌پذیر می‌باشد. یک روش مناسب، استفاده از مقادیر نقاط انتگرال‌گیری برای درونیابی دوخطی در میدان عنصر مربوطه می‌باشد. شکل ۴.۱۶ مثالی از اینگونه یا در تحلیل دوبعدی نشان می‌دهد.

میدانی که در آن تنش‌ها یا استفاده از مقادیر چهار نقطه گوسی درونیابی دوخطی می‌شوند (انتگرال‌گیری 3×3 گوسی استفاده می‌شود)



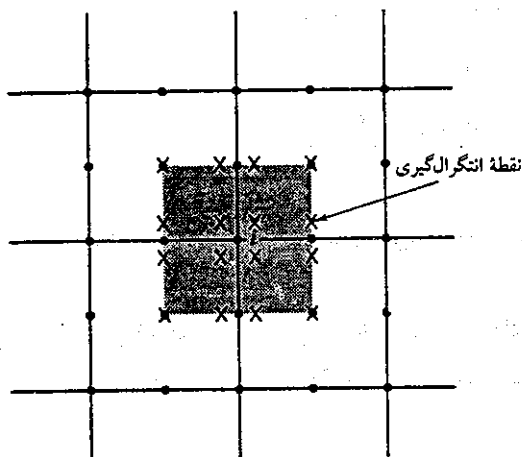
شکل ۴.۱۶ درونیابی تنش‌ها از تنش‌های نقاط گوسی

یک روش جایگزین برای پیدا کردن تقریب خطا در تنش‌های محاسبه شده τ_{ij}^h این است که در ابتدا برخی مقادیر اصلاح شده $(\tau_{ij}^h)_{impr}$ به دست می‌آیند و سپس تعیین و نمایش داده می‌شوند:

$$\Delta \tau_{ij} = \tau_{ij}^h - (\tau_{ij}^h)_{impr} \quad (۴.۱۰۸)$$

نمایش مذکور می‌تواند به طور مؤثری با استفاده از روش تک‌نوار که در بالا بحث گردید، انجام گیرد. مقادیر اصلاح شده می‌توانند به آسانی با متوسط‌گیری مقادیر تنش حاصل در گره‌ها با استفاده از روش نشان داده شده در شکل ۴.۱۶ به دست بیایند و یا با استفاده از برازش کمترین مربعات در روی مقادیر تنش در نقاط انتگرال‌گیری عناصر تعیین شوند (ر.ک. به: [A] E. Hinton and J. S. Campbell). روش کمترین مربعات ممکن است که در روی دسته‌ای از عناصر مجاور هم و یا حتی در روی کل شبکه اعمال شود. با وجود این اگر میدانی که در روی آن برازش کمترین مربعات اعمال می‌شود، شامل نقاط تنش زیادی باشد، حل مسأله پرهزینه خواهد بود و نیز ممکن است که خطای بزرگی در قسمتی از میدان به طور نسبتاً قابل توجهی در پیش‌بینی کمترین مربعات در سایر قسمت‌ها اثر بگذارد. نکته دیگر این است هنگامی که از روش مستقیم تعیین تنش بر مبنای رابطه (۴.۱۲) استفاده می‌شود، تنش‌ها غالباً در نقاط انتگرال‌گیری عددی که برای تعیین ماتریس‌های سختی مورد استفاده قرار می‌گیرند، بسیار دقیق‌تر از نقاط گرهی می‌باشند (ر.ک. به: بخش ۵.۵). بنابراین برای یک برازش کمترین مربعات، استفاده از توابعی که مرتبه آنها بالاتر از تغییرات تنش حاصل از توابع تغییر مکان فرضی است، می‌تواند ارزشمند باشد، زیرا در این صورت حصول مقادیر اصلاح شده را می‌توان انتظار داشت.

در مثال زیر متوسط‌گیری از تنش‌های نقاط گرهی و برازش کمترین مربعات را نشان می‌دهیم. مثال ۴.۲۷: شبکه متشکل از عناصر نه گرهی نشان داده شده در شکل ۴.۲۷ E را در نظر بگیرید. روش معقولی را پیشنهاد کنید، بگونه‌ای که بتواند نتایج تنش را با استفاده از متوسط‌گیری نقاط گرهی و برازش کمترین مربعات اصلاح نماید.



شکل ۴.۲۷ E شبکه عناصر نه گرهی. نقاط انتگرال‌گیری مجاور گره i نیز نشان داده شده‌اند.

حل:

فرض کنید که τ یک مؤلفه نمونه تنش باشد. یک طریقه ساده و غالباً مؤثر برای اصلاح نتایج تنش، برون‌یابی دوخطی مؤلفه‌های تنش محاسبه شده از نقاط انتگرال‌گیری هر عنصر تا نقطه i است. بدین طریق، برای این موقعیت و گره i در شکل ۴.۲۷، چهار مقدار برای هر مؤلفه تنش به دست می‌آید. در این صورت مقدار میانگین $(\tau^h)^i_{mean}$ این چهار مقدار به عنوان مقدار تنش در نقطه گرهی i در نظر گرفته می‌شود. بعد از انجام محاسبات مشابه برای هر نقطه گرهی، مقدار اصلاح شده مؤلفه تنش در یک عنصر عبارت است از:

$$(\tau^h)_{impr.} = \sum_{i=1}^9 h_i (\tau^h)^i_{mean} \quad (\text{الف})$$

که در آن h_i توابع درون‌یابی تغییر مکان می‌باشند، زیرا به نظر می‌رسد که مقادیر گرهی میانگین خیلی دقیق‌تر از مقادیر حاصل از مشتقات تغییر مکان‌ها باشند (که به طور ضمنی دلالت بر این نکته دارد که درون‌یابی با یک مرتبه پایین‌تر مناسب‌تر می‌باشد).

مرحله اساسی در این روش، محاسبه $(\tau^h)^i_{mean}$ است. چنین مقدار اصلاح شده‌ای را می‌توان با استفاده از روشی مبتنی بر کمترین مربعات نیز به دست آورد.

نزدیکترین ۸ گره به نقطه i و نیز خود نقطه i و مقادیر مؤلفه تنش مورد نظر در نزدیکترین ۱۶ نقطه انتگرال‌گیری به نقطه i را در نظر بگیرید (که در شکل ۴.۲۷ نشان داده می‌شوند). فرض کنید که $(\tau^h)^i_{integr.}$ مقادیر معلوم مؤلفه تنش در نقاط انتگرال‌گیری باشد، $j = 1, \dots, 16$ و نیز فرض کنید که $(\tau^h)^k_{nodes}$ مقادیر مجهول در ۹ گره (میدان مربوط به نقاط انتگرال‌گیری) باشند. می‌توان از روش کمترین مربعات (ر.ک. به: بخش ۳.۳.۳) استفاده نمود تا مقادیر $(\tau^h)^k_{nodes}$ را با مینیمم‌سازی خطاها بین مقادیر معلوم نقاط انتگرال‌گیری و مقادیر محاسبه شده در همان نقاط به وسیله درون‌یابی از مقادیر نقاط گرهی $(\tau^h)^k_{nodes}$ محاسبه نمود:

$$\frac{\partial}{\partial (\tau^h)^k_{nodes}} \left[\sum_{j=1}^{16} ((\tau^h)^j_{integr.} - (\tau^h)^i_{integr.})^2 \right] = 0 \quad (\text{ب})$$

$$k = 1, \dots, 9$$

که در آن داریم:

$$(\tau^h)^i_{integr.} = \sum_{k=1}^9 h_k \bigg|_{\text{at integr. point } j} (\tau^h)^k_{nodes} \quad (\text{پ})$$

توجه شود که در (پ)، توابع درون‌یابی در ۱۶ نقطه انتگرال‌گیری نشان داده شده در شکل ۴.۲۷ تعیین می‌شوند. روابط (ب) و (پ)، ۹ معادله برای مقادیر $(\tau^h)^k_{nodes}$ را بدست می‌دهند و $k = 1, \dots, 9$ معادلات را برای یافتن مقادیر مذکور حل می‌کنیم، ولی تنها مقدار مربوط به گره

i را به عنوان مقدار تنش اصلاح شده قبول می‌کنیم که در حقیقت مقدار $(\sigma^*)/E_{mean}$ (الف) است. روش اساسی مشابهی را برای تمامی گره‌ها استفاده می‌کنیم تا اینکه به مقادیر «میانگین» گرهی برسیم، بگونه‌ای که (الف) را می‌توان برای تمامی عناصر استفاده نمود.

روشن است که روش کمترین مربعات شامل محاسبات زیادی می‌باشد و در بسیاری حالات یک روش ساده‌تر که صرفاً شامل برون‌یابی مقادیر گوسی و متوسط‌گیری در گره‌ها بوده، بگونه‌ای که در بالا توصیف شد، کافی است.

البته در شکل E۴.۲۷، چهار عنصر مربعی مساوی را در نظر گرفته بودیم. در عمل، عموماً عناصر دارای اعوجاج بوده و عناصر کمتر یا بیشتری ممکن است که به گره i متصل باشند. همچنین ضرورت دارد گره‌هایی که در گوشه عناصر نیستند و هندسه‌های شبکه‌ای خاصی در مرزها در نظر گرفته شوند.

تأکید می‌کنیم که محاسبه یک معیار خطا و نمایش آن مهمترین جنبه یک حل عناصر محدود می‌باشد. کیفیت جواب تنش عناصر محدود π باید معلوم باشد. به محض اینکه خطا به طور قابل قبولی کوچک باشد، مقادیر تنش را که با استفاده از متوسط‌گیری نقاط گرهی و برازش کمترین مربعات هموار شده‌اند، می‌توان با اطمینان به کار برد.

این معیارهای خطا مبتنی بر عدم پیوستگی‌های تنش‌ها بین عناصر می‌باشند. با وجود این برای عناصر مرتبه بالاتر (مرتبه ۴ یا بالاتر)، چنین عدم پیوستگی‌هایی می‌توانند کوچک باشند، ولی جواب هنوز دقیق نیست، زیرا معادلات دیفرانسیل تعادل تنش‌ها در عناصر با دقت کافی ارضا نمی‌شوند. در چنین حالتی، معیار خطا باید شامل عدم تعادل تنش‌های داخلی عنصری (۴.۱۰۶) نیز باشد.

به محض اینکه یک معیار خطا برای تنش‌ها در یک تحلیل عناصر محدود محاسبه شدند، و خطاها بیش از اندازه بزرگ به نظر رسیدند، ضروری است که شبکه جدیدی ایجاد شود (با یک گسسته‌سازی تظریف شده در ناحیه‌های معینی، عدم تظریف شبکه در ناحیه‌های دیگر و احتمالاً مرتبه‌های درونیابی جدید در عناصر). این فرایند انتخاب شبکه جدید به میزان زیادی می‌تواند خودکار شود که جهت استفاده گسترده از تحلیل عناصر محدود در CAD حائز اهمیت است (ر.ک. به: بخش ۱.۳).

۴.۳.۷ تمرین‌ها

۴.۲۵ کوچکترین هشت ویژه مقدار ماتریس سختی یک عنصر پوسته‌ای چهارگره‌ای را که در یک برنامه کامپیوتری عناصر محدود قابل دسترس می‌باشد، محاسبه کرده و هر ویژه مقدار و ویژه بردار متناظر با آن را تفسیر نمایید (راهنمایی: ویژه مقادیر ماتریس سختی

عنصر را می‌توان به وسیله انجام یک تحلیل فرکانس با یک ماتریس جرم متناظر با جرمهای واحد برای هر درجه آزادی به دست آورد).

۴.۲۶ نشان دهید که انرژی کرنشی متناظر با خطای تغییر مکان e_h که به صورت $e_h = u - u_h$ است مساوی با اختلاف انرژی‌های کرنشی متناظر با جواب تغییر مکان کامل u و جواب تحلیل عناصر محدود u_h می‌باشد.

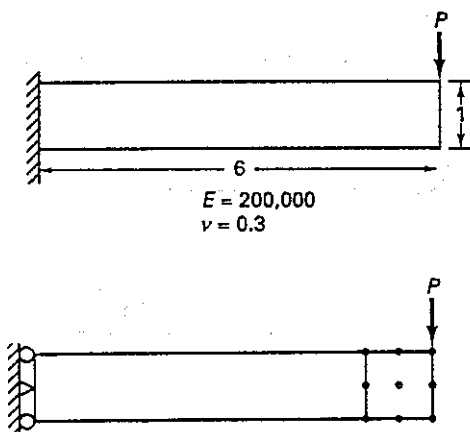
۴.۲۷ تحلیل مسأله ارائه شده در مثال ۴.۶ را در نظر بگیرید. یک برنامه کامپیوتری عناصر محدود را برای انجام مطالعه همگرایی نشان داده شده در شکل ۴.۱۲ با استفاده از عناصر (لاگرانژی) نه گرهی و چهارگرهی به کار برید. به عبارت دیگر، نرخ همگرایی در نرم انرژی را تعیین کرده و نرخ مذکور را با نتایج تئوریک داده شده در بخش ۴.۳.۵ مقایسه نمایید. N را مساوی ۲ و ۴ و ۸ و ۱۶ و ۳۲ گرفته و فرض کنید که $N = 32$ جواب حدی باشد و از شبکه‌های یکنواخت و درجه‌بندی شده استفاده نمایید.

۴.۲۸ تیر طره‌ای نشان داده شده در شکل زیر را با استفاده از یک برنامه کامپیوتری عناصر محدود تحلیل نمایید. از یک ایده‌آل‌سازی با استفاده از عناصر تنش مسطح دوبعدی برای یافتن پاسخ ایستایی استفاده کنید.

(الف) از شبکه‌هایی با عناصر چهارگرهی استفاده نمایید.

(ب) از شبکه‌هایی با عناصر نه گرهی استفاده نمایید.

در هر حالت، دنباله‌ای از شبکه‌ها را ایجاد نموده و نرخ همگرایی انرژی کرنشی را مشخص کنید.



همچنین جوابهای حاصل از تحلیل عناصر محدود را با جوابهای حاصل از نظریه‌های تیر Bernoulli-Euler و Timoshenko مقایسه کنید (ر.ک. به: S. H. Crandall, N. C. Dahl and T. J. Lardner [A] و بخش ۵.۴.۱).

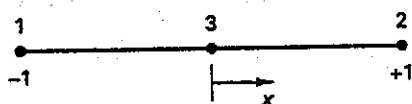
۴.۲۹ عنصر میله‌ای سه گرهی نشان داده شده در زیر را در نظر بگیرید. توابع تغییر مکان عنصری برای دو حالت زیر را ایجاد کرده و رسم نمایید.
برای حالت ۱:

$$h_i = 1 \text{ at node } i, i = 1, 2, 3 \\ = 0 \text{ at node } j \neq i$$

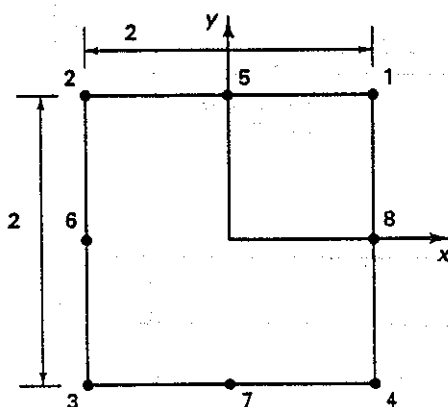
برای حالت ۲:

$$h_i = 1 \text{ at node } i, i = 1, 2 \\ = 0 \text{ at node } j \neq i, j = 1, 2 \\ h_3 = 1 \text{ at node } 3 \\ h_3 = 0 \text{ at node } 1, 2$$

یادآوری می‌کنیم که توابع مربوط به حالات ۱ و ۲ شامل تغییرات یکسان تغییر مکان است و از اینرو مربوط به فضای تغییر مکان یکسانی می‌باشند. همچنین مجموعه‌های توابع، سلسله مراتبی هستند، زیرا عنصر سه گرهی شامل توابع عنصر دوگره‌ای نیز می‌باشد.



۴.۳۰ عنصر هشت گرهی نشان داده شده در زیر را در نظر بگیرید. عبارات مثلث Pascal را که در درونیابی‌های عنصر وجود دارند مشخص نمایید.



$$h_1 = \frac{1}{4}(1+x)(1+y), h_2 = \frac{1}{4}(1-x)(1+y)$$

$$h_3 = \frac{1}{4}(1-x)(1-y), h_4 = \frac{1}{4}(1+x)(1-y)$$

$$h_5 = \frac{1}{2}(1+y)\phi_2(x), h_6 = \frac{1}{2}(1-x)\phi_2(y)$$

$$h_7 = \frac{1}{2}(1-y)\phi_2(x), h_8 = \frac{1}{2}(1+x)\phi_2(y)$$

که در آن ϕ_2 در مثال ۴.۲۶ تعریف شده است.

۴.۳۱ یک عنصر p از مرتبه $p = 4$ با استفاده از توابع تغییر مکان زیر به دست می‌آید. h_i و $i = 1, 2, 3, 4$ همان‌گونه که در عنصر چهارگرهی تعریف می‌شود (فقط باگره‌های گوشه، ر.ک. به: مثال ۴.۶).

h_i و $i = 5, \dots, 16$ برای نمایش مدهای جانبی.

$$h_i^{(1)} = \frac{1}{2}(1+y)\phi_j(x); \quad i = 5, 9, 13; j = 2, 3, 4 \quad \text{ضلع ۱:}$$

$$h_i^{(2)} = \frac{1}{2}(1-x)\phi_j(y); \quad i = 6, 10, 14; j = 2, 3, 4 \quad \text{ضلع ۲:}$$

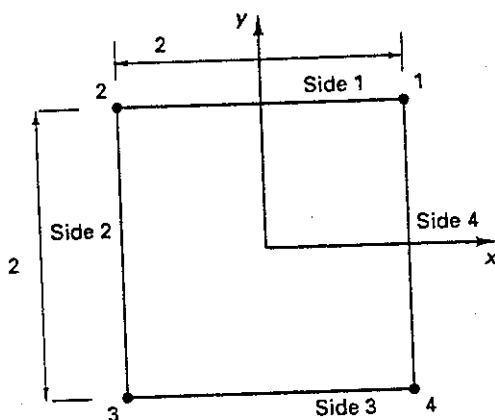
$$h_i^{(3)} = \frac{1}{2}(1-y)\phi_j(x); \quad i = 7, 11, 15; j = 2, 3, 4 \quad \text{ضلع ۳:}$$

$$h_i^{(4)} = \frac{1}{2}(1+x)\phi_j(y); \quad i = 8, 12, 16; j = 2, 3, 4 \quad \text{ضلع ۴:}$$

که در آن ϕ_2 و ϕ_3 و ϕ_4 در مثال ۴.۲۶ تعریف شده‌اند. h_{17} برای نمایش یک مد داخلی به صورت زیر می‌باشد:

$$h_{17} = (1-x^2)(1-y^2)$$

عبارات مثلث Pascal را که در درون‌یابی‌های عنصر وجود دارند، مشخص نمایید.



۴.۳۲ تحلیل مسأله ارائه شده در مثال ۴.۶ را در نظر بگیرید. یک برنامه کامپیوتری عناصر محدود را برای حل مسأله با استفاده از شبکه‌های متشکل از عناصر نه گرهی ارائه شده در تمرین ۴.۲۷ به کار برید و تکیه‌های تنش von Mises و فشار را (بدون استفاده از هموار نمودن تنش‌ها) رسم نمایید. در این صورت تکیه‌ها، عدم پیوستگی‌های تنش را بین عناصر به نمایش خواهند گذاشت. نشان دهید که چگونه تکیه‌های مذکور به تکیه‌های پیوسته تنش در یک صفحه طره‌ای همگرا خواهند شد.

۴.۴ مدل‌های عناصر محدود سازگار و آمیخته

در بخش‌های پیشین، روش عناصر محدود مبتنی بر تغییر مکان را ملاحظه نمودیم و شرایطی را تاکنون در توابع (یا میدان) تغییر مکان فرضی اعمال کردیم، کامل و سازگار بودن عناصر بودند، اگر این شرایط احراز شوند، جواب محاسبه شده انرژی کرنشی، به طور یکنوا (و یا به عبارتی یک جانبه) به جواب کامل همگرا می‌شود. شرط کامل بودن عموماً می‌تواند با سهولت نسبی تأمین شود. شرط سازگاری نیز می‌تواند بدون دشواری قابل توجهی در مسائل C^0 — نظیر مسائل تنش مسطح و کرنش مسطح و یا در تحلیل جامدات سه بعدی مانند سدها حاصل شود. اما در تحلیل مسائل پوسته‌ای و در تحلیل‌های پیچیده که در آنها باید از عناصر محدود کاملاً متفاوتی برای ایده‌آل‌سازی ناحیه‌های مختلف سازه استفاده شود، حفظ سازگاری غیرممکن است. اگرچه شرایط سازگاری نقض می‌شوند، ولی تجربه نشان می‌دهد که غالباً نتایج خوبی به دست می‌آیند.

همچنین در ارزیابی عناصر محدود، ملاحظه شد که برای تحلیل پوسته‌ای و تحلیل محیط تراکم‌ناپذیر، روشی که صرفاً مبتنی بر تغییر مکان باشد، کارایی ندارد. دشواری‌هایی که در ایجاد عناصر محدود سازگار مبتنی بر تغییر مکان، که از نظر محاسباتی در حل این مسائل مؤثر می‌باشند، پیش آمدند و نیز ملاحظه این نکته که در هنگام استفاده از روش‌های وردشی، گسسته‌سازی‌های عناصر محدود بسیار زیادی را می‌توان ایجاد نمود، منجر به کوشش‌های پژوهشی فراوانی شد. در این فعالیت‌های پژوهشی، رده‌های متنوعی از انواع جدید عناصر پیشنهاد شده‌اند و اطلاعات بسیار فراوانی در مورد این عناصر در دسترس می‌باشد. جزییات این اطلاعات متنوع را ارائه نخواهیم کرد ولی به اختصار برخی از ایده‌های اصلی را که مورد استفاده قرار گرفته‌اند شرح خواهیم داد و سپس بحث را در روی فرمول‌بندی یک رده وسیعی از مسائل - تحلیل محیط تقریباً تراکم‌ناپذیر - متمرکز خواهیم کرد. در مورد تحلیل سازه‌های صفحه‌ای و پوسته‌ای با استفاده از مفاهیمی که به اختصار در زیر شرح داده خواهد شد، در فصل پنجم بیشتر بحث خواهد گردید.

۴.۴.۱ مدل‌های ناسازگار مبتنی بر تغییر مکان

نکته‌ای که غالباً در عمل مشاهده می‌شود این است که نتایج رضایت‌بخشی از تحلیل عناصر محدود به دست می‌آیند، اگرچه برخی شرایط پیوستگی بین عناصر مبتنی بر تغییر مکان در شبکه‌های به کار رفته نقض می‌شوند. در برخی مثالها، آرایش نقاط گرهی بگونه‌ای بود که پیوستگی متقابل بین عناصر حفظ نمی‌شد و در حالات دیگر، عناصر استفاده شده شامل ناسازگارهای متقابل بین عناصر بودند (ر.ک. به: مثال ۴.۲۸). نتیجه نهایی در هر دو حالت یکسان بود، به عنوان مثال، تغییر مکان‌ها و مشتقات آنها بین عناصر به اندازه لازم پیوسته نبودند تا تمامی شرایط سازگاری مورد بحث در بخش ۴.۳.۲ تأمین گردند.

از آنجا که در تحلیل عناصر محدود با استفاده از عناصر ناسازگار (غیرهم‌دیس)، شرایط ارائه شده در بخش ۴.۳.۲ تأمین نمی‌گردند، ولی انرژی پتانسیل کلی محاسبه شده ضرورتاً یک کرانه بالایی به انرژی پتانسیل کلی کامل سیستم نیست و در نتیجه همگرایی یکنوا تضمین نمی‌گردد. با وجود این اگر هدف نیل به همگرایی یکنوا در تحلیل برداشته شود، باز هم باید شرایطی را که حداقل یک همگرایی غیریکنوا را تضمین می‌کنند، ایجاد نماییم.

با رجوع به بخش ۴.۳، ملاحظه می‌کنیم که شرط کامل بودن عنصر باید همواره تأمین شود؛ باید دانست که اندازه عنصر محدود تأثیری در شرط مذکور ندارد. یادآوری می‌کنیم که یک عنصر هنگامی کامل می‌باشد که بتواند مدهای فیزیکی صلب جسمی و حالات کرنش ثابت را به نمایش بگذارد (ولی ماتریس عنصر دارای ویژه مقادیر صفر غیرواقعی نمی‌باشد).

با وجود این، می‌توان شرط سازگاری را تا حدی به قیمت عدم بدست آوردن جوابی که به طور یکنوا همگرا باشد نادیده گرفت، به شرط اینکه نادیده گرفتن این شرط، موجب از دست دادن اجزای اصلی شرط کامل بودن نشود. یادآوری می‌کنیم که به میزانی که شبکه عناصر محدود ریزتر می‌شود (به عبارت دیگر، اندازه عناصر کوچکتر می‌شود)، هر عنصر به یک شرط کرنش ثابت باید میل کند. بنابراین شرط دوم در همگرایی یک مجموعه همبسته عناصر محدود ناسازگار با هر اندازه ممکن، این است که همه عناصر با هم بتوانند نمایشگر شرایط کرنش ثابت باشند. باید دانست که شرط مذکور مربوط به یک عنصر منفرد نمی‌باشد، بلکه مربوط به مجموعه همبسته عناصر است. به عبارت دیگر، گرچه یک عنصر منفرد قادر است که تمامی حالات کرنش ثابت را به نمایش بگذارد، ولی هنگامی که عنصر مذکور در یک مجموعه همبسته عناصر مورد استفاده قرار می‌گیرد، ناسازگاری‌های بین عناصر ممکن است که مانع نمایش حالات کرنش ثابت شوند. شرط مذکور را می‌توان شرط کامل بودن در یک مجموعه همبسته عناصر نامید.

به عنوان آزمونی جهت بررسی اینکه آیا یک مجموعه همبسته عناصر غیرهم‌دیس،

کامل است یا نه، آزمون حساسیت پیشنهاد شده است (ر.ک. به: [A] B. M. Irons and A. Razzaque). در این آزمون یک عنصر خاص در نظر گرفته می‌شود و مجموعه همبند عناصر، تحت اثر حداقل شرایط مرزی تغییر مکانی قرار می‌گیرد تا اینکه تمامی مدهای صلب جسمی حذف شوند و نیز مجموعه مذکور در معرض نیروهای نقاط گرهی قرار می‌گیرند که با یک تحلیل، باید شرایط تنش ثابت نتیجه شود. اگر برای هر مجموعه همبند عناصر، تنش‌های عنصری واقعاً نمایشگر شرایط تنش ثابت باشند و تمامی تغییر مکان‌های نقاط گرهی به درستی پیش‌بینی شوند، در این صورت می‌گوییم که عنصر از آزمون حساسیت پذیرفته شده است. از آنجا که یک مجموعه همبند عناصر ممکن است که فقط از یک عنصر منفرد تشکیل شده باشد، آزمون مذکور تضمین می‌کند که خود عنصر کامل است و اینکه شرط کامل بودن برای هر سازه‌ای که عنصر در آن قرار دارد، حاصل می‌شود.

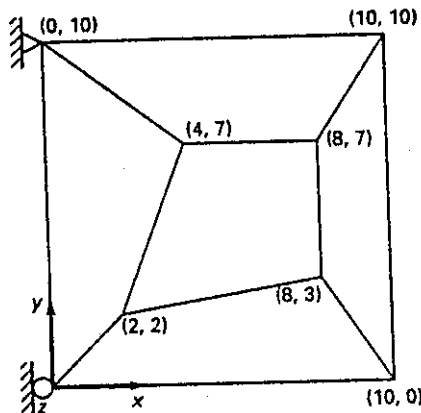
البته تعداد حالات تنش ثابت در آزمون حساسیت بستگی به تعداد حالات واقعی تنش ثابت مربوط به مدل ریاضی دارد؛ به عنوان مثال، در تحلیل تنش مسطح، سه حالت تنش ثابت باید در آزمون حساسیت در نظر گرفته شوند، در حالی که در یک تحلیل سه بعدی کامل، شش حالت تنش ثابت باید امکان‌پذیر باشد.

شکل ۴.۱۷ یک مجموعه نمونه همبند عناصر را که برای بررسی عددی مسائل مختلف مورد استفاده قرار می‌گیرد نشان می‌دهد. البته در این جا فقط یک شبکه با عناصر اعوجاج یافته در نظر گرفته می‌شود، در حالی که هرگونه مجموعه همبند عناصر اعوجاج یافته باید تحلیل گردند. نکته مذکور، یک حل تحلیلی را ایجاب می‌کند. اگر در عمل، عنصر کامل باشد و تحلیل‌های خاصی که در این جا نشان داده می‌شود، منجر به ایجاد نتایج صحیحی شوند، در این صورت به احتمال زیاد، عنصر از آزمون حساسیت پذیرفته می‌شود.

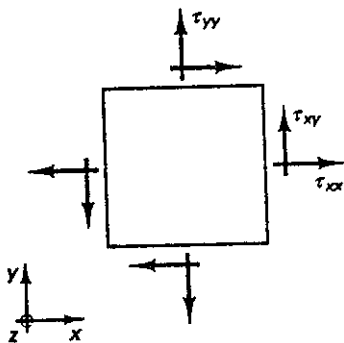
هنگامی که عناصر ناسازگار مبتنی بر تغییر مکان را در نظر می‌گیریم، اگر آزمون حساسیت نتیجه مثبتی ارائه دهد، در این صورت همگرایی تضمین می‌شود (گرچه ممکن است که همگرایی غیر یکنوا بوده و به صورت آهسته انجام پذیرد).

آزمون حساسیت برای ارزیابی شبکه‌های متشکل از عناصر محدود ناسازگار مورد استفاده قرار می‌گیرد؛ و یادآوری می‌کنیم هنگامی که در شبکه‌های ناسازگار از عناصر مبتنی بر تغییر مکان که به صورت مناسبی فرمول‌بندی شده‌اند استفاده می‌شود، آزمون حساسیت به طور خودکار به نتیجه مثبت منجر می‌شود.

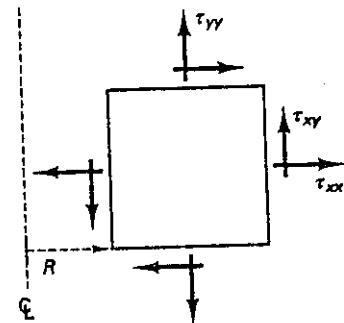
شکل (الف) ۴.۱۸ یک مجموعه همبند از عناصر ۸ گرهی را نشان می‌دهد که با جزییات لازم در بخش ۵.۲ مورد بحث قرار خواهند گرفت. نیروهای سطحی مربوط به آزمون حساسیت تنش مسطح نیز نشان داده شده‌اند. عناصر محدود، یک شبکه سازگار را ایجاد می‌کنند، از اینرو آزمون حساسیت نتیجه مثبت می‌دهد.



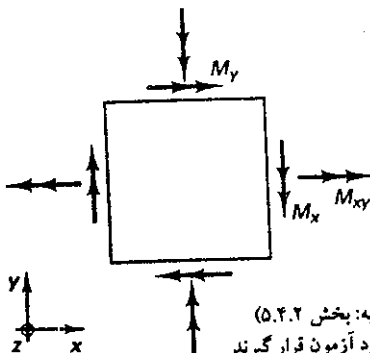
(الف) مجموعه هجند عناصر، عناصر دوبعدی، عناصر خمشی صفحه‌ای، یا نمای جانی عناصر سه‌بعدی. هر میدان چهار ضلعی نمایشگر یک عنصر می‌باشد، برای عناصر مثلثی و چهاروجهی، هر میدان چهارضلعی مجدداً تقسیم می‌شود.



تنش مسطح و کرنش مسطح τ_{xx} ، τ_{xy} ، τ_{yy} ثابت می‌باشند، در تحلیل سه‌بعدی، سه شرط اضافی τ_{zz} و τ_{zx} و τ_{zy} ثابت مورد آزمون قرار می‌گیرند.



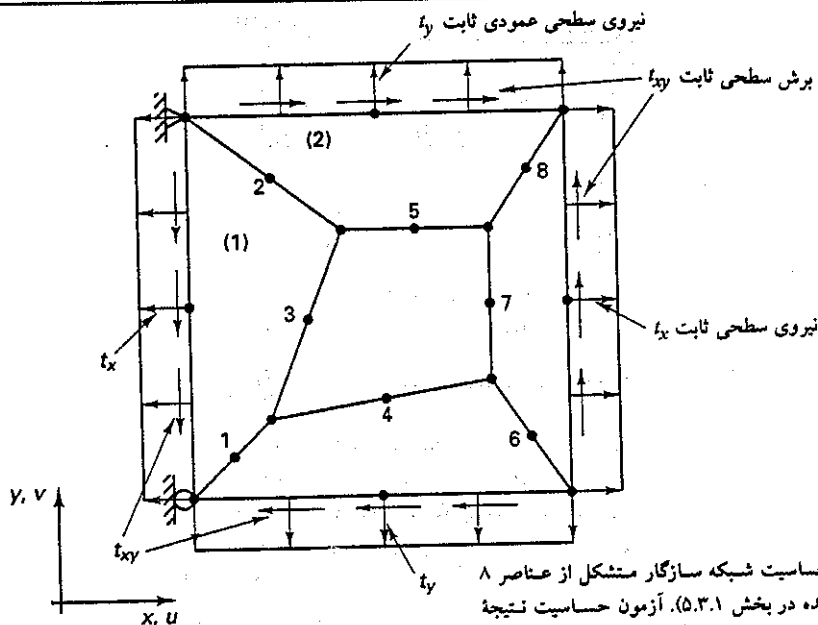
عناصر با تقارن محوری، در اینجا آزمون با شرط $R \rightarrow \infty$ انجام می‌گیرد.



(این آزمون نیز موجب ایجاد خمشی می‌شود)

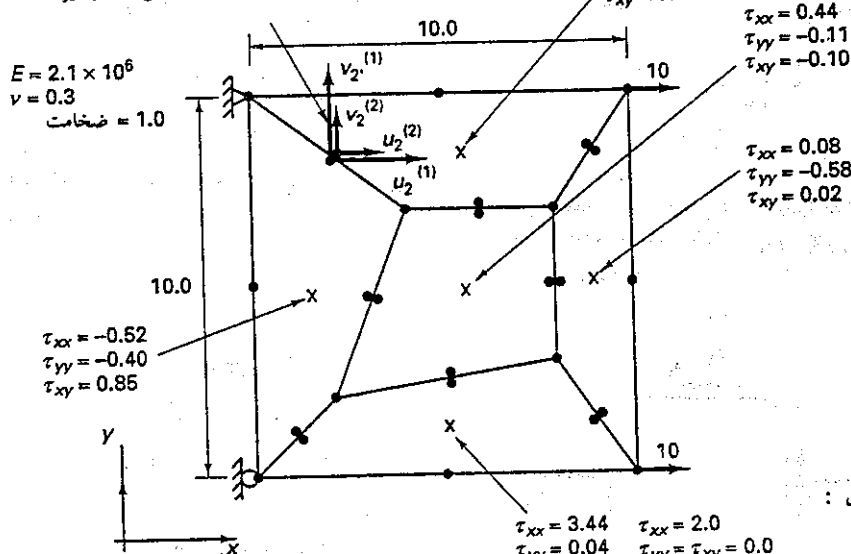
خمشی صفحه‌ای (ر.ک. به: بخش ۵.۴.۲)
(ب) شرایط تنش که باید مورد آزمون قرار گیرند

شکل ۴.۱۷ آزمون‌های حساسیت



(الف) آزمون حساسیت شبکه سازگار متشکل از ۸ عناصر
گره‌ی (بحث شده در بخش ۵.۳.۱). آزمون حساسیت نتیجه مثبت می‌دهد، به عبارت دیگر، تمامی تنش‌های محاسبه شده عناصر مساوی با نیروهای سطحی وارده می‌باشند.

تغییر مکان $v_2(1) = v$ -
در گره ۲ که مربوط به عنصر ۱ می‌باشد و غیره



جواب تحلیلی :

(ب) آزمون حساسیت شبکه ناسازگار متشکل از ۸ عناصر گره‌ی. حالا تمامی گره‌های میانی عناصر، گره‌های مستقل آن عناصر می‌باشند و درجات آزادی در این گره‌ها به عناصر مجاور متصل نشده‌اند. بنابراین در همان مکانی که در شکل (الف) فقط یک گره قرار گرفته است حالا دو گره واقع می‌شوند. نتایج آزمون حساسیت در مرکز عناصر برای نیروهای سطحی خارجی وارده در جهت x نشان داده شده‌اند (توجه شود که فقط گره‌های گوشه‌ای مجموعه کامل همبند عناصر تحت اثر بارهای وارد خارجی می‌باشند).

شکل ۴.۱۸ نتایج آزمون حساسیت با استفاده از هندسه‌های مجموعه همبند عناصر شکل ۴.۱۷

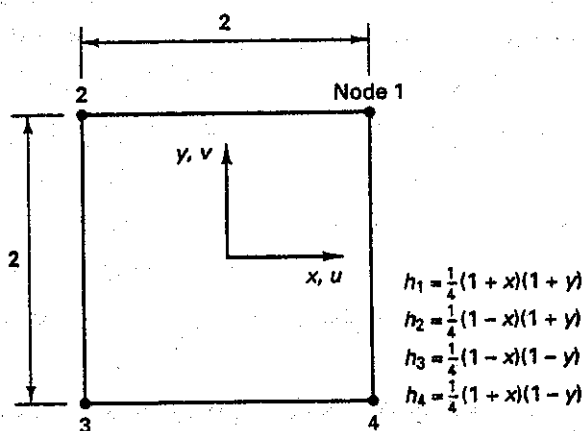
ولی اگر در مرحله بعدی به گره‌های ۱ الی ۸ درجات آزادی منفرد را برای عناصر مجاور اعمال کنیم [چنان که به عنوان مثال، در گره ۲، برای عناصر ۱ و ۲، درجات آزادی u و v را اعمال می‌کنیم]، بگونه‌ای که در این گره‌ها تغییر مکان‌ها به یکدیگر وصل نشوند (و بنابراین ناسازگارهای تغییر مکانی در امتداد لبه‌ها وجود دارد)، در این صورت آزمون حساسیت نتیجه منفی می‌دهد. شکل (ب) ۴.۱۸ برخی نتایج حل را نشان می‌دهد.

در مثال شکل (ب) ۴.۱۸، اساساً از عنصری استفاده شده است که به وسیله [A] E. L. Wilson و R. L. Taylor و W. P. Doherty and J. Ghaboussi پیشنهاد شده است. از آنجا که درجات آزادی گره‌های میانی اضلاع عنصر به عناصر مجاور متصل نشده‌اند، از اینرو می‌توان با استفاده از روش چگالش ایستایی (ر.ک. به: بخش ۸.۲.۴)، عنصر چهارگرهی را به دست آورد. با وجود این، همانگونه که در شکل (ب) ۴.۱۸ نشان داده شده است، عنصر مذکور از آزمون حساسیت پذیرفته نمی‌شود. در مثال بعدی، عنصر مذکور را با جزئیات بیشتر، نخست به صورت یک عنصر مربعی و سپس به صورت یک عنصر چهارضلعی عمومی در نظر می‌گیریم. همچنین اصلاحاتی را در عنصر مذکور اعمال خواهیم کرد بگونه‌ای که همواره از آزمون حساسیت پذیرفته شود (ر.ک. به: [A] E. L. Wilson and A. Ibrahimbegovic).

مثال ۴.۲۸: عنصر مربعی چهارگرهی را با مدهای ناسازگار در شکل (الف) ۴.۲۸ در نظر بگیرید و مشخص کنید که آیا آزمون حساسیت نتیجه مثبت می‌دهد یا نه؟ سپس عنصر چهارضلعی عمومی نشان داده شده در شکل (ب) ۴.۲۸ را در نظر گرفته و بررسی مذکور را برای آن تکرار نمایید.

حل:

مشاهده می‌کنیم که عنصر مربعی حالتی خاص از عنصر چهارضلعی عمومی است. در حقیقت، عنصر چهارضلعی براساس عنصر مربعی فرمول‌بندی می‌شود، ولی از مختصات طبیعی (۳، ۵) در توابع درون‌یابی بگونه‌ای که در بخش ۵.۲ بحث خواهد گردید، استفاده می‌شود. برای فرمول‌بندی این عنصر، می‌توان به طور تحلیلی بررسی کرد که آیا نتیجه آزمون حساسیت مثبت است یا نه و اینکه تحت چه شرایطی این آزمون نتیجه مثبت را به دست می‌دهد. نخست یادآوری می‌کنیم که عنصر چهارگرهی سازگار از آزمون حساسیت پذیرفته می‌شود (به عبارت دیگر، هنگامی که از درون‌یابی‌های تغییر مکان ϕ_1 و ϕ_2 استفاده نمی‌شود). حال فرض می‌کنیم که عنصر تحت شرایط تنش‌های ثابت σ قرار دارد. در این صورت شرط موفقیت در آزمون حساسیت این است که عنصر تحت شرایط تنش ثابت، رفتاری مشابه رفتار عنصر سازگار چهارگرهی داشته باشد.



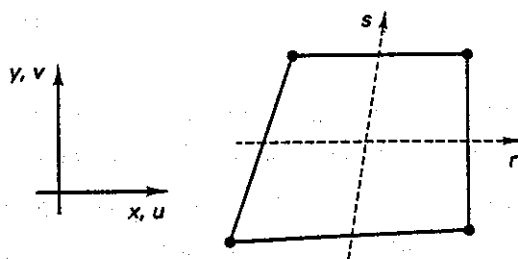
توابع درونیایی تغییر مکان

$$u = \sum_{i=1}^4 h_i u_i + \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2$$

$$v = \sum_{i=1}^4 h_i v_i + \alpha_3 \phi_1 + \alpha_4 \phi_2$$

$$\phi_1 = (1 - x^2); \phi_2 = (1 - y^2)$$

(الف) عنصر مربعی



(ب) عنصر چهارضلعی عمومی (در اینجا h_i و ϕ_i با مختصات

r و s مورد استفاده قرار گرفته‌اند، ر.ک. به: بخش ۵.۲)

شکل E.۴.۲۸ عنصر تنش مسطح چهارگرمی با مدهای ناسازگار، ضخامت ثابت

شرط ریاضی را می‌توان با در نظر گرفتن ماتریس سختی عنصری با مدهای ناسازگار استخراج نمود.

فرض کنید که:

$$\hat{\mathbf{u}}^* = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \alpha \end{bmatrix}$$

یا:

$$\hat{\mathbf{u}}^T = [u_1 \quad \dots \quad u_4 : v_1 \quad \dots \quad v_4]$$

$$\alpha^T = [\alpha_1 \quad \dots \quad \alpha_n]$$

و

$$\epsilon = [\mathbf{B} : \mathbf{B}_{IC}] \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \alpha \end{bmatrix} \quad \text{در اینصورت داریم:}$$

که در آن \mathbf{B} ماتریس معمولی کرنش - تغییر مکان عنصر چهارگره‌ای بوده و \mathbf{B}_{IC} ناشی از اثر مدهای ناسازگار می‌باشد.

بنابراین، با استفاده از نمادگذاری معمول که پیش از این استفاده کرده‌ایم، داریم:

$$\begin{bmatrix} \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV & \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{IC} dV \\ \int_V \mathbf{B}_{IC}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV & \int_V \mathbf{B}_{IC}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{IC} dV \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

در عمل، پارامترهای تغییر مکانی ناسازگار α را می‌توان به طور استاتیکی از فرمول‌بندی خارج نمود تا ماتریس سختی عنصر که تنها متناظر با درجات آزادی $\hat{\mathbf{u}}$ می‌باشد به دست آید.

اگر تغییر مکان‌های نقاط گرهی، به طور فیزیکی مقادیر صحیح $\hat{\mathbf{u}}^e$ برای تنش‌های ثابت ϵ^e باشند، در این صورت داریم:

$$\int_V \mathbf{B}_{IC}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV \hat{\mathbf{u}}^e = \int_V \mathbf{B}_{IC}^T \epsilon^e dV \quad (\text{ب})$$

حال برای اینکه عنصر، تحت شرایط تنش ثابت همچون عنصر سازگار چهارگره‌ای رفتار کند، ضروری است که (از آنجا که عناصر ϵ^e مستقل از یکدیگر می‌باشند):

$$\int_V \mathbf{B}_{IC}^T dV = 0 \quad (\text{پ})$$

به عنوان مثال، هنگامی که (پ) ارضا می‌گردد، از (الف) درمی‌یابیم که:

اگر نیروهای نقاط گرهی عنصر مانند نیروهای مربوط به عنصر سازگار چهارگره‌ای باشند، در این صورت جواب عبارت است از: $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}'^e$ و $\alpha = 0$. البته مشخص است که اگر از $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}'^e$ و $\alpha = 0$ استفاده کنیم، در این صورت از رابطه (الف)، نیروهای نقاط گرهی عنصر سازگار چهارگره‌ای را پیدا می‌کنیم و هیچ گونه نیرویی مربوط به مدهای ناسازگار

به دست نمی آید.

بنابراین تحت شرایط تنش ثابت، عنصر بگونه ای عمل می کند که گویی مدهای ناسازگار وجود نداشتند.

حال به آسانی می توان کنترل کرد که شرط (پ) برای عنصر مربعی تأمین می شود:

$$\int_V \begin{bmatrix} -2x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2y \\ 0 & -2y & -2x & 0 \end{bmatrix} dV = 0$$

و نیز می توان کنترل کرد که شرط مذکور برای عنصر چهارضلعی عمومی فراهم نمی شود (در این جا از تبدیل ژاکوبی که در بخش ۵.۲ ارائه خواهد شد، برای تعیین B_{IC} استفاده می شود). بنابراین، برای ارضای (پ)، ماتریس B_{IC} را با استفاده از B_{IC}^w اصلاح می کنیم و رابطه زیر را به کار می بریم:

$$B_{IC}^w = B_{IC} + B_{IC}^c$$

شرط (پ) در B_{IC}^w نتیجه زیر را به دست می دهد:

$$B_{IC}^c = -\frac{1}{V} \int_V B_{IC} dV$$

در این صورت، ماتریس سختی عنصر با استفاده از B_{IC}^w در رابطه (الف) بجای B_{IC} به دست می آید. در عمل، ماتریس سختی عنصر با استفاده از انتگرال گیری عددی تعیین می شود (ر.ک. به: فصل پنجم) و B_{IC}^c به وسیله انتگرال گیری عددی، پیش از تعیین (الف)، محاسبه می شود.

از آزمون حساسیت که در بالا ارائه گردید، صرفاً برای آزمایش شرایط تنش ثابت استفاده کردیم. اگر می خواهیم که همگرایی تضمین گردد، در این صورت هر مجموعه همبند عناصر ناسازگار باید قادر باشد که چنین شرایطی را به نمایش گذارد.

در اساس، این آزمون حساسیت یک مسأله مقدار مرزی است که در آن نیروهای خارجی از پیش تعیین شده می باشند (نیروهای F^B صفر بوده و نیروهای سطحی F^s ثابت می باشند) و تغییر شکل ها و تنش های اولیه محاسبه می شوند (مدهای صلب جسمی صرفاً کنار گذاشته می شوند تا رسیدن به جواب ممکن باشد). اگر تغییر شکل ها و تنش های ثابت بدرستی پیش بینی شوند، در این صورت نتیجه آزمون حساسیت مثبت می باشد (و چون حداقل تنش های ثابت را می توان بدرستی پیش بینی کرد)، از اینرو همگرایی در تنش ها، حداقل $O(h)$ خواهد بود.

تفسیر مذکور از آزمون حساسیت ما را به این نکته رهنمون می سازد که به طریقه مشابهی نیز می توان مرتبه همگرایی یک گسسته سازی را امتحان نمود. به عنوان مثال، با استفاده از

مفهوم یکسانی، می‌توان نیروهای خارجی را که متناظر با تغییرات از مرتبه بالانری از تنش‌های داخلی می‌باشند اعمال نموده و امتحان کرد که آیا این تنش‌ها بدرستی پیش‌بینی می‌شوند یا نه. به عنوان مثال، برای آزمون اینکه آیا یک گسسته‌سازی، همگرایی مرتبه دوم در تنش‌ها را نتیجه خواهد داد یا نه، به عبارت دیگر آیا همگرایی تنش‌ها $O(h^2)$ می‌باشد یا نه، ضروری است که یک تغییر خطی تنش به درستی نمایش داده شود. از معادلات دیفرانسیل بنیادی تعادل استنتاج می‌کنیم که اعمال مقدار ثابت نیروهای داخلی و نیروهای سطحی مرزی متناظر، خود نوعی آزمون حساسیت است. نتایج عددی مجدداً جالب توجه بوده و همچون حالت آزمون برای شرایط تنش ثابت ارزشمند می‌باشند، ولی تنها نتایج تحلیلی می‌توانند تضمین کنند که برای اعوجاج‌های هندسی موجود در مجموعه همبند عناصر، تنش‌ها و تغییر شکل‌های صحیح به دست می‌آیند (برای بحث و نتیجه‌گیری بیشتر، ر.ک. به: (۵.۳.۳).

البته در عمل، هنگام آزمون فرمول‌بندی‌های عناصر، این طریقه تعیین مرتبه همگرایی اغلب دنبال نمی‌شود و در عوض دنباله‌ای از مسائل آزمونی ساده برای تعیین میزان دقت پیش‌بینی عناصر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

۴.۴.۲ فرمول‌بندی‌های آمیخته

برای فرمول‌بندی عناصر محدود مبتنی بر تغییر مکان، از اصل تغییر مکان‌های مجازی استفاده کردیم که معادل استفاده از شرط مانا بودن انرژی پتانسیل کلی Π می‌باشد (ر.ک. به: مثال ۴.۴). نظریه اساسی مورد استفاده را می‌توان به اختصار به صورت زیر شرح داد:

۱. از رابطه زیر استفاده می‌کنیم. (۱۵)

$$\Pi(u) = \frac{1}{2} \int_V \epsilon^T C \epsilon dV - \int_V u^T f^b dV - \int_{S_f} u_{S_f}^T f_{S_f}^s dS \quad (4.1.9)$$

= stationary

با شرایط:

$$\epsilon = \partial_e u \quad (4.1.10)$$

$$u_{S_u}^e - u_p = 0 \quad (4.1.11)$$

(۱۵) در این بخش، مانند معادله (۴.۷)، نماد $f_{S_f}^s$ را به جای f_S معمول استفاده می‌کنیم تا به طور صریح نشان دهیم که اینها نیروهای سطحی هستند که به S_f اعمال می‌شوند. به طور مشابه، در این بخش نیز نیروهای سطحی $f_{S_u}^e$ تغییر مکان‌های سطحی $u_{S_u}^e$ و u_p را داریم. برای تعریف این کمیت‌ها، به بخش ۴.۲.۱ مراجعه شود.

که در آن $\delta \epsilon$ نمایشگر عملگر دیفرانسیلی روی u برای یافتن مؤلفه‌های کرنش است، بردار u شامل تغییر مکان‌های از پیش پیش‌بینی شده می‌باشد و بردار u^e مؤلفه‌های تغییر مکان متناظر u را دربردارد.

اگر مؤلفه‌های کرنش به صورت (۴.۳) مرتب شوند، در این صورت داریم:

$$u = \begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix}; \quad \delta \epsilon = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}$$

۲. معادلات تعادل با استفاده از شرط مانا بودن Π (نسبت به تغییر مکان‌هایی که در کرنش‌ها ظاهر می‌شوند) به دست می‌آیند:

$$\int_V \delta \epsilon^T C \epsilon \, dV = \int_V \delta u^T f^B \, dV + \int_{S_f} \delta u^T f^S \, dS \quad (4.112)$$

تغییرات در u باید در تغییر مکان‌های از پیش تعیین شده در روی سطح S_u و متناظر با آن صفر باشند. یادآوری می‌کنیم که برای پیدا کردن معادلات دیفرانسیل تعادل و شرایط مرزی (طبیعی) تنش‌ها از رابطه (۴.۱۱۲)، $C \epsilon = \tau$ را جایگزین می‌کنیم و فرایند تبدیل به کار رفته در مثال ۴.۲ را معکوس می‌نماییم (ر.ک. به: بخش‌های ۳.۳.۲ و ۳.۳.۴). بنابراین رابطه تنش - کرنش، شرایط کرنش - تغییر مکان [در رابطه (۴.۱۱۰)] و شرایط مرزی تغییر مکانی [در (۴.۱۱۱)] مستقیماً تأمین می‌شوند و شرط تعادل دیفرانسیلی (در داخل و در مرز) نتیجه‌ای از شرط مانا بودن Π می‌باشد.

۳. در روش عناصر محدود مبتنی بر تغییر مکان، رابطه تنش - کرنش، شرایط کرنش - تغییر مکان [در رابطه (۴.۱۱۰)] و شرایط مرزی تغییر مکانی [در رابطه (۴.۱۱۱)] دقیقاً تأمین می‌شوند، اما معادلات دیفرانسیل تعادل در داخل و شرایط مرزی (طبیعی) تنش‌ها فقط در حالت حدی، هنگامی که تعداد عناصر افزایش پیدا می‌کنند، تأمین می‌گردند. در هنگام استفاده از روابط (۴.۱۰۹) الی (۴.۱۱۲) برای روش عناصر محدود، این نکته

مهم باید مورد توجه قرار گیرد که تنها متغیرهای حل، تغییر مکان‌هایی هستند که باید شرایط مرزی تغییر مکانی در (۴.۱۱۱) و شرایط مناسب اتصال متقابل عناصر را ارضاء نمایند. به محض اینکه تغییر مکان‌ها محاسبه شدند، سایر متغیرهای مورد نظر، نظیر کرنش‌ها و تنش‌ها را می‌توان مستقیماً به دست آورد.

در عمل غالباً فرمول‌بندی عناصر محدود مبتنی بر تغییر مکان مورد استفاده قرار می‌گیرد، با وجود این سایر تکنیک‌ها نیز با موفقیت به کار رفته‌اند و در برخی حالات نیز بسیار مؤثرتر می‌باشند (ر.ک. به: بخش ۴.۴.۳).

برخی فرمول‌بندی‌های بسیار عمومی با استفاده از اصول وردشی، که می‌توان آنها را به عنوان بسط‌هایی از اصل مانا بودن پتانسیل کلی تلقی کرد، به دست می‌آیند. این اصول بسط یافته وردشی نه تنها از تغییر مکان‌ها، بلکه از کرنش‌ها و / یا تنش‌ها به عنوان متغیرهای اولیه استفاده می‌کنند. بنابراین در حل‌های عنصر محدود، متغیرهای مجهول می‌توانند تغییر مکان‌ها و کرنش‌ها و / یا تنش‌ها نیز باشند. به اینگونه فرمول‌بندی‌های عناصر محدود، فرمول‌بندی عناصر محدود آمیخته اطلاق می‌شود.

اصول بسط یافته وردشی متنوعی را می‌توان به عنوان مبنای فرمول‌بندی عناصر محدود استفاده نمود و درونیابی‌های عناصر محدود بسیار متفاوتی را می‌توان به کار برد. تعداد بسیار زیادی فرمول‌بندی‌های عناصر محدود آمیخته پیشنهاد شده‌اند (به عنوان مثال ر.ک. به: [A] H. Kardestuncer and D. H. Norrie (eds) و [A] F. Brezzi and M. Fortin)، ولی هدف ما در این بخش صرفاً ارائه خلاصه‌وار برخی ایده‌های بنیادی می‌باشد که آنها را بعداً، برای فرمول‌بندی برخی روش‌های کارآمد حل مورد استفاده قرار خواهیم داد (ر.ک. به: بخش‌های ۴.۴.۳ و ۵.۴).

برای نیل به یک اصل وردشی عمومی و توانا، رابطه (۴.۱.۹) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \Pi^* &= \Pi - \int_V \lambda_u^T (\epsilon - \partial_s u) dV - \int_{S_u} \lambda_u^T (u^{su} - u_p) dS \\ &= \text{stationary} \end{aligned} \quad (4.113)$$

که در آن λ_u و ضرایب Lagrange بوده و S_u سطحی است که در روی آن تغییر مکان‌ها از پیش تعیین شده می‌باشند. در اینجا از ضرایب Lagrange برای اعمال شرایط (۴.۱۱۰) و (۴.۱۱۱) استفاده می‌شود (ر.ک. به: بخش ۳.۴). متغیرها در (۴.۱۱۳)، u و ϵ و λ_u می‌باشند. با استفاده از $\delta \Pi^* = 0$ ، ضرایب Lagrange λ_u و λ_ϵ به ترتیب به عنوان تنش‌های τ و نیروهای سطحی f^{su} که در روی سطح S_u عمل می‌کنند مشخص می‌شوند، به گونه‌ای که نشانگر وردشی (۴.۱۱۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\Pi_{HW} = \Pi - \int_V \tau^T (\epsilon - \partial_e u) dV - \int_{S_u} f^{S_u T} (u^{S_u} - u_p) dS \quad (۴.۱۱۴)$$

به تابع مذکور، تابع Hu-Washizu اطلاق می‌شود (ر.ک. به: K. Washizu [A,B], H. C. Hu [A]). متغیرهای مستقل در این تابع، تغییر مکان‌های U و کرنش‌های ϵ ، تنش‌های τ و نیروهای سطحی f^{S_u} می‌باشند. از این تابع می‌توان برای استخراج شمار دیگری از تابع‌ها، نظر تابع‌های Hellinger-Reissner (ر.ک. به: E. Hellinger [A] و E. Reissner [A])، مثال‌های ۴.۳۰ و ۴.۳۱ و تمرین ۴.۳۶ و تابع مینیم انرژی مکمل استفاده نمود و آن را می‌توان به عنوان پایه بسیاری از روش‌های عناصر محدود تلقی نمود (ر.ک. به: T. H. H. Pian and P. Tong [A], H. Kardestuncer and D. H. Norrie (eds) [A] و (W. Wunderlich [A]).

با استفاده از شرط مانا بودن Π_{HW} نسبت به u و ϵ و τ و f^{S_u} ، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} & \int_V \delta \epsilon^T C \epsilon dV - \int_V \delta u^T f^S dV - \int_{S_f} \delta u^{S_f T} f^{S_f} dS - \int_V \delta \tau^T (\epsilon - \partial_e u) dV \\ & - \int_V \tau^T (\delta \epsilon - \partial_e \delta u) dV - \int_{S_u} \delta f^{S_u T} (u^{S_u} - u_p) dS - \int_{S_u} f^{S_u T} \delta u^{S_u} dS = 0 \quad (۴.۱۱۵) \end{aligned}$$

که در آن S_f سطحی می‌باشد که در آن نیروهای سطحی معلوم اعمال می‌شوند. این موضوع نشان می‌دهد که فرمول‌بندی وردشی Hu-Washizu را می‌توان به عنوان تعمیم اصل تغییر مکان مجازی تلقی کرد، که در آن شرایط مرزی تغییر مکانی و شرایط سازگاری کرنش‌ها در نظر گرفته نشده‌اند ولی آنها بعداً با استفاده از ضرایب Lagrange اعمال می‌شوند و تغییرات در روی تمامی تغییر مکان‌ها، کرنش‌ها، تنش‌ها و نیروهای سطحی مجهول انجام می‌گیرند. بنابراین اصل مذکور در حقیقت یک توصیف بسیار عمومی و معتبر شرایط ایستایی و سینماتیکی جسم مورد نظر می‌باشد و از آنجا که (۴.۱۱۵) باید به ازای تمامی تغییرات انفرادی مورد استفاده صادق باشد، از این‌رو (۴.۱۱۵) نتایج زیر حاصل می‌گردند.

برای حجم جسم:

شرط تنش-کرنش:

$$\tau = C \epsilon \quad (۴.۱۱۶)$$

شرط سازگاری:

$$\epsilon = \partial_i u \quad (4.117)$$

شرایط تعادل:

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x^B = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y^B = 0 \quad (4.118)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + f_z^B = 0$$

برای سطح جسم:

نیروهای سطحی وارده با تنش‌ها متعادل می‌شوند:

$$f^S_f = \bar{\tau} n \quad \text{on } S_f \quad (4.119)$$

واکنش‌های تکیه‌گاهی با تنش‌ها متعادل می‌شوند:

$$f^S_u = \bar{\tau} n \quad \text{on } S_u \quad (4.120)$$

که در آن n بردار واحد عمود بر سطح را نشان می‌دهد و $\bar{\tau}$ در شکل ماتریسی، مؤلفه‌های بردار τ را دربردارد.

تغییر مکان‌ها در S_u مساوی تغییر مکان‌های از پیش تعیین شده می‌باشند:

$$u^S_u = u_p \quad \text{on } S_u \quad (4.121)$$

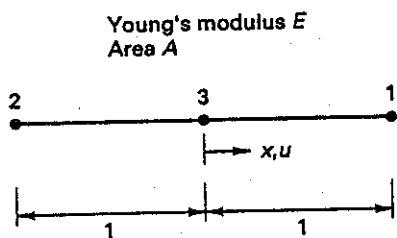
فرمول‌بندی وردشی (4.115) نمایشگر یک فرمول‌بندی بسیار عمومی محدود آمیخته

مسائل ارتجاعی است.

حال اگر روش‌های مختلف حل عناصر محدود را در نظر بگیریم، ملاحظه می‌کنیم که اصل وردشی Hu-Washizu و اصول ناشی از آن را می‌توان مستقیماً برای استخراج گسسته‌سازی‌های متنوع عناصر محدود به کار برد. در این روش‌های حل عناصر محدود، شرایط پیوستگی در متغیرهای عناصر محدود بین عناصر و در مرزها باید مستقیماً ارضا شوند یا اینکه به وسیله ضرایب Lagrange اعمال گردند. حال مشخص می‌شود که با این انعطاف‌پذیری که به فرمول‌بندی روش‌های عناصر محدود اضافه می‌شود، تعداد بسیار زیادی از گسسته‌سازی‌های مختلف عناصر محدود را می‌توان استخراج نمود که البته بستگی به اصل وردشی دارند که به عنوان پایه فرمول‌بندی استفاده می‌شود و یا به توابع درونی‌یابی عناصر محدود و چگونگی

اعمال شرایط پیوستگی وابسته‌اند. روش‌های گسسته‌سازی مختلف متنوع به عنوان فرمول‌بندی‌های مختلط و آمیخته طبقه‌بندی شده‌اند (ر.ک. به: [A] H. Kardestuncer and D. H. Norrie(eds.) و [A] T. H. H. Pian and P. Tong). کاربرد اصل Hu-Washizu را در مثال‌های زیر نشان می‌دهیم.

مثال ۴.۲۹: عنصر خربایی سه گرهی نشان داده شده در شکل ۴.۲۹ E را در نظر بگیرید. یک تغییر سهموی را برای تغییر مکان و یک تغییر خطی را برای تنش و کرنش فرض کنید. همچنین فرض نمایید که متغیرهای تنش و کرنش متناظر با درجه آزادی داخلی عنصر می‌باشند، به گونه‌ای که تنها تغییر مکان‌ها در گره‌های ۱ و ۲ به عناصر مجاور اتصال می‌یابند. اصل وردشی Hu - Washizu را برای محاسبه ماتریس سختی عنصر به کار ببرید.



شکل ۴.۲۹ عنصر خربایی سه گرهی

حل:

می‌توان مستقیماً با (۴.۱۱۰) آغاز کرد تا نتیجه زیر را به دست آورد:

$$\underbrace{\int_V \delta \epsilon^T (C \epsilon - \tau) dV}_{(1)} - \underbrace{\int_V \delta \tau^T (\epsilon - \partial_\epsilon u) dV}_{(2)} + \underbrace{\int_V (\partial_\epsilon \delta u)^T \tau dV}_{(3)} - \int_V \delta u^T f^B dV + \text{boundary terms} = 0 \quad (\text{الف})$$

که در آن داریم:

$$\epsilon = \epsilon_{xx}; \quad \partial_\epsilon = \frac{\partial}{\partial x}; \quad \tau = \tau_{xx}; \quad C = E; \quad f^B = f_x^B$$

عبارات مرزی، مربوط به عبارات δf و δu می‌باشند و در تعیین ماتریس سختی عنصر مورد نیاز نیستند.

حال درونیابی‌های زیر را به کار می‌بریم:

$$u = H\hat{u}; \quad H = \begin{bmatrix} \frac{(1+x)x}{2} & -\frac{(1-x)x}{2} & 1-x^2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{u}^T = [u_1 \quad u_2 \quad u_3]$$

$$\tau = E\hat{\tau}; \quad E = \begin{bmatrix} \frac{1+x}{2} & \frac{1-x}{2} \end{bmatrix}$$

$$\epsilon = E\hat{\epsilon}$$

$$\hat{\tau}^T = [\tau_1 \quad \tau_2]; \quad \hat{\epsilon}^T = [\epsilon_1 \quad \epsilon_2]$$

از جایگذاری توابع درونیابی در (الف)، متناظر با عبارت ۱، نتیجه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\delta \hat{\epsilon}^T \left[\left(\int_V E^T C E dV \right) \hat{\epsilon} - \left(\int_V E^T E dV \right) \hat{\tau} \right]$$

و متناظر با عبارت ۲:

$$\delta \hat{\tau}^T \left[- \left(\int_V E^T E dV \right) \hat{\epsilon} + \left(\int_V E^T B dV \right) \hat{u} \right]$$

و متناظر با عبارت ۳:

$$\delta \hat{u}^T \left(\int_V B^T E dV \right) \hat{\tau}$$

که در آنها داریم:

$$B = \left[\left(\frac{1}{2} + x \right) \quad \left(-\frac{1}{2} + x \right) \quad -2x \right]$$

بنابراین، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & K_{\epsilon\tau} \\ 0 & K_{\epsilon\epsilon} & K_{\epsilon\tau} \\ K_{\tau\epsilon}^T & K_{\tau\tau}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \hat{\epsilon} \\ \hat{\tau} \end{bmatrix} = \dots \quad (\text{ب})$$

$$K_{ee} = \int_V E^T C E \, dV \quad \text{که در آن داریم:}$$

$$K_{et} = \int_V B^T E \, dV$$

$$K_{et} = - \int_V E^T E \, dV \quad \text{و}$$

حال اگر عبارات مربوط به B و E را جایگذاری کنیم و درجات آزادی e_i و t_i را حذف نماییم (زیرا آنها فرض می‌شوند که صرفاً متعلق به این عنصر می‌باشند، بنابراین پرش‌ها در تنش‌ها و کرنش‌ها بین عناصر مجاور را میسر می‌سازند)، از (ب) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{EA}{6} \begin{bmatrix} 7 & 1 & -8 \\ 1 & 7 & -8 \\ -8 & -8 & 16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \dots$$

این ماتریس سختی با ماتریس سختی یک عنصر خربایی سه گرهی مبتنی بر تغییر مکان یکسان است، و البته با استفاده از یک فرض کرنش خطی و تغییر مکان سهموی باید انتظار چنین نتیجه‌ای را داشته باشیم.

با وجود این باید دانست که اگر متغیرهای تنش و کرنش عنصر در این مرحله از فرمول‌بندی حذف نشوند و در عوض این متغیرها برای اعمال پیوستگی در کرنش و تنش بین عناصر مورد استفاده قرار گیرند، در این صورت مشخص است که با ماتریس سختی عنصر که در (ب) ارائه شده است، ماتریس سختی کل مجموعه همبسته عناصر، مثبت معین نخواهد بود.

مشخص است که این‌گونه استخراج ماتریس سختی را می‌توان برای پیدا کردن ماتریس‌های سختی عناصر خربایی با فرض‌های مختلف تغییر مکان، تنش و کرنش بسط داد. با وجود این، تنها هنگامی که درونیابی‌ها با «قضاوت معقول» انتخاب شوند و واقعاً شرایط خاصی را تأمین نمایند، در این صورت یک عنصر سودمند به دست خواهد آمد (ر.ک. به: بخش ۴.۵).

مثال ۴.۳۰: عنصر تیری دو گرهی نشان داده شده در شکل ۴.۳۰ را در نظر بگیرید. تغییر خطی در تغییر مکان جانبی w و در دوران مقطع θ را فرض کنید و کرنش برشی جانبی γ را ثابت بگیرید. معادلات عناصر محدود را ایجاد نمایید.

حل:

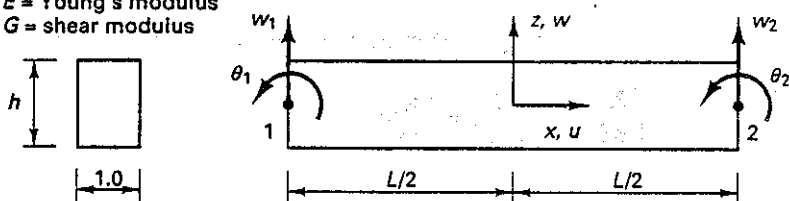
فرض می‌کنیم که تنش‌ها برحسب کرنش‌ها داده شده‌اند و لذا می‌توان $\epsilon = C \epsilon$ را در

(۴.۱۱۴) جایگذاری کرد تا نتیجه زیر حاصل شود:

$$\Pi_{HR}^* = \int_V \left(-\frac{1}{2} \epsilon^T C \epsilon + \epsilon^T C \partial_e u - u^T f^B \right) dV + \text{boundary terms} \quad (\text{الف})$$

این نشانگر وردشی، یک تابع Hellinger-Reisner نیز می‌باشد، ولی اگر (الف) را با تابع ارائه شده در تمرین ۴.۳۶ مقایسه کنیم، مشاهده می‌نماییم که در این جا کرنش‌ها و تغییر مکان‌ها متغیرهای مستقلی می‌باشند (به عوض تنش‌ها و تغییر مکان‌ها در تمرین ۴.۳۶).

E = Young's modulus
 G = shear modulus



شکل ۴.۳۰ عنصر تیری دوگره‌ای

در این فرمول‌بندی تیری u و w و γ_{xz}^{AS} متغیر می‌باشند (اندیس بالای AS مقدار ثابت فرض شده را نشان می‌دهد). بنابراین کرنش خمشی ϵ_{xx} از تغییر مکان به دست می‌آید و رابطه (الف) را می‌توانیم به صورت خاص برای این مسأله به کار می‌بریم:

$$\tilde{\Pi}_{HR}^* = \int_V \left(\frac{1}{2} \epsilon_{xx} E \epsilon_{xx} - \frac{1}{2} \gamma_{xz}^{AS} G \gamma_{xz}^{AS} + \gamma_{xz}^{AS} G \gamma_{xz} - u^T f^B \right) dV + \text{boundary terms}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ w \end{bmatrix}; \quad \epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}; \quad \text{که در آن داریم:}$$

حال با استفاده از $\delta \tilde{\Pi}_{HR}^* = 0$ ، متناظر با δu نتیجه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\int_V (\delta \epsilon_{xx} E \epsilon_{xx} + \delta \gamma_{xz} G \gamma_{xz}^{AS}) dV = \int_V \delta u^T f^B dV \quad (\text{ب})$$

و متناظر با $\delta \gamma_{xz}^{AS}$:

$$\int_V \delta \gamma_{xz}^{AS} G (\gamma_{xz} - \gamma_{xz}^{AS}) dV = 0 \quad (\text{پ})$$

فرض کنید که:

$$\hat{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix}; \quad \hat{\boldsymbol{\epsilon}} = [\gamma^{AS}]$$

در این صورت می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{H}\hat{\mathbf{u}}; & \boldsymbol{\epsilon}_{ee} &= \mathbf{B}_e \hat{\mathbf{u}} \\ \gamma_{xz} &= \mathbf{B}_s \hat{\mathbf{u}}; & \gamma_{xz}^{AS} &= \mathbf{B}_s^{AS} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \end{aligned}$$

از جایگذاری در (ب) و (پ) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{ue} \\ \mathbf{K}_{ue}^T & \mathbf{K}_{ee} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_B \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (\text{ت})$$

که در آن داریم:

$$\mathbf{K}_{uu} = \int_V \mathbf{B}_b^T \mathbf{E} \mathbf{B}_b dV; \quad \mathbf{K}_{ue} = \int_V \mathbf{B}_s^T \mathbf{G} \mathbf{B}_s^{AS} dV$$

$$\mathbf{K}_{ee} = - \int_V (\mathbf{B}_s^{AS})^T \mathbf{G} \mathbf{B}_s^{AS} dV; \quad \mathbf{R}_B = \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{f}^B dV$$

حال می‌توان با استفاده از چگالش استاتیکی در روی $\hat{\boldsymbol{\epsilon}}$ ، ماتریس سختی عنصر را به دست آورد:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{uu} - \mathbf{K}_{ue} \mathbf{K}_{ee}^{-1} \mathbf{K}_{ue}^T$$

در این حالت، داریم:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{z}{L}\left(\frac{L}{2} - x\right) & 0 & -\frac{z}{L}\left(\frac{L}{2} + x\right) \\ \frac{1}{L}\left(\frac{L}{2} - x\right) & 0 & \frac{1}{L}\left(\frac{L}{2} + x\right) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{z}{L} & 0 & -\frac{z}{L} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_s = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & -\frac{1}{L}\left(\frac{L}{2} - x\right) & \frac{1}{L} & -\frac{1}{L}\left(\frac{L}{2} + x\right) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_s^{AS} = [1]$$

به گونه‌ای که:

$$K = \begin{bmatrix} \frac{Gh}{L} & \frac{Gh}{2} & -\frac{Gh}{L} & \frac{Gh}{2} \\ \frac{Gh}{2} & \left(\frac{GhL}{4}\right) + \frac{Eh^3}{12L} & -\frac{Gh}{2} & \left(\frac{GhL}{4}\right) - \frac{Eh^3}{12L} \\ -\frac{Gh}{L} & -\frac{Gh}{2} & \frac{Gh}{L} & -\frac{Gh}{2} \\ \frac{Gh}{2} & \left(\frac{GhL}{4}\right) - \frac{Eh^3}{12L} & -\frac{Gh}{2} & \left(\frac{GhL}{4}\right) + \frac{Eh^3}{12L} \end{bmatrix} \quad (ث)$$

جالب توجه است که یک فرمول‌بندی تغییر مکان صرف ماتریس سختی بسیار مشابهی را نتیجه خواهد داد. تنها تفاوت این است که عباراتی که با دایره مشخص شده‌اند در موقعیت‌های قطری، $GhL/3$ و در موقعیت‌های غیرقطری، $GhL/6$ خواهند بود. با وجود این میزان دقت پیش‌بینی فرمول‌بندی مبتنی بر تغییر مکان صرف به طور شدیدی متفاوت است و هنگامی که عنصر نازک می‌باشد، رفتاری با سختی بسیار زیاد را نشان می‌دهد (این پدیده را در بخش‌های ۴.۵.۷ و ۵.۴.۱ بحث خواهیم کرد).

توجه شود که اگر یک بردار تغییر مکان متناظر با دوران‌های مقطع را فرض کنیم:

$$\hat{u} = [0 \quad \alpha \quad 0 \quad -\alpha]$$

در این صورت با استفاده از (ث)، عنصر موردنظر صرفاً سختی خمشی را نمایش خواهد داد، در حالی که عنصر مبتنی بر تغییر مکان صرف یک سهم برشی نادرست را نشان می‌دهد. سرانجام باید یادآوری کنیم که ماتریس سختی (ث) متناظر با ماتریسی است که با استفاده از روش درون‌یابی آمیخته که با جزییات مربوطه در بخش ۵.۴۱ بحث خواهد شد، به دست می‌آید. به عنوان مثال، اگر از آخرین معادله (ت) که متناظر با معادله (پ) می‌باشد استفاده کنیم، در این صورت نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\gamma_{xz}^{AS} = \frac{w_2 - w_1}{L} - \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$$

که نشان می‌دهد که کرنش برشی فرضی مساوی مقدار کرنش برشی در نقطه میانی تیر است که از تغییر مکان‌های نقاط گرهی محاسبه شده است.

همان‌گونه که در بالا اشاره شد، اصل Hu-Washizu، شالوده‌ای را برای استخراج اصول وردشی متنوعی فراهم می‌نماید و با استفاده از آن گسسته‌سازی‌های عناصر محدود آمیخته بسیار مختلفی را می‌توان طراحی کرد. با وجود این، مؤثر بودن گسسته‌سازی عناصر محدود خاصی برای تحلیل‌های عملی، بستگی به عوامل متعددی دارد، از جمله اینکه آیا روش

مورد نظر برای رده خاصی از کاربردها عمومیت دارد یا نه و آیا با یک نرخ همگرایی به حد کافی زیاد، پایدار می‌باشد یا نه و روش مذکور تا چه میزانی از نظر محاسباتی کارایی دارد و نیز چگونه با سایر طرح‌ها و روش‌های دیگر مقایسه می‌شود. با اینکه گسسته‌سازی عناصر محدود آمیخته می‌تواند در مقایسه با گسسته‌سازی استاندارد مبتنی بر تغییر مکان برخی امتیازها را در تحلیل‌های معینی ارائه دهد، با وجود این دو حوزه بزرگی وجود دارد که استفاده از عناصر آمیخته بسیار کاراتر از کاربرد عناصر مبتنی بر تغییر مکان صرف می‌باشد. این دو حوزه، تحلیل محیط نسبتاً تراکم‌ناپذیر و تحلیل سازه‌های صفحه‌ای و پوسته‌ای می‌باشند (ر.ک. به: بخش بعدی و بخش ۵.۴).

۴.۴.۳. درون‌یابی آمیخته، فرمول‌بندی‌های تغییر مکان / فشار برای تحلیل محیط تراکم‌ناپذیر

روش عناصر محدود مبتنی بر تغییر مکان که در بخش ۴.۲ توصیف گردید، به علت سادگی و مؤثر بودن عمومی آن، به طور وسیعی مورد استفاده قرار می‌گیرد. با وجود این، دو نوع مسأله وجود دارد که در آنها عناصر محدود مبتنی بر تغییر مکان صرف به حد کافی مؤثر نمی‌باشند، که عبارتند از: تحلیل محیط تراکم‌ناپذیر (یا تقریباً تراکم‌ناپذیر) و تحلیل پوسته‌ها و صفحات. در هر یک از این حالات، یک روش درون‌یابی آمیخته - که می‌توان آن را به عنوان کاربرد خاص اصل وردشی Hu-Washizu تلقی کرد - بسیار کاراتر می‌باشد.

در بخش ۵.۴ در مورد درون‌یابی آمیخته برای تحلیل تیر، صفحه و پوسته بحث خواهیم کرد و در اینجا نیز تحلیل محیط تراکم‌ناپذیر را مورد ملاحظه قرار خواهیم داد. اگرچه با حل محیط جامد تراکم‌ناپذیر مواجه خواهیم شد، ولی نکات اساسی این روش حل در تحلیل سیالات تراکم‌ناپذیر نیز مستقیماً قابل کاربرد می‌باشند (ر.ک. به: بخش ۷.۴). به عنوان مثال عناصری که به اختصار در جداول ۴.۶ و ۴.۷ (در پایان این بخش) ارائه شده‌اند، به طور مؤثری در حل جریان سیالات نیز مورد استفاده قرار می‌گیرند.

معادلات دیفرانسیل بنیادی برای تحلیل محیط تراکم‌ناپذیر

در تحلیل جامدات، اغلب ضروری است که مصالح به صورت تقریباً تراکم‌ناپذیر در نظر گرفته شود. به عنوان مثال مصالحی شبیه لاستیک و مصالح در شرایط غیرالاستیک ممکن است که یک پاسخ تقریباً تراکم‌ناپذیر را از خود نشان دهند. در حقیقت اثرات تراکم‌ناپذیری ممکن است به اندازه‌ای کوچک باشند که بتوان از آنها صرف نظر کرد که در این حالت مصالح به صورت کاملاً تراکم‌ناپذیر ایده‌آل‌سازی خواهد شد.

یک نکته اساسی در تحلیل محیط تقریباً تراکم‌ناپذیر این است که پیش‌بینی دقیق فشار مشکل است. در ارتباط با این امر که به چه میزانی مصالح، واقعاً تراکم‌ناپذیر است، روش عناصر محدود مبتنی بر تغییر مکان ممکن است باز هم جواب‌های دقیقی را فراهم نماید. ولی تعداد عناصر مورد نیاز برای حصول به دقت حل مورد نظر معمولاً بسیار بیشتر از تعداد عناصر مورد نیاز برای همان تحلیل با مصالح تراکم‌پذیر می‌باشد.

برای نشان دادن مشکل اساسی با جزییات بیشتر، بار دیگر جسم سه بعدی شکل ۴.۱ را در نظر بگیرید. مصالح جسم ایزوتروپیک‌اند و به وسیله ضریب ارتجاعی E و ضریب پواسون ν توصیف می‌گردند.

با استفاده از نمادگذاری اندیسی، معادلات دیفرانسیل حاکم برای این جسم عبارتند از (ر.ک. به: مثال ۴.۲):

$\tau_{ij,j} + f_i^B = 0$	throughout the volume V of the body	(۴.۱۲۲)
$\tau_{ij}n_j = f_i^S$	on S_f	(۴.۱۲۳)
$u_i = u_i^S$	on S_u	(۴.۱۲۴)

اگر جسم از مصالح تقریباً تراکم‌ناپذیر ساخته شود، انتظار داریم که کرنش‌های حجمی در مقایسه با کرنش‌های انحراف‌دار کوچک باشند و از اینرو روابط مشخصه را به صورت زیر استفاده می‌کنیم (ر.ک. به: تمرین ۴.۳۹):

$\tau_{ij} = \kappa \epsilon_v \delta_{ij} + 2G\epsilon_{ij}$

(۴.۱۲۵)

که در آن κ ضریب تغییر حجمی می‌باشد:

$$\kappa = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (۴.۱۲۶)$$

ϵ_v کرنش حجمی است:

$$\epsilon_v = \epsilon_{kk} \quad (۴.۱۲۷)$$

$$= \frac{\Delta V}{V} (= \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} + \epsilon_{zz} \text{ in Cartesian coordinates})$$

δ_{ij} دلتای Kronecker می‌باشد:

$$\delta_{ij} \begin{cases} = 1; & i = j \\ = 0; & i \neq j \end{cases} \quad (۴.۱۲۸)$$

ϵ'_{ij} مؤلفه‌های کرنش انحراف‌دار می‌باشند:

$$\epsilon'_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{\epsilon_v}{3} \delta_{ij} \quad (4.129)$$

و G ضریب برشی است:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (4.130)$$

برای فشار در جسم نیز رابطه زیر را داریم:

$$p = -K\epsilon_v \quad (4.131)$$

که در آن

$$p = -\frac{\tau_{kk}}{3} \left(= -\frac{\tau_{xx} + \tau_{yy} + \tau_{zz}}{3} \text{ in Cartesian coordinates} \right) \quad (4.132)$$

حال فرض کنید که K را به تدریج افزایش می‌دهیم (با افزایش ضریب پواسون ν تا اینکه به $0/5$ برسد). در این صورت به میزانی که K افزایش پیدا می‌کند، کرنش حجمی ϵ_v کاهش پیدا کرده و بسیار کوچک می‌شود.

در حقیقت، در حالت تراکم‌ناپذیری کامل ν کاملاً مساوی $0/5$ است، از اینرو ضریب تغییر حجمی بی‌نهایت خواهد بود و نیز کرنش حجمی مساوی صفر و فشار نیز البته متناهی (و از مرتبه نیروهای سطحی مرزی وارده خواهد شد). در این صورت مؤلفه‌های تنش به صورت زیر بیان می‌گردند [ر.ک. به: (4.125) و (4.131)]:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2G\epsilon'_{ij} \quad (4.133)$$

و در حل معادلات دیفرانسیل حاکم (4.122) الی (4.124) از تغییر مکان‌ها و فشار به عنوان متغیرهای مجهول استفاده خواهد شد.

همچنین هنگامی که تراکم‌ناپذیری مصالح در نظر گرفته می‌شود و تغییر مکان‌ها در سطح کامل جسم از پیش تعیین شده می‌باشند، به عبارت دیگر موقعی که حالت خاص $K = \infty$ و $K_f = 0$ را داریم، در این صورت ضروری است که توجه خاصی نیز به شرایط مرزی (4.123) و (4.124) معطوف شود. اگر مصالح کاملاً تراکم‌ناپذیر باشد نخستین شرط این است که تغییر مکان‌های از پیش تعیین شده u_f باید سازگار با کرنش حجمی صفر در سرتاسر جسم باشند. این نکته فیزیکی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\epsilon_{ii} = 0 \quad \text{throughout } V \quad (4.134)$$

بنابراین داریم:

$$\int_V \epsilon_{ii} dV = \int_S u^s \cdot n dS = 0 \quad (۴.۱۳۵)$$

که در آن از قضیه دیورژانس استفاده کردیم و n بردار واحد عمود بر سطح جسم می‌باشد. بنابراین، تغییر مکان‌های از پیش تعیین شده عمود بر سطح جسم باید بگونه‌ای باشند که حجم جسم ثابت باقی بماند. مشخص است که اگر تغییر مکان‌های سطحی از پیش تعیین شده صفر باشند (ذرات روی سطح جسم تغییر مکان نکنند)، در این صورت شرط مذکور به طور خودکار تأمین خواهد شد.

با این فرض که سازگاری کرنش حجمی / تغییر مکان‌های مرزی برای حالت $S_{ii} = S$ تأمین می‌شود، در این صورت شرط دوم این است که فشار باید در برخی نقاط جسم از پیش تعیین شده باشد. در غیراین صورت، فشار منحصر به فرد نیست زیرا یک فشار دلخواه ثابت هیچگونه تغییر شکلی را موجب نخواهد شد. تنها هنگامی که هر دو شرط تأمین شوند، مسأله به نحو مطلوبی آماده حل می‌باشد.

البته شرط تغییر مکان‌های از پیش تعیین شده در سطح کامل جسم تقریباً یک حالت خاص در تحلیل جامدات می‌باشد، ولی اغلب با وضعیتی مشابه در مکانیک سیالات روبرو می‌شویم. در مکانیک سیالات سرعتها ممکن است که در سرتاسر مرز میدان سیال از پیش تعیین شده باشند (ر.ک. به: فصل هفتم).

اگرچه در این جا یک محیط کاملاً تراکم‌ناپذیر را در نظر گرفتیم، با وجود این روشن است که این نکات هنگامی که مصالح تقریباً تراکم‌ناپذیر می‌باشد، نیز حائز اهمیت است - نقض شرایط مورد بحث منجر به یک مسأله بدنام خواهد شد.

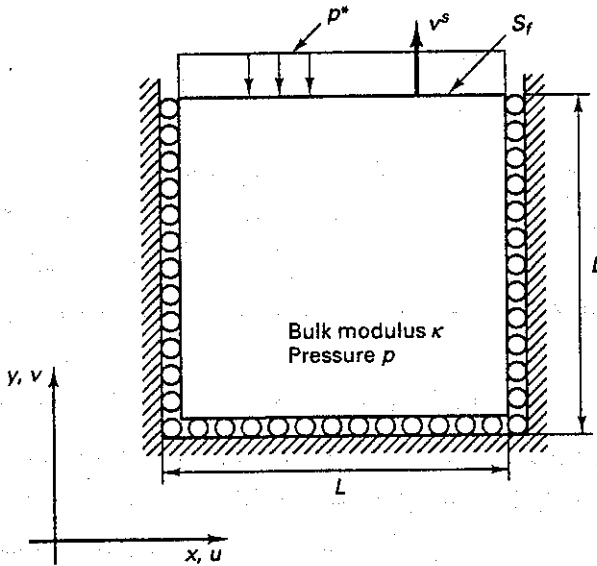
البته، این نکات در ارتباط با کاربرد اصل کار مجازی نیز مطرح می‌باشند. یک مثال ساده را که در شکل ۴.۱۹ نشان داده شده است در نظر می‌گیریم. از آنجا که تنها انرژی کرنش حجمی وجود دارد، اصل کار مجازی برای این حالت نتیجه زیر را به دست می‌دهد:

$$\int_V \bar{\epsilon}_{VKEV} dV = - \int_{S_f} \bar{v}^s p^* dS \quad (۴.۱۳۶)$$

اگر ضریب تغییر حجمی κ متناهی باشد، از رابطه (۴.۱۳۶) مستقیماً نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\bar{v}^s = - \frac{p^* L}{\kappa} \quad (۴.۱۳۷)$$

$$p = p^* \quad (۴.۱۳۸)$$



شکل ۴.۱۹. بلوک مصالح در شرایط کرنش مسطح که در معرض فشار سطحی یکنواخت p^* می‌باشد.

ولی اگر κ بی‌نهایت باشد، ضروری است به جای (۴.۱۳۶)، از اصل کار مجازی به صورت زیر که در آن فشار p به عنوان مجهول انتخاب می‌گردد، استفاده شود:

$$\int_V \bar{\epsilon}_v(-p) dV = - \int_{S_f} \bar{v}^s p^* dS \quad (4.139)$$

و دوباره نتیجه $p = p^*$ حاصل می‌شود. البته در حل (۴.۱۳۹) از روابط مشخصه استفاده نمی‌شود، بلکه تنها شرط تعادل در نظر گرفته می‌شود.

حل عناصر محدود شرایط تقریباً تراکم‌ناپذیر

در مبحث پیشین دیدیم هنگامی که در تحلیل یک محیط تقریباً تراکم‌ناپذیر از روش عناصر محدود مبتنی بر تغییر مکان صرف استفاده می‌شود، مشکلات قابل توجهی را باید انتظار داشت. کرنش حجمی بسیار کوچک که در حالت حدی یک محیط کاملاً تراکم‌ناپذیر به صفر میل می‌کند، از مشتقات تغییر مکان تعیین می‌شود، ولی میزان دقت پیش‌بینی آن کمتر از میزان دقت تعیین تغییر مکان‌ها می‌باشد. هرگونه خطایی در کرنش حجمی پیش‌بینی شده به صورت خطای بزرگی در تنش‌ها خود را نشان خواهد داد و این خطا به نوبه خود در دقت پیش‌بینی تغییر مکان‌ها اثر خواهد داشت، زیرا بارهای خارجی (با استفاده از اصل کار مجازی) با تنش‌ها

متوازن خواهند شد. بنابراین، در عمل برای رسیدن به دقت مطلوب در جوابها، استفاده از یک گسسته‌سازی عناصر محدود بسیار ریز ضروری است.

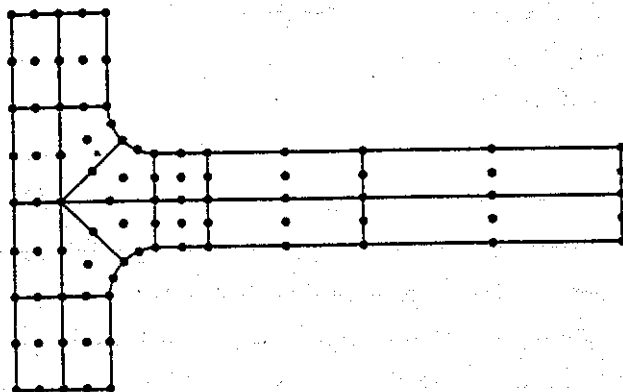
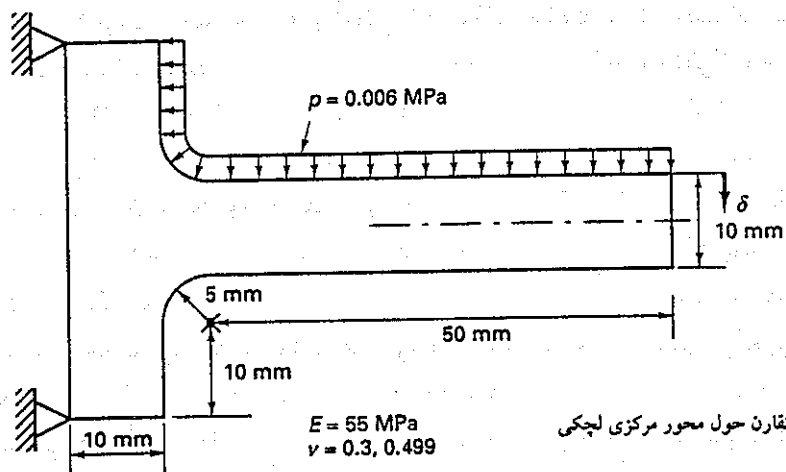
شکل ۴.۲۰ برخی نتایج حاصله از تحلیل یک لچکی طره‌ای را که تحت اثر بارگذاری فشاری می‌باشد، نشان می‌دهد. در تحلیل این مدل شرایط کرنش مسطح در نظر گرفته شده و از ضرایب پواسون $\nu = 0/30$ و $\nu = 0/499$ استفاده می‌شود. در تمامی حل‌ها، از عناصر مبتنی بر تغییر مکان ۹ گرهی استفاده شده است (با انتگرال‌گیری گوسی 3×3 ؛ ر.ک. به: بخش ۵.۵.۵). یک شبکه درشت و یک شبکه ریز استفاده می‌شود و شکل (الف) ۴.۲۰ یک ایده‌آل‌سازی درشت با استفاده از ۱۶ عنصر را نشان می‌دهد. نتایج حل برای تنش اصلی ماکزیمم σ_1 با استفاده از نمایش تک‌نواری بحث شده در شکل ۴.۳.۶ نشان داده شده است. در اینجا عرض نوار را بگونه‌ای انتخاب کرده‌ایم که بتوانیم عملکرد نسبتاً ضعیف عناصر مبتنی بر تغییر مکان را هنگامی که ضریب پواسون به $0/5$ نزدیک می‌شود، مشاهده نماییم. شکل (ب) ۴.۲۰ نشان می‌دهد هنگامی که $\nu = 0/3$ است تنش‌های عناصر در سرتاسر مرزها برای شبکه درشت به طور معقولی هموار و برای شبکه ریز بسیار هموار می‌باشند. در حقیقت ایده‌آل‌سازی درشت، تنش‌ها را به طور کاملاً معقولی پیش‌بینی می‌نماید.

ولی هنگامی که ضریب پواسون مساوی $0/499$ است، تحلیل همان شبکه‌های متشکل از عناصر مبتنی بر تغییر مکان نه گرهی، نتایج ضعیفی را برای تنش پیش‌بینی می‌کند (ر.ک. به: شکل (پ) ۴.۲۰). افت و خیز بسیار بزرگی را در تنش‌ها در عناصر منفرد شبکه درشت و شبکه ریز می‌توان مشاهده کرد^(۱۶). بنابراین، در یک جمع‌بندی، مشاهده می‌کنیم که در این جا هنگامی که ضریب پواسون مساوی $0/3$ می‌باشد، عنصر مبتنی بر تغییر مکان در تحلیل مؤثر است، ولی به میزانی که $\nu = 0/5$ میل می‌کند، محاسبه تنش‌ها بسیار غیردقیق می‌شود.

بحث مذکور نشان می‌دهد که چه نوع تحلیلی مطلوب است، به عبارت دیگر یک فرمول‌بندی عناصر محدود اساساً همان دقت در نتایج را برای یک شبکه معلوم به دست می‌دهد، صرف‌نظر از اینکه از چه ضریب پواسونی استفاده می‌شود، حتی هنگامی که ν به $0/5$ نزدیک است. چنین رفتاری هنگامی مشاهده می‌شود که برای فرمول‌بندی عناصر محدود، میزان دقت در پیش‌بینی نتایج تغییر مکان و تنش مستقل از ضریب تغییر حجمی مورد استفاده باشد.

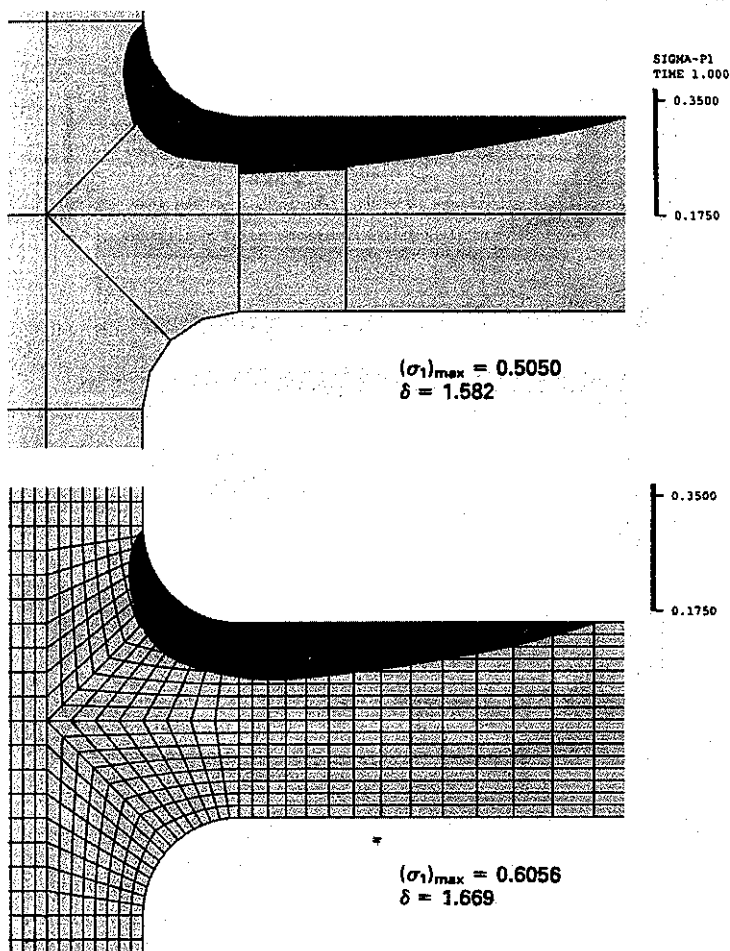
به فرمول‌بندی‌های عناصر محدود که چنین رفتار مطلوبی را از خود نشان می‌دهند، قفل نشونده، اطلاق می‌شود، در غیر این صورت عناصر محدود قفل شونده می‌باشند.

(۱۶) در بخش ۵.۵.۶، به اختصار در مورد استفاده از «انتگرال‌گیری کاهش یافته» بحث خواهیم کرد. اگر در این تحلیل از انتگرال‌گیری کاهش یافته انتگرال‌گیری گوسی 2×2 استفاده شود، جواب را نمی‌توان به دست آورد، زیرا ماتریس سختی حاصله تکیه است.



(الف) هندسه، مشخصات مصالح، بارگذاری وارده و شبکه درشت‌شازده عنصری

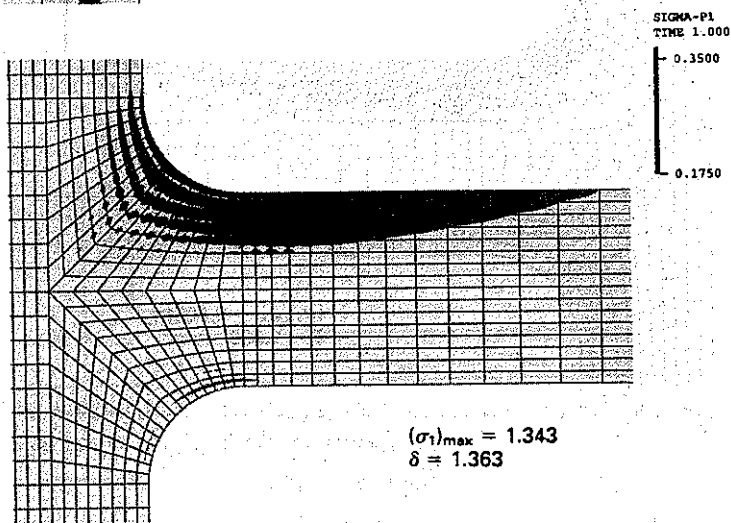
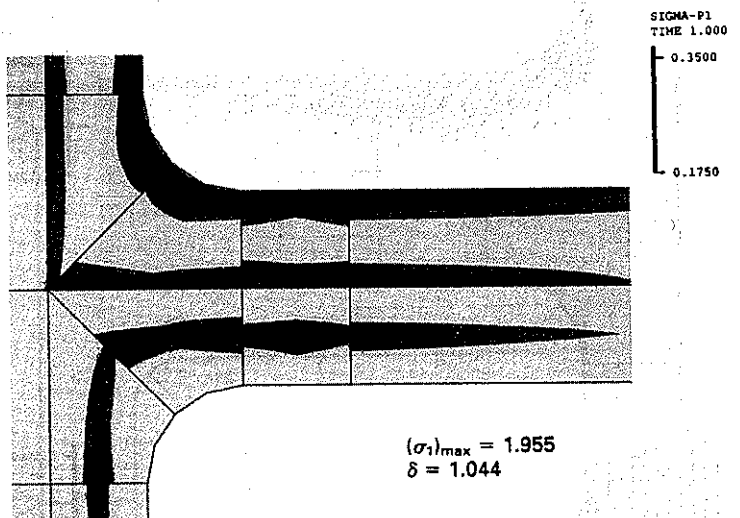
شکل ۴.۲۰ تحلیل یک لچکی طره‌ای در شرایط کرنش مسطح. از عناصر مبنی بر تغییر مکان نه گرهی استفاده می‌شود. یک شبکه 16×64 با ۱۰۲۴ عنصر از تقسیم هر عنصر مربوط به شبکه ۱۶ عنصری به ۶۴ عنصر حاصل می‌شود. نتایج تنش اصلی ماکزیمم با استفاده از نمایش نواری شکل ۴.۱۵ نشان داده شده‌اند. همچنین ماکزیمم مقدار پیش‌بینی شده تنش اصلی ماکزیمم می‌باشد و δ در (الف) تعریف شده است.



(ب) نتایج تحلیل عناصر محدود مبتنی بر تغییر مکان برای حالتی که ضریب پواسون مساوی ۰/۳ می‌باشد. نتایج مربوط به یک شبکه ۱۶ عنصری و یک شبکه ۱۶×۶۴ عنصری می‌باشند

شکل ۴.۲۰ (ادامه)

واژه «قفل شونده» بر مبنای تجربیات حاصله از تحلیل تیرها، صفحه‌ها و پوسته‌ها استوار است (ر.ک. به: بخش ۵.۴.۱)، که در آن یک فرمول‌بندی نامناسب - که قفل شونده می‌باشد - تغییر مکان‌هایی را نتیجه می‌دهد که بسیار کوچکتر از مقادیری است که به طور معقول برای یک شبکه معلوم انتظار می‌رود (البته این مقادیر را می‌توان با استفاده از یک فرمول‌بندی مناسب محاسبه کرد؛ به عنوان مثال، ر.ک. به: شکل ۵.۲۰). در تحلیل رفتار تقریباً تراکم‌ناپذیر با استفاده از یک فرمول‌بندی که حالت «قفل شوندگی» دارد، در محاسبه تغییر مکانها ضرورتاً خطای بارزی اتفاق نمی‌افتد، ولی تنش‌ها (فشار) بسیار غیردقیق می‌باشند. یادآوری می‌کنیم که عموماً یک فرمول‌بندی مبتنی بر تغییر مکان صرف در تحلیل یک محیط تقریباً تراکم‌ناپذیر خاصیت قفل شوندگی از خود نشان می‌دهد. این مطالب با دقت بیشتر در بخش ۴.۵ مورد بحث واقع خواهند شد.

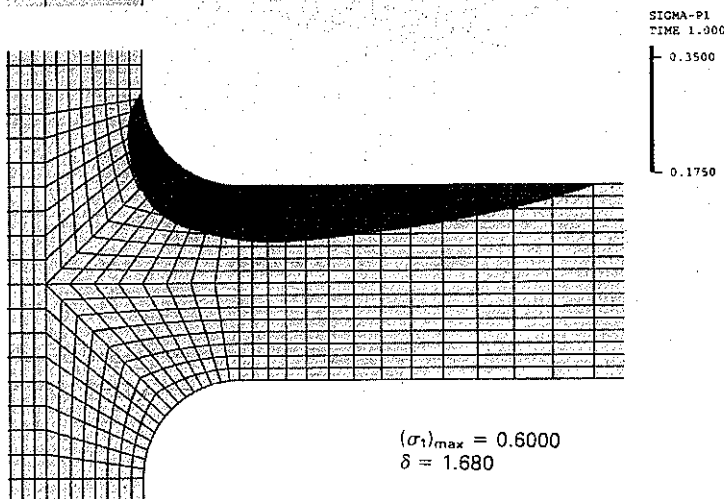
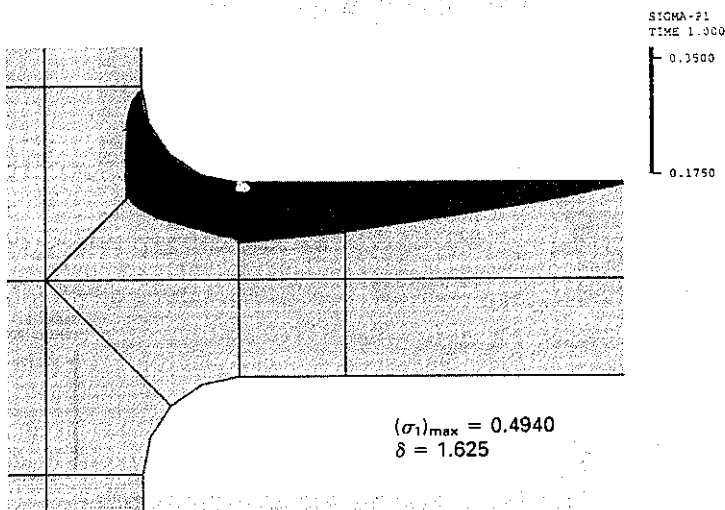


(پ) نتایج عناصر محدود مبتنی بر تغییر مکان برای حالتی که ضریب پواسون مساوی ۰/۴۹۹ می باشد. نتایج مربوط به یک شبکه ۱۶ عنصری و یک شبکه ۱۶×۶۴ عنصری می باشند.

شکل ۴.۲۰ (ادامه)

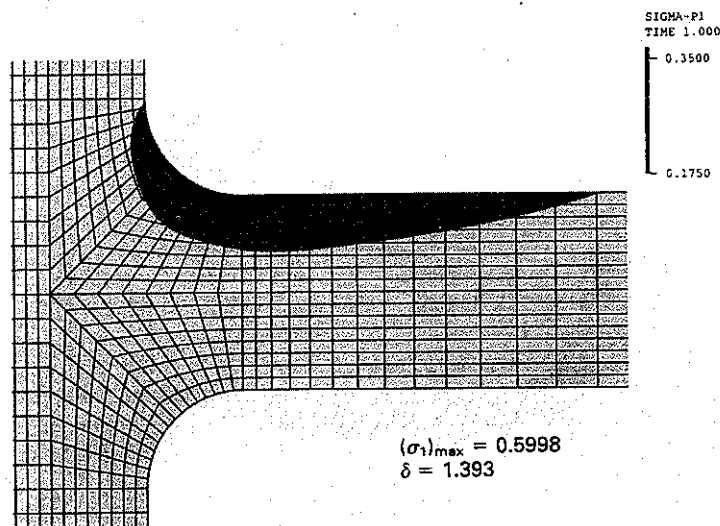
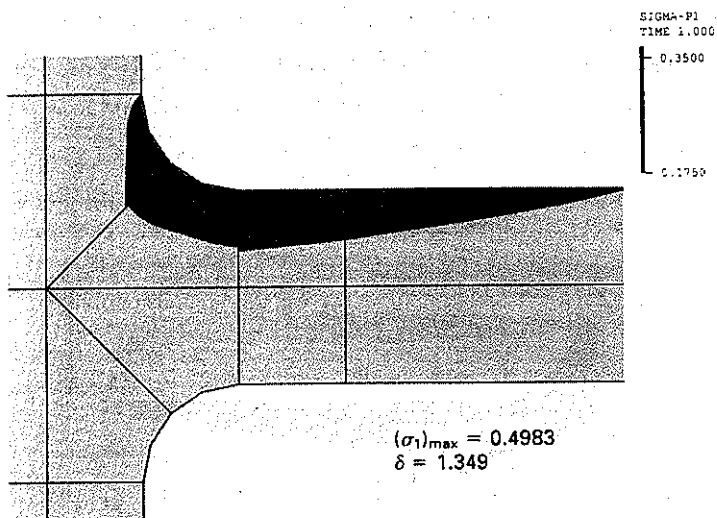
فرمول بندی های عناصر محدود مؤثر برای تحلیل رفتار تقریباً تراکم ناپذیر که حالت قفل شوندگی از خود نشان نمی دهند، با استفاده از درونیابی تغییر مکان ها و فشار به دست می آیند. شکل ۴.۲۱ نتایج حاصله از تحلیل لچکی طره ای ارائه شده در شکل ۴.۲۰ را نشان می دهد؛ در

تحلیل مذکور از یک فرمول‌بندی تغییر مکان / فشار که به آن فرمول‌بندی u/p نیز اطلاق می‌شود، استفاده شده است که در آن عنصر $9/3$ به کار می‌رود (در مورد فرمول‌بندی و عنصر مزبور، در زیر توضیح داده شده است). مشاهده می‌کنیم که تک‌نوارهای تنش اصلی ماکزیمم در تمامی حالات همواری مطلوب را دارا می‌باشند و هنگامی که ضریب پواسون به $0/5$ میل می‌کند به دقت پیش‌بینی تنش‌ها خدشه وارد نمی‌شود.



شکل ۴.۲۱ (الف) نوارهای تنش اصلی ماکزیمم. در این حالت ضریب پواسون مساوی $0/3$ می‌باشد. نتایج برای شبکه شانزده عنصری و شبکه 16×16 عنصری داده شده‌اند.

شکل ۴.۲۱. تحلیل لچکی طره‌ای در شرایط کرنش مسطح. لچکی در شکل (الف) $4/20$ نشان داده شده است. از شبکه‌های مشابه شکل $4/20$ استفاده شده است، ولی عنصر نه گرهی که به طور آمیخته درونیابی شده است به کار رفته است (عنصر $9/3$). نتایج نشان داده شده در این شکل را با نتایج داده شده در شکل $4/20$ مقایسه کنید.



(ب) نوارهای تنش اصلی ماکزیمم. در این حالت ضریب پواسون مساوی ۰/۴۹۹ می‌باشد. نتایج برای شبکه‌ی شانزده عنصری و شبکه ۱۶×۶۴ عنصری داده شده‌اند.

شکل ۴.۲۱ (ادامه)

به عنوان مقدمه‌ای بر فرمول‌بندی‌های تغییر مکان / فشار، یادآوری می‌کنیم که در فرمول‌بندی مبتنی بر تغییر مکان صرف، هنگامی که K بزرگ است (در مقایسه با G)، تعیین فشار از کرنش حجمی دشوار می‌باشد؛ و نیز هنگامی که شرایط کاملاً تراکم‌ناپذیر در نظر گرفته می‌شود، فشار باید به عنوان متغیر حل مورد استفاده قرار گیرد [ر.ک. به: ۴.۱۳۳]. بنابراین

هنگامی که شرایط تقریباً تراکم‌ناپذیر تحلیل می‌شوند، معقول به نظر می‌رسد که از تغییر مکان‌ها و فشار مجهول به عنوان متغیرهای حل استفاده شود. در این صورت چنین روش‌های تحلیلی، اگر به صورت مناسبی فرمول‌بندی شده باشند، باید مستقیماً برای حالت حدی شرایط تراکم‌ناپذیر نیز قابل کاربرد باشند.

بنابراین نکته اصلی در فرمول‌بندی‌های عناصر محدود تغییر مکان / فشار درونیابی تغییر مکان‌ها و فشار می‌باشد. این نکته ایجاب می‌کند که اصل کار مجازی برحسب متغیرهای مستقل u و p بیان گردد که در این صورت نتیجه زیر حاصل می‌گردد.

$$\int_V \bar{\epsilon}^T S dV - \int_V \bar{\epsilon}_v p dV = \mathcal{R} \quad (4.140)$$

که در آن به طور معمول خط تیره بالای حروف کمیت‌های مجازی را نشان می‌دهد، \mathcal{R} متناظر با کار مجازی خارجی معمولی می‌باشد [\mathcal{R} مساوی سمت راست رابطه (۴.۷) است] و S و ϵ' بردارهای تنش انحراف‌دار و کرنش می‌باشند:

$$S = \tau + p\delta \quad (4.141)$$

$$\epsilon' = \epsilon - \frac{1}{3}\epsilon_v\delta \quad (4.142)$$

که در آن δ بردار نماد دلتای Kronecher است [ر.ک. به: (۴.۱۲۸)].

توجه شود که با استفاده از تعریف p در (۴.۱۳۱)، تنش فشاری یکنواخت، یک فشار مثبت را نتیجه می‌دهد و در مثال ساده شکل ۴.۱۹، صرفاً قسمت حجمی کار مجازی داخلی نقش داشته است.

در (۴.۱۴۰) در ابتدا انرژی کرنشی انحراف‌دار و انرژی کرنشی تغییر حجمی از هم جدا شده‌اند و سپس با هم جمع گردیده‌اند. از آنجا که تغییر مکان‌ها و فشار به عنوان متغیرهای مستقل در نظر گرفته می‌شوند، از اینرو نیاز به معادله دیگری داریم که این دو متغیر حل را به همدیگر ارتباط دهد. معادله مذکور با استفاده از (۴.۱۳۱) فراهم می‌شود که به صورت انتگرالی نوشته می‌شود (ر.ک. به: مثال ۴.۳۱):

$$\int_V \left(\frac{p}{K} + \epsilon_v \right) \bar{p} dV = 0 \quad (4.143)$$

البته این معادلات اساسی را می‌توان با تفصیل بیشتر از اصول وردشی نیز استخراج نمود (ر.ک. به: [L. R. Hermann] و [S. W. Key] A). معادلات اساسی مذکور را در مثال زیر با استفاده از تابع Hu-Washizu استخراج می‌کنیم.

مثال ۴.۳۱: فرمول‌بندی u/p را از اصل وردشی Hu-Washizu استخراج نمایید.
حل:

استخراج فرمول‌بندی مذکور کاملاً مشابه مثال ۴.۳۰ می‌باشد که در آن یک درونیابی آمیخته را برای عنصر تیری در نظر گرفتیم.
در ابتدا فرض می‌کنیم که در رابطه (۴.۱۱۴) $\tau = C\epsilon$ می‌باشد که در این صورت تابع Hellinger-Reissner به دست می‌آید:

$$\Pi_{HR}^*(u, \epsilon) = - \int_V \frac{1}{2} \epsilon^T C \epsilon \, dV + \int_V \epsilon^T C \partial_e u \, dV - \int_V u^T f^B \, dV - \int_{S_f} u^{SfT} f^{Sf} \, dS \quad (\text{الف})$$

که در آن فرض می‌کنیم که شرایط مرزی تغییر مکانی کاملاً تأمین می‌شوند (بنابراین تغییرات تغییر مکان در سطحی که تغییر مکان‌ها از پیش تعیین شده می‌باشند مساوی صفر خواهند بود).
در مرحله بعدی سهم‌های انحراف‌دار و حجمی را ایجاد می‌کنیم و تصریح می‌کنیم که سهم انحراف‌دار از تغییر مکان‌ها تعیین خواهند شد. بنابراین رابطه (الف) را می‌توانیم در حالت خاص به صورت زیر بنویسیم:

$$\bar{\Pi}_{HR}^*(u, p) = \int_V \frac{1}{2} \epsilon'^T C' \epsilon' \, dV - \int_V \frac{1}{2} \frac{p^2}{\kappa} \, dV - \int_V p \epsilon_v \, dV - \int_V u^T f^B \, dV - \int_{S_f} u^{SfT} f^{Sf} \, dS \quad (\text{ب})$$

که در آن کمیت‌های انحراف‌دار به وسیلهٔ پریم نشان داده می‌شود و ϵ_v کرنش حجمی است که از تغییر مکان‌ها تعیین می‌شود و p فشار بوده و κ ضریب تغییر حجمی است. توجه شود که در رابطه (الف)، (ب) u و p متغیرهای مستقل هستند.

با استفاده از شرط مانا بودن $\bar{\Pi}_{HR}^*$ نسبت به تغییر مکان‌ها و فشار، روابط زیر حاصل می‌گردند:

$$\int_V \delta \epsilon'^T C' \epsilon' \, dV - \int_V p \delta \epsilon_v \, dV = \mathcal{R}$$

$$\int_V \left(\frac{p}{\kappa} + \epsilon_v \right) \delta p \, dV = 0$$

که در آن \mathcal{R} متناظر با کار مجازی بارگذاری وارد خارجی است [(ر.ک. به: (۴.۷)].

حالب توجه است که (ب) را می‌توان پتانسیل کلی برحسب تغییر مکان‌ها و فشار و یک ضریب Lagrange که قید بین کرنش‌های حجمی و فشار را اعمال می‌کند، تلقی کرد:

$$\begin{aligned} \bar{\Pi}_{HR}^* = & - \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}'^T \mathbf{C}' \boldsymbol{\epsilon}' dV + \int_V \frac{1}{2} \frac{p^2}{\kappa} dV - \int_V \mathbf{u}^T \mathbf{f}^B dV \\ & - \int_{S_f} \mathbf{u}^{S_f T} \mathbf{f}^{S_f} dS - \int_V \lambda \left(\epsilon_v + \frac{p}{\kappa} \right) dV \end{aligned} \quad (\text{پ})$$

آخرین انتگرال در (پ) نمایشگر قید ضریب Lagrange است، و درمی‌یابیم که $\lambda = p$. حال برای نیل به معادلات عناصر محدود حاکم، مانند بخش ۴.۲.۱ از (۴.۱۴۰) و (۴.۱۴۳) استفاده می‌کنیم، ولی علاوه بر درونیابی تغییر مکان‌ها، فشار p را نیز درونیابی می‌کنیم. بحث انجام شده در بخش ۴.۲.۱ نشان داد که نیاز داریم که تنها فرمول‌بندی یک عنصر منفرد را در نظر بگیریم، و سپس ماتریس‌های یک مجموعه همبسته عناصر را می‌توانیم به طریقه‌ای استاندارد تشکیل بدهیم.

با استفاده از مباحث انجام شده در بخش ۴.۲.۱ داریم:

$$\mathbf{u} = \mathbf{H} \hat{\mathbf{u}} \quad (4.144)$$

می‌توان محاسبه کرد که:

$$\boldsymbol{\epsilon}' = \mathbf{B}_D \hat{\mathbf{u}}; \quad \epsilon_v = \mathbf{B}_v \hat{\mathbf{u}} \quad (4.145)$$

فرض درونیابی اضافی عبارت است از:

$$p = \mathbf{H}_p \hat{\mathbf{p}} \quad (4.146)$$

که در آن بردار $\hat{\mathbf{p}}$ شامل متغیرهای فشاری می‌باشد [ر.ک. به: بحث انجام شده بعد از ارائه (۴.۱۴۸)].

از جایگذاری (۴.۱۴۴) الی (۴.۱۴۶) در (۴.۱۴۰) و (۴.۱۴۳)، نتیجه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{up} \\ \mathbf{K}_{pu} & \mathbf{K}_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.147)$$

$$\mathbf{K}_{uu} = \int_V \mathbf{B}_D^T \mathbf{C}' \mathbf{B}_D dV \quad \text{که در آن داریم:}$$

$$\mathbf{K}_{up} = \mathbf{K}_{pu}^T = - \int_V \mathbf{B}_D^T \mathbf{H}_p dV \quad (4.148)$$

$$\mathbf{K}_{pp} = - \int_V \mathbf{H}_p^T \frac{1}{\kappa} \mathbf{H}_p dV$$

و 'C' ماتریس تنش - کرنش برای مؤلفه های تنش و کرنش انحراف دار می باشد.

روابط (۴.۱۴۴) الی (۴.۱۴۸) معادلات اساسی برای فرمول بندی عناصری را که در آنها از تغییر مکان ها و فشار به عنوان متغیر استفاده می شود، به دست می دهد. حال یک سؤال مهم برای فرمول بندی مطرح می شود: چه نوع درونیابی های فشار و تغییر مکان را باید استفاده نمود تا عناصر محدود مؤثری را به دست آورد؟ به عنوان مثال، اگر درونیابی فشار دارای مرتبه خیلی بالاتری نسبت به درونیابی تغییر مکان باشد، مجدداً ممکن است که عنصر به صورت عنصر مبتنی بر تغییر مکان رفتار نماید و در نتیجه مؤثر نباشد.

حال اگر تنها در این لحظه درونیابی فشار را در نظر بگیریم، دو امکان زیر وجود دارد که ما آنها را به طور متفاوت طبقه بندی می کنیم:

فرمول بندی u/p . در این فرمول بندی، متغیرهای فشار صرفاً مربوط به عنصر خاصی می باشند که در نظر گرفته می شود. در تحلیل محیط تقریباً تراکم ناپذیر (بگونه ای که تابحال بحث شده است)، متغیرهای فشار عنصر را می توان پیش از به هم سوار نمودن عناصر به طور ایستا حذف نمود (چگالش ایستایی). پیوستگی فشار بین عناصر اعمال نمی شود، ولی اگر از یک شبکه به حد کافی ریز استفاده شود، پیوستگی مذکور به عنوان نتیجه تحلیل عناصر محدود حاصل خواهد شد.

فرمول بندی $u/p-c$. حرف "c" نشانگر پیوستگی در فشار است.

در این فرمول بندی فشار عنصری به وسیله متغیرهای فشار گرهی تعریف می شود که مربوط به عناصر مجاور هم در مجموعه همبسته عناصر است. بنابراین متغیرهای فشار را نمی توان پیش از به هم سوار نمودن عناصر به طور ایستا حذف نمود. پیوستگی فشار بین عناصر مستقیماً اعمال می شود و از اینرو پیوستگی مزبور همواره در حل عناصر محدود حاصل خواهد شد، صرف نظر از اینکه شبکه مورد استفاده ریز باشد یا درشت.

دو عنصر زیر را که هر کدام مربوط به هر یک از این فرمول بندی ها می باشند، در نظر بگیرید.

مثال ۴.۳۲: برای عنصر کرنش مسطح چهار گرهی نشان داده شده در زیر، فرض کنید که تغییر مکان ها با استفاده از چهار گره درونیابی می شوند و نیز یک فشار ثابت را فرض کنید. عبارات ماتریسی مورد استفاده برای فرمول بندی u/p را تعیین نمایید.

حل:

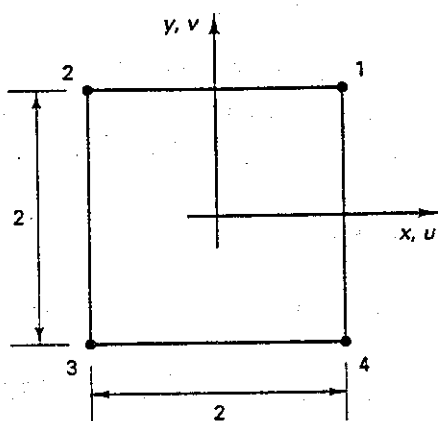
به عنصر مذکور، عنصر ۴/۱ با فرمول بندی u/p اطلاق می شود. در تحلیل کرنش مسطح

داریم:

$$\epsilon' = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} - \frac{1}{3}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \\ \epsilon_{yy} - \frac{1}{3}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \\ \gamma_{xy} \\ -\frac{1}{3}(\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ -\frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{bmatrix}; \quad \epsilon_v = \epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} \quad (\text{الف})$$

و $S = C' \epsilon'$ که در آن داریم:

$$C' = \begin{bmatrix} 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G \end{bmatrix}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$



Young's modulus E
Poisson's ratio ν

شکل ۴.۳۲ E یک عنصر ۴/۱

درون‌یابی تغییر مکان همچون مثال ۴.۶ عبارت است از:

$$u = H \hat{u}$$

$$u(x, y) = \begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix}; \quad \hat{u}^T = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad : \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4] \quad \text{با}$$

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & h_4 & : & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & h_1 & h_2 & h_3 & h_4 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$h_1 = \frac{1}{4}(1+x)(1+y); \quad h_2 = \frac{1}{4}(1-x)(1+y)$$

$$h_3 = \frac{1}{4}(1-x)(1-y); \quad h_4 = \frac{1}{4}(1+x)(1-y)$$

با استفاده از روابط (الف) و (ب)، ماتریس‌های درونیابی کرنش - تغییر مکان عبارتند از:

$$B_D = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}h_{1,x} & \frac{2}{3}h_{2,x} & \dots & : & -\frac{1}{3}h_{1,y} & -\frac{1}{3}h_{2,y} & \dots \\ -\frac{1}{3}h_{1,x} & -\frac{1}{3}h_{2,x} & \dots & : & \frac{2}{3}h_{1,y} & \frac{2}{3}h_{2,y} & \dots \\ h_{1,y} & h_{2,y} & \dots & : & h_{1,x} & h_{2,x} & \dots \\ -\frac{1}{3}h_{1,x} & -\frac{1}{3}h_{2,x} & \dots & : & -\frac{1}{3}h_{1,y} & -\frac{1}{3}h_{2,y} & \dots \end{bmatrix}$$

$$B_V = [h_{1,x} \quad h_{2,x} \quad \dots \quad : \quad h_{1,y} \quad h_{2,y} \quad \dots]$$

و

برای فرض فشار ثابت، از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$H_p = [1]; \quad \hat{p} = [p_0]$$

از آنجا که درجه آزادی $\hat{p} = [p_0]$ تنها مربوط به این عنصر بوده ولی مربوط به عناصر مجاور هم نمی‌باشد، می‌توان با استفاده از چگالش ایستایی، از رابطه (۴.۱۴۷) ماتریس سختی عنصر را که متناظر با صرفاً درجات آزادی تغییر مکان‌های نقاط گرهی می‌باشد، به دست آورد:

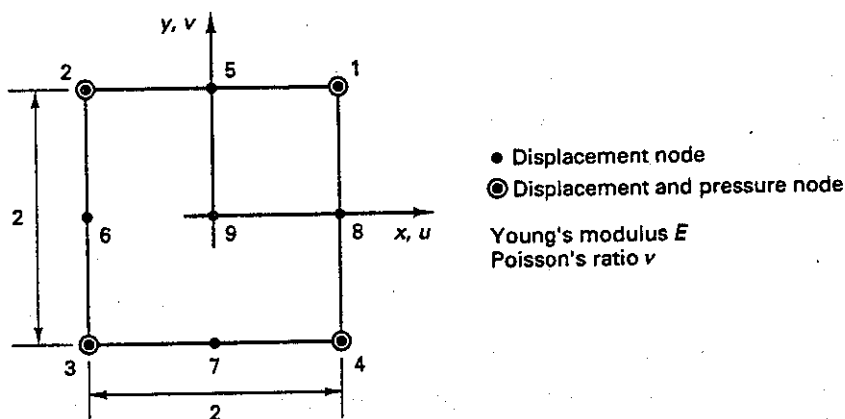
$$K = K_{uu} - K_{up} K_{pp}^{-1} K_{pu}$$

در مورد این عنصر در مثال ۴.۳۸، بحث بیشتری انجام خواهد گرفت.

مثال ۴.۳۳: عنصر کرنش مسطح نه گرهی نشان داده شده در شکل ۴.۳۳ E را در نظر بگیرید. فرض کنید که تغییر مکان‌ها با استفاده از نه گره درونیابی می‌شوند و فشار فقط با استفاده از چهار گره گوشه درونیابی می‌گردد. به اطلاعات داده شده در مثال ۴.۳۳ رجوع کنید و برای تعیین عبارات ماتریسی این عنصر نکات دیگری را مورد بحث قرار دهید.

حل:

عنصر مذکور توسط P. Hood and C. Taylor [A] پیشنهاد گردید. در فرمول‌بندی این عنصر، فشارهای گرهی مربوط به عناصر مجاور می‌باشند و مطابق با نامگذاری تعیین شده، به آن عنصر u/p -c اطلاق می‌شود (عنصر مذکور یک عنصر $c = 9/4$ است).

شکل ۴.۳۳ یک عنصر $E-C/4$

کرنش‌های انحراف‌دار و حجمی به صورت رابطه (الف) که در مثال ۴.۳۲ ارائه گردیده، نشان داده می‌شوند. درون‌یابی تغییر مکان متناظر با نه گره عنصر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1^* & \dots & h_8^* & : & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & : & h_1^* & \dots & h_8^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_9 \\ \vdots \\ v_1 \\ \vdots \\ v_9 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

که در آن توابع درون‌یابی h_i^* به گونه‌ای که در بخش ۴.۲.۳ شرح داده شد، ایجاد می‌شوند (یا ر.ک. به: بخش ۵.۳ و شکل ۵.۴).

ماتریس‌های کرنش انحراف‌دار - تغییر مکان و کرنش حجمی - تغییر مکان همچون مثال ۴.۳۲ به دست می‌آیند.

درون‌یابی فشار به وسیله رابطه زیر داده می‌شود:

$$p = [h_1 \quad h_2 \quad h_3 \quad h_4] \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix}$$

که در آن h_i آن توابعی می‌باشند که در رابطه (ب) مثال ۴.۳۲ مشخص شده‌اند.

یک تفاوت محاسباتی اصلی بین این عنصر و عنصر چهار گرهی مورد بحث در مثال ۴.۳۲ این است که درجات آزادی فشاری را نمی‌توان به طور ایستا در این مرحله از فرمول‌بندی که تنها با عناصر سر و کار داریم حذف کرد (چگالش ایستایی)، زیرا متغیرهای p_1, \dots, p_4 مربوط به عنصری می‌باشند که در این جا در نظر گرفتیم و نیز مربوط به عناصر مجاور می‌باشند، از اینرو یک میدان فشار پیوسته را برای گسسته‌سازی توصیف می‌نمایند.

حال به این پرسش برمی‌گردیم که چه نوع درونیابی‌های تغییر مکان و فشار را باید استفاده کرد تا یک عنصر مؤثر به دست آید؟

به عنوان مثال، در مثال ۴.۳۲ از چهار گره برای درونیابی تغییر مکان‌ها استفاده نمودیم و یک فشار ثابت فرض کردیم و ممکن است که این سؤال مطرح شود که آیا یک فشار ثابت، انتخاب مناسبی برای عنصر چهار گرهی می‌باشد یا نه؟ در واقع برای این عنصر، چنین انتخابی حدوداً طبیعی می‌باشد، زیرا کرنش حجمی محاسبه شده از تغییر مکان‌ها، شامل تغییرات خطی در جهات x و y است و فشار فرض شده باید از مرتبه پایین‌تر باشد.

هنگامی که درونیابی‌های تغییر مکانی از مرتبه بالاتر مورد استفاده قرار می‌گیرند، انتخاب درونیابی مناسب برای فشار روشن نیست و در حقیقت بسیار دشوارتر است. فشار نباید با درجه بسیار پایین‌تری درونیابی شود، زیرا در این صورت پیش‌بینی فشار می‌تواند از مرتبه بالاتر و در نتیجه بسیار دقیق باشد، اما فشار نباید با درجه بسیار بالاتری نیز درونیابی شود، چرا که در این صورت عنصر مانند عناصر مبتنی بر تغییر مکان رفتار خواهد کرد و خاصیت قفل شوندگی از خود نشان خواهد داد. بنابراین می‌خواهیم از درونیابی فشار با بالاترین درجه استفاده کنیم به گونه‌ای که موجب ایجاد قفل شوندگی در عنصر نشود.

به عنوان مثال، اگر فرمول‌بندی u/p و درونیابی تغییر مکانی دو درجه دوم (به عبارت دیگر نه گره برای توصیف تغییر مکان) را در نظر بگیریم، ممکن است که بطور طبیعی از حالات زیر استفاده نماییم:

$$1. \text{ فشار ثابت، } p = p_0, (\text{عنصر } 9/1)$$

$$2. \text{ فشار خطی، } p = p_0 + p_1x + p_2y, (\text{عنصر } 9/3)$$

$$3. \text{ فشار دوخطی، } p = p_0 + p_1x + p_2y + p_3xy, (\text{عنصر } 9/4)$$

و به همین ترتیب تا درونیابی فشار درجه دوم ادامه می‌دهیم (که متناظر با عنصر ۹/۹ است).

این عناصر به طور تئوریک و با استفاده از آزمایشات عددی تحلیل شده‌اند. مطالعات انجام شده روی این عناصر نشان می‌دهند که عنصر ۹/۱ خاصیت قفل شوندگی از خود نشان نمی‌دهد، ولی نرخ همگرایی فشار (ولذا تنش‌ها)، به میزانی که شبکه ریزتر می‌شود، صرفاً از مرتبه $O(h)$ می‌باشد، زیرا یک فشار ثابت در هر عنصر نه گرهی فرض شده است. مشخص است

که کیفیت ضعیف پیش‌بینی فشار می‌تواند اثر منفی در پیش‌بینی تغییر مکان‌ها نیز داشته باشد. همچنین مطالعات نشان می‌دهند که عنصر $9/3$ بسیار جالب توجه است، زیرا خاصیت قفل شوندگی از خود نشان نمی‌دهد و نرخ همگرایی تنش‌ها از مرتبه $o(h^2)$ می‌باشد. بنابراین میزان دقت پیش‌بینی این عنصر، بهینه می‌باشد، زیرا اگر از یک بسط تغییر مکانی دو درجه دومی استفاده شود، همگرایی از مرتبه بالاتری در تنش‌ها را نمی‌توان انتظار داشت. همچنین عنصر $9/3$ برای هر ضریب پواسون تا $0/5$ مؤثر می‌باشد (اما چگالش ایستایی درجه آزادی فشار تنها برای مقادیر کمتر از $0/5$ امکان‌پذیر است).

بنابراین ممکن است که اغوا شویم که همواره از عنصر $9/3$ استفاده نماییم (به عوض عنصر نه گرهی مبتنی بر تغییر مکان). با وجود این، در عوض درمی‌یابیم که عنصر $9/3$ از نظر محاسباتی تا اندازه‌ای پرهزینه‌تر از عنصر نه گرهی مبتنی بر تغییر مکان است و هنگامی که v کمتر از $0/48$ است، عبارات اضافی در بسط فشار عنصر مبتنی بر تغییر مکان، پیش‌بینی نسبتاً بهتری را برای تنش‌ها می‌سازد.

عنصر u/p بعدی مورد نظر، عنصر $9/4$ است و مطالعات نشان می‌دهد هنگامی که v نزدیک به $0/5$ می‌باشد، عنصر خاصیت قفل شوندگی از خود نشان می‌دهد و از اینرو نمی‌توان آن را برای تحلیل محیط تقریباً تراکم‌ناپذیر توصیه کرد.

به طریقه‌ای مشابه، عناصر دیگری از نوع u/p را می‌توان ایجاد کرد و جدول ۴.۶ این انتخاب‌ها را به اختصار نشان می‌دهد. در ارتباط با این عناصر، یادآوری می‌شود که عناصر دوبعدی چهار گرهی و عناصر سه بعدی هشت گرهی به طور گسترده‌ای در عمل به کار می‌روند. با وجود این، عناصر دوبعدی نه گرهی و سه بعدی ۲۷ گرهی اغلب بسیار توانا می‌باشند.

همان‌گونه که در جدول ۴.۶ نشان داده شده است، عناصر $P_2^+ - P_1$ و $Q_2 - P_1$ نخستین عناصر از دو خانواده عناصری هستند که ممکن است به کار روند. به عبارت دیگر، عناصر چهار ضلعی $Q_n - P_{n-1}$ و عناصر مثلثی $P_n^+ - P_{n-1}$ و $n > 2$ نیز عناصر مؤثری می‌باشند.

در جدول ۴.۶ به شرط inf-sup اشاره می‌کنیم که در بخش ۴.۵ در مورد آن بحث خواهیم کرد. از نقطه نظر محاسباتی، عناصر u/p قابل توجه می‌باشند، زیرا پیش از اینکه عناصر روی همدیگر سوار شوند می‌توان درجه آزادی فشار عنصر را به طور ایستا حذف کرد (چگالی ایستایی) (با فرض $v < 0/5$ اما احتمالاً خیلی نزدیک به $0/5$). بنابراین درجات آزادی برای مجموعه همبسته عناصر صرفاً همان تغییر مکان‌های نقاط گرهی هستند که به عنوان درجات آزادی حل عناصر محدود مبتنی بر تغییر مکان نیز می‌باشند.

با وجود این، فرمول‌بندی $u/p-c$ این امتیاز را دارد که همواره یک میدان فشار پیوسته محاسبه می‌شود. جدول ۴.۷ شامل برخی عناصر مؤثر می‌باشد.

جدول ۴.۶: عناصر مؤثر متبوع $u|_P$ (تغییر مکان‌ها بین عناصر پیوسته بوده و متغیرهای فشار مربوط به عناصر منفرد می‌باشند) [†]

عناصر

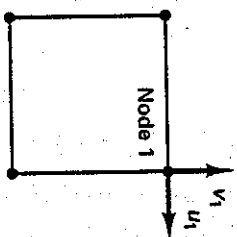
عناصر دوپدای

عناصر سه‌پدای

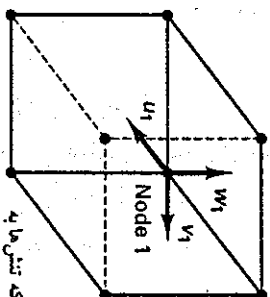
ملاحظات

نقاط گره‌ای

$Q_1 - P_0$
in 2-D: 4/1
in 3-D: 8/1



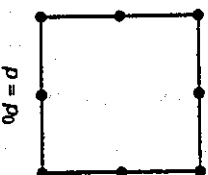
$P = P_0$



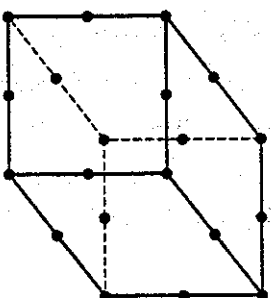
$P = P_0$

این عنصر تغییر مکان را به وجهی معقول، پیش‌بینی می‌کند، اما ممکن است که تنش‌ها به علت فرض ثابت و ثابت و جزوهای ممکن فشار غیر دقیق باشند. این عنصر شرط Inf-sup را تأمین نمی‌کند (ر.ک. به بحث انجام شده در مورد عنصر در بخش ۴.۵.۵)

$Q_2 - P_0; Q_3 = Q_2 \cap P_3$
in 2-D: 8/1
in 3-D: 20/1



$P = P_0$

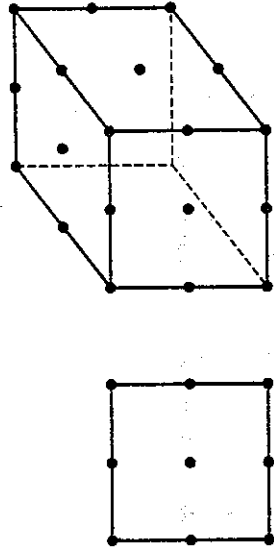


$P = P_0$

این عنصر شرط Inf-sup را تأمین می‌کند. اما فرض ثابت ممکن است که برای پیش‌بینی دقیق تنش استفاده از گستره‌سازی ریز را ایجاد کند

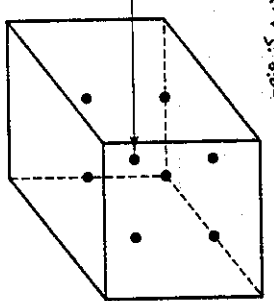
$$Q_2 - P_1 \\ \text{in 2-D: } 9/3 \\ \text{in 3-D: } 27/4$$

نقطه ۱۹ گره قابل مشاهده از کل ۲۷ گره نشان داده می شوند



$$p = p_0 + p_1x + p_2y$$

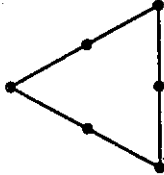
نقطه ۸ گره غیر قابل مشاهده نشان داده می شوند



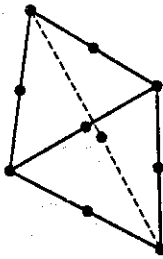
$$p = p_0 + p_1x + p_2y + p_3z$$

گره در مرکز عنصر

$$P_2 - P_0 \\ \text{in 2-D: } 6/1 \\ \text{in 3-D: } 10/1$$

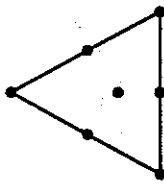


$$p = p_0$$

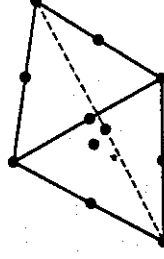


$$p = p_0$$

$$P_2^+ - P_1 \\ \text{in 2-D: } 7/3 \\ \text{in 3-D: } 11/4$$



$$p = p_0 + p_1x + p_2y$$



$$p = p_0 + p_1x + p_2y + p_3z$$

عنصر چهار ضلعی بهینه با استفاده از یک بسط تغییر مکانی دو درجه دومی. از تعداد زیادی از متغیرهای فشار استفاده می شود به شرط اینکه، شرط Inf-sup تأمین شود. نخستین عنصر از خانواده عناصر چهار ضلعی $n \geq 2$ ، $Q_n - P_{n-1}$ ، تمامی این عناصر شرط Inf-sup را تأمین می کنند. (رک. به: مثال (۴.۳۶)

رک. به:

M. Crouzeix and P.-A. Raviart [A]

این عنصر شرط Inf-sup را تأمین می کند، اما شرط فشار ثابت ممکن است که استفاده از گسسته سازی ریز را ایجاد نماید.

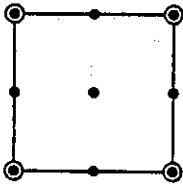
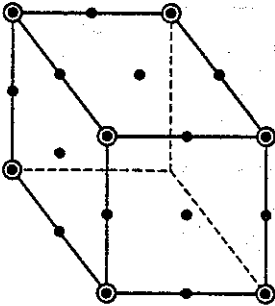
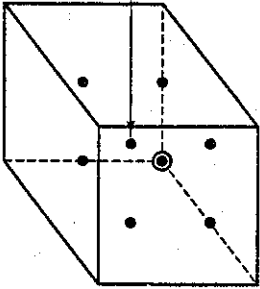
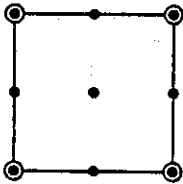
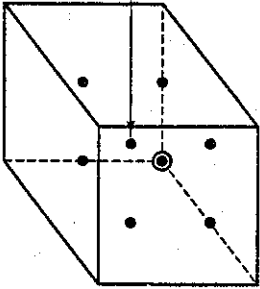
رک. به:

M. Crouzeix and P.-A. Raviart [A]

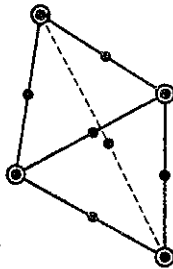
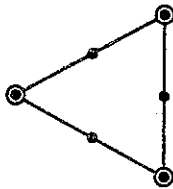
این عنصر مثلثی بهینه با استفاده از یک بسط تغییر مکانی درجه دوم (با P_2^+ یک حساب درجه سومی). فضای چند جمله ای را نشان می دهد که به وسیله حساب درجه سومی محاط شده است. از تعداد زیادی از متغیرهای فشار استفاده می شود به شرط اینکه، شرط Inf-sup تأمین شود.

نخستین عنصر از خانواده عنصر مثلثی $n \geq 2$ ، $P_n^+ - P_{n-1}$ ، تمامی این عناصر شرط Inf-sup را تأمین می کنند.

جدول ۴.۷ عناصر مؤثر متنوع $||p=c||$ (تغییر مکان ها و فشار بین عناصر پیوسته بوده و تمامی عناصر شرط $\inf\text{-sup}$ را تأمین می کنند) †

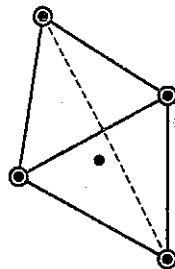
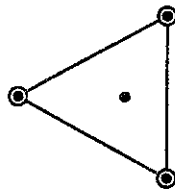
عناصر	عناصر دوبعدی	نقاط گرهی	عناصر سه بعدی	ملاحظات
$Q_2 - Q_1$ in 2-D: 9/4-c in 3-D: 27/8-c				ر.ک. به: P. Hood and C. Taylor [A] نخستین عنصر خانواده $Q_n - Q_{n-1}$ نشان داده می شوند عناصر چهارضلعی، $n \geq 2$
$Q_2 - Q_1$ in 2-D: 9/4-c in 3-D: 27/8-c		تنها ۱۹ گره قابل مشاهده از کل ۲۷ گره نشان داده می شوند		ر.ک. به: P. Hood and C. Taylor [A] نخستین عنصر خانواده $Q_n - Q_{n-1}$ نشان داده می شوند عناصر چهارضلعی، $n \geq 2$

$P_2 - P_1$
in 2-D: 6/3-c
in 3-D: 10/4-c



ر.ک. به: P. Hood and C. Taylor[A]
تختین عنصر خانواده $P_2 - P_1$ عناصر
مثالی.

$P_1^+ - P_1$
in 2-D: 4/3-c
in 3-D: 5/4-c



ر.ک. به: D. N. Arnold, F. Brezzi, and M. Fortin
فضای چندجمله‌ای‌های P_1^+ را نشان
می‌دهد که توابع حباب درجه سومی به
آنها افزوده شده‌اند. همچنین به عنوان
عناصر MINI شناخته می‌شوند.

- گره با متغیرهای تغییر مکانی
- ⊙ گره با متغیرهای تغییر مکانی و فشار

† برای توابع درونیایی، ر.ک. به: شکل‌های ۴.۱۳، ۴.۲، ۵.۵، ۵.۱۱ و ۵.۱۳.

حل عناصر محدود شرایط کاملاً تراکم‌ناپذیر

اگر می‌خواهیم که مصالح را کاملاً تراکم‌ناپذیر در نظر بگیریم، باز هم می‌توانیم از روابط (۴.۱۴۰) و (۴.۱۴۳) استفاده کنیم، ولی در این صورت فرض می‌کنیم که $\kappa \rightarrow \infty$. به همین علت است که به حالت مزبور، مسأله جدی اطلاق می‌شود. در این حال (۴.۱۴۳) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\int_V \epsilon_v \bar{p} dV = 0 \quad (4.149)$$

و به طور متناظر، رابطه (۴.۱۴۷) نیز به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{up} \\ \mathbf{K}_{pu} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \\ \hat{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.150)$$

بنابراین، در ماتریس ضریب، عناصر قطری متناظر با درجه آزادی فشار مساوی صفر می‌باشند. نتیجه می‌شود که چگالش ایستایی درجات آزادی فشار عنصری در فرمول‌بندی u/p دیگر امکان‌پذیر نیست و حل معادلات مجموعه کامل همبسته عناصر، افزون بر ملاحظات ضروری در حل عناصر محدود مبتنی بر تغییر مکان صرف، به ملاحظات خاصی نیاز دارد تا اینکه از برخورد با عضو مبنایی صفر اجتناب شود (ر.ک. به: بخش ۸.۲.۵).

عناصر مناسب برای تحلیل در جداول ۴.۶ و ۴.۷ آورده شده‌اند. عناصر مذکور، عناصر مؤثری می‌باشند (به جز عناصر (Q_1-P_0) ، زیرا صرف نظر از اینکه رفتار محیط تا چه حدی به وضعیت تراکم‌ناپذیری کامل نزدیک است، میزان دقت پیش‌بینی متغیرها در این عناصر بسیار مطلوب می‌باشد) ولی در روش مورد نظر برای حل معادلات عناصر محدود حاکم باید این نکته در نظر گرفته شود که عناصر ماتریس \mathbf{K}_{pp} به میزانی که به تراکم‌ناپذیری کامل نزدیک می‌شویم، مرتباً کوچکتر می‌شوند.

همان‌گونه که در اوایل بحث ذکر شد، در جداول ۴.۶ و ۴.۷ به شرط $\inf\text{-sup}$ رجوع خواهیم کرد. این شرط یک معیار اساسی ریاضی است و تعیین می‌کند که آیا یک گسسته‌سازی عناصر محدود آمیخته، پایدار و همگرا می‌باشد یا نه (و بالتیجه یک جواب قابل اطمینانی را به دست خواهد داد). شرط مذکور به عنوان یک آزمون بنیادی برای فرمول‌بندی عناصر محدود به وسیله I. Babuska [A] و F. Brezzi [A] ارائه گردید و از آن به بعد به طور گسترده‌ای در تحلیل فرمول‌بندی‌های عناصر محدود آمیخته به کار رفته است. علاوه بر شرط $\inf\text{-sup}$ ، شرط بیضوی بودن نیز وجود دارد که خیلی زیاد مورد توجه قرار نگرفته است، زیرا اغلب همچنان که در تحلیل محیط تقریباً تراکم‌ناپذیر دیده می‌شود شرط بیضوی بودن به طور خودکار تأمین می‌شود.

این سؤال ممکن است مطرح شود که آیا در عمل واقعاً تأمین شرط $\inf\text{-sup}$ مهم می‌باشد یا نه؟، به عبارت دیگر شاید این شرط بیش از اندازه قوی باشد و در این صورت آیا عناصری را که این شرط را تأمین نمی‌کنند باز هم می‌توان با اطمینان مورد استفاده قرار داد یا نه؟ تجربه ما این است که اگر شرط $\inf\text{-sup}$ احراز شود، در این صورت، عنصر برای درونیابی‌های استفاده شده، به میزانی که به طور معقول می‌توان انتظار داشت، مؤثر و مطلوب خواهد بود. به عنوان مثال، عنصر $9/3$ برای تحلیل کرنش مسطح در جدول ۴.۶ بر مبنای یک درونیابی درجه دومی تغییر مکان و یک درونیابی خطی فشار فرمول‌بندی شده است. عنصر مذکور خاصیت قفل شوندگی از خود نشان نمی‌دهد و مرتبه همگرایی تغییر مکان‌ها همواره $o(h)^3$ و تنش‌ها $o(h)^2$ می‌باشد که مطمئناً بهترین رفتاری است که با درونیابی‌های استفاده شده می‌توان به دست آورد.

از سوی دیگر، اگر شرط $\inf\text{-sup}$ تأمین نشود، عنصر برای تمامی تحلیل‌ها مشخصات همگرایی را که در عمل انتظار می‌روند و در حقیقت نیز مورد نیاز می‌باشند (در ارتباط با مدل ریاضی مورد نیاز) از خود بروز نخواهد داد. بنابراین عنصر مذکور توانا و قابل اطمینان نیست. از آنجا که شرط $\inf\text{-sup}$ از اهمیت بنیادی برخوردار است، از اینرو در بخش بعدی بحثی در مورد استخراج این شرط خواهیم داشت و با وجود اینکه از نکته نظر ریاضی کامل نیست ولی فهم ارزشمندی را در مورد مسأله فراهم می‌نماید. در آن بخش در مورد استخراج شرط بیضوی بودن نیز بحث خواهیم کرد و در مورد آن به اختصار با مثال‌هایی توضیح خواهیم داد. خواننده بصرای جزئیات بیشتر می‌تواند به کتاب نوشته شده به وسیله F. Brezzi and M. Fortin [A] نیز مراجعه نماید.

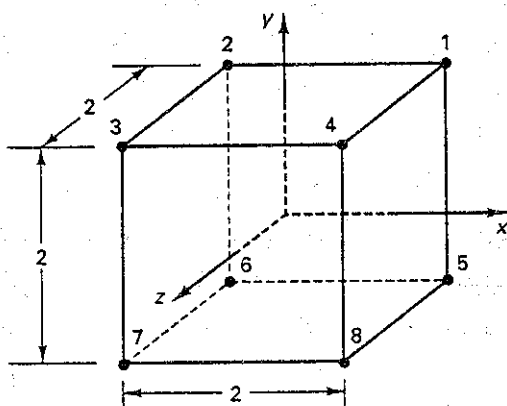
در استخراج شروط مذکور در بخش بعدی مسأله ارتجاعی تراکم‌ناپذیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم، ولی نکات و ملاحظات ارائه شده مستقیماً برای مسأله جریان سیال تراکم‌ناپذیر، و همان‌گونه که در بخش ۴.۵.۷ نشان داده خواهد شد، در فرمول‌بندی عناصر سازه‌ای نیز قابل کاربرد خواهند بود.

۴.۴.۴ تمرین‌ها

۴.۳۳ از عناصر پوسته‌ای چهار گرهی و هشت گرهی که در یک برنامه کامپیوتری عناصر محدود موجود می‌باشند استفاده نموده و آزمایش‌های حساسیت را که در شکل ۴.۱۷ ارائه شده‌اند در روی آنها انجام دهید.

۴.۳۴ عنصر هشت گرهی سه بعدی را که در شکل زیر نشان داده شده است در نظر بگیرید. آزمایش حساسیت را طراحی نموده، به طور تحلیلی مشخص کنید که برای عنصر مذکور

نتیجه مثبت می‌دهد یا نه؟



$$u = \sum_{i=1}^8 h_i u_i + \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 + \alpha_3 \phi_3$$

$$v = \sum_{i=1}^8 h_i v_i + \alpha_4 \phi_1 + \alpha_5 \phi_2 + \alpha_6 \phi_3$$

$$w = \sum_{i=1}^8 h_i w_i + \alpha_7 \phi_1 + \alpha_8 \phi_2 + \alpha_9 \phi_3$$

$$h_i = \frac{1}{8} (1 + x_i x) (1 + y_i y) (1 + z_i z)$$

$$\phi_1 = 1 - x^2; \phi_2 = 1 - y^2; \phi_3 = 1 - z^2$$

۴.۳۵ تابع Π_{HW} , Hu-Washizu، در (۴.۱۱۴) را در نظر بگیرید و با جزئیات کامل

معادلات (۴.۱۱۶) الی (۴.۱۲۱) را استخراج نمایید.

۴.۳۶ به تابع زیر، تابع Hellinger-Reissner^(۱۷) اطلاق می‌شود:

$$\Pi_{HR}(u, \tau) = \int_V -\frac{1}{2} \tau^T C^{-1} \tau \, dV + \int_V \tau^T \partial_\epsilon u \, dV - \int_V u^T f^B \, dV - \int_{S_f} u^S f^S \, dS - \int_{S_u} f^S u^T (u^S - u_p) \, dS$$

که در آن کمیت‌های از پیش تعیین شده (بدون تغییر) عبارتند از: f^B در V و u_p در روی S_u و f^S در روی S_f .

تابع مزبور را از تابع Hellinger-Reissner با اعمال $\epsilon = C^{-1} \tau$ استخراج نمایید. سپس از شرط مانا بودن Π_{HR} استفاده کنید و تمامی شرایط دیفرانسیلی باقی مانده را برای حجم و سطح جسم ایجاد نمایید.

۴.۳۷ تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$\Pi_1 = \Pi - \int_{S_u} f^S u^T (u^S - u_p) \, dS$$

که در آن Π در (۴.۱۰۹) ارائه شده و u_p تغییر مکان‌های از پیش تعیین شده در سطح S_u می‌باشند. بنابراین بردار Π نمایشگر ضرایب Lagrange (نیروهای سطحی) مورد

(۱۷) این تابع گاهی با اعمال قضیه دیورژانس به عبارت دوم، به صورت دیگری ارائه می‌شود.

استفاده برای اعمال شرایط تغییر مکانی سطحی می‌باشد. از اصل مانا بودن Π استفاده نموده و نشان دهید که عبارت مربوط به ضریب Lagrange شرایط مرزی تغییر مکانی در δu را اعمال خواهد نمود.

۴.۳۸ عنصر خربایی سه گرهی شکل ۴.۲۹ را در نظر بگیرید. از اصل وردشی Hu-Washizu استفاده نموده و ماتریس‌های سختی را به ازای فرض‌های زیر ایجاد نمایید:

(الف) تغییر مکان سهموی، کرنش خطی و تنش ثابت.

(ب) تغییر مکان سهموی، کرنش ثابت و تنش ثابت.

در مورد نتایج حاصله برحسب اینکه آیا انتخاب درون‌یابی‌ها معقول می‌باشد یا نه، بحث کنید (ر.ک. به: مثال ۴.۲۹).

۴.۳۹ نشان دهید که روابط تنش - کرنش زیر که مربوط به یک مصالح ایزوتروپیک می‌باشند هم‌ارز می‌باشند:

$$\tau_{ij} = \kappa \epsilon_{\nu} \delta_{ij} + 2G \epsilon'_{ij} \quad (\text{الف})$$

$$\tau_{ij} = C_{ijrs} \epsilon_{rs} \quad (\text{ب})$$

$$\tau = C \epsilon \quad (\text{پ})$$

که در آنها κ ضریب تغییر حجمی و G ضریب برشی است:

$$\kappa = \frac{E}{3(1-2\nu)}; \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

E ضریب ارتجاعی و ν ضریب پواسون و ϵ_{ν} کرنش حجمی و ϵ'_{ij} مؤلفه‌های کرنش انحراف‌دار می‌باشند:

$$\epsilon_{\nu} = \epsilon_{kk}; \quad \epsilon'_{ij} = \epsilon_{ij} - \frac{\epsilon_{\nu}}{3} \delta_{ij}$$

$$C_{ijrs} = \lambda \delta_{ij} \delta_{rs} + \mu (\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr})$$

و نیز

که در آنها λ و μ مقادیر ثابت Lamé می‌باشند:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

در روابط (الف) و (ب) از کمیت‌های تانسوری استفاده شده است، در حالی که در رابطه (پ) بردار کرنش‌ها شامل کرنشهای برشی مهندسی می‌باشد (که مساوی دو برابر مؤلفه‌های تانسوری می‌باشد، به عنوان مثال: $\gamma_{xy} = \epsilon_{12} + \epsilon_{21}$). همچنین

ماتریس تنش-کرنش C در (پ)، در جدول ۴.۳ ارائه شده است.

۴.۴۰ مرتبه درونیابی فشار را مشخص کنید که باید در فرمول‌بندی u/p به کار رود تا اینکه ماتریس سختی مشابه فرمول‌بندی مبتنی بر تغییر مکان صرف به دست آید. یک شبکه 2×2 متشکل از عناصر زیر را در نظر بگیرید:

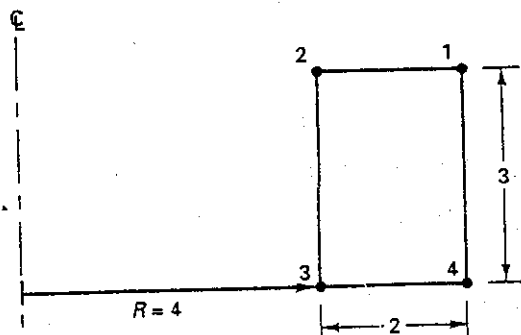
(الف) عنصر چهارگرهی در حالت کرنش مسطح

(ب) عنصر چهارگرهی در شرایط متقارن محوری

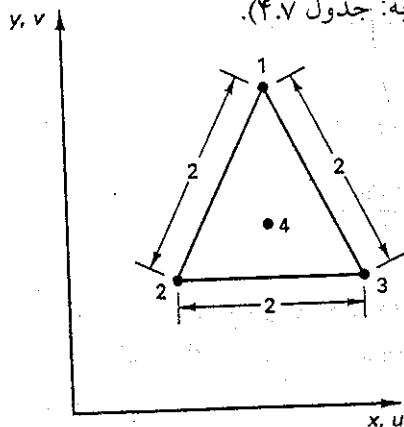
(پ) عنصر نه گرهی در شرایط کرنش مسطح

۴.۴۱ عنصر ۴/۱ در مثال ۴.۳۲ را در نظر بگیرید و فرض کنید که شرط مرزی تغییر مکانی که باید اعمال شود، $u_1 = \bar{u}$ می‌باشد. به طور صریح نشان دهید که اعمال این شرط مرزی پیش یا بعد از چگالش ایستایی درجه آزادی فشار نتیجه یکسانی را در ماتریس سختی مجموعه همبسته عناصر ایجاد می‌نماید.

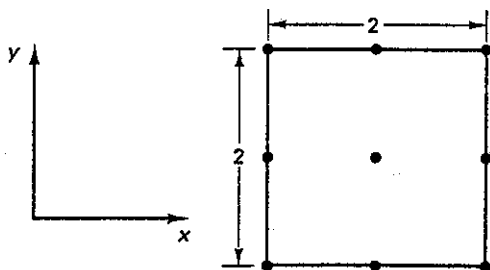
۴.۴۲ عنصر با تقارن محوری ۴/۱ u/p را که در شکل زیر نشان داده شده است در نظر بگیرید. ماتریس‌های B_D و B_v و C' و H_p را برای این عنصر ایجاد نمایید.



۴.۴۳ عنصر c-۴/۳ در شرایط کرنش مسطح که در شکل زیر نشان داده شده است را در نظر بگیرید. تمامی ماتریس‌های درونیابی تغییر مکان و کرنش را برای عنصر فرمول‌بندی کنید (ر.ک. به: جدول ۴.۷).

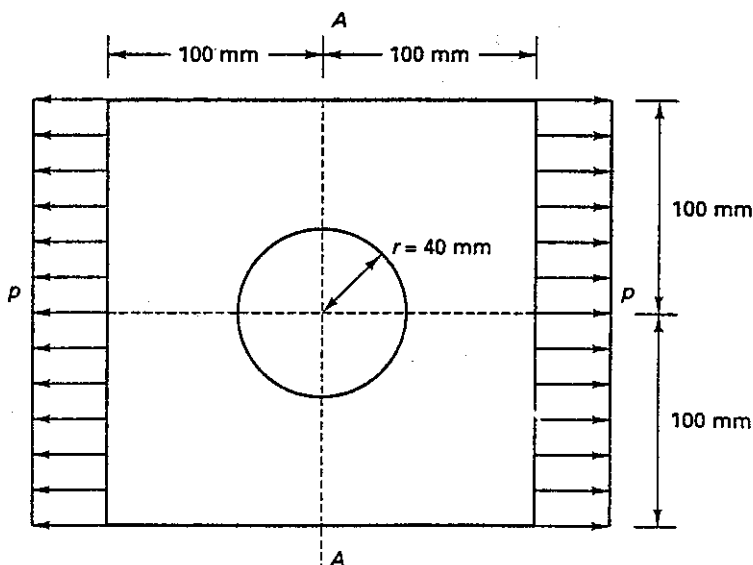


۴.۴۴ عنصر u/p کرنش مسطح $9/3$ را که در شکل زیر نشان داده شده است در نظر بگیرید. ماتریس K_{pp} را محاسبه نمایید.



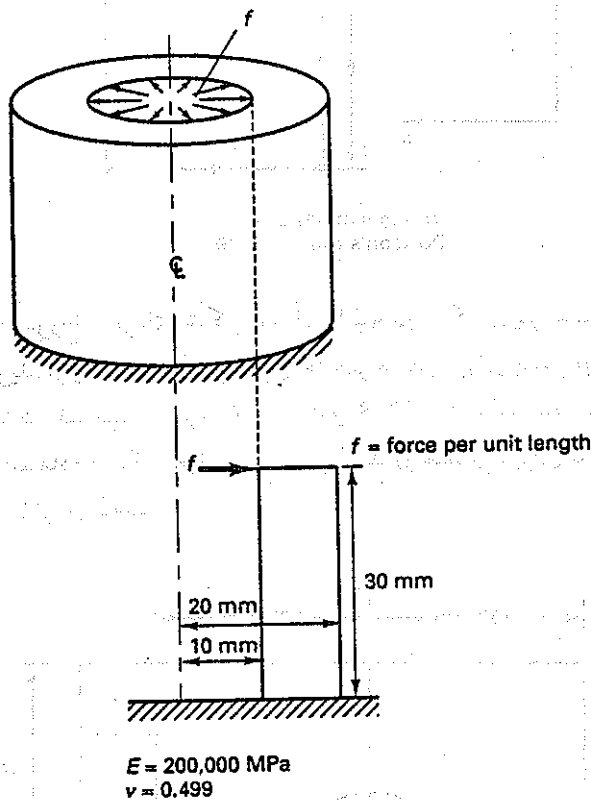
Young's modulus E
Poisson's ratio $\nu = 0.49$

۴.۴۵ صفحه‌ای با سوراخ دایره‌ای شکل در آن را که در شکل زیر نشان داده شده است در نظر بگیرید. از یک برنامه کامپیوتری عناصر محدود برای یافتن توزیع تنش در امتداد مقطع AA با دو ضریب پواسون $\nu = 0/3$ و $\nu = 0/499$ استفاده نمایید. دقت نتایج تحلیل را با استفاده از یک معیار خطا تعیین کنید (راهنمایی: برای تحلیل با $\nu = 0/499$ عنصر $9/3$ مؤثر می‌باشد).



Plane strain condition
Young's modulus $E = 200,000 \text{ MPa}$

۴.۴۶ پاسخ ایستایی استوانه ضخیم نشان داده شده در زیر را با استفاده از یک برنامه کامپیوتری عناصر محدود محاسبه نمایید. برای تحلیل استوانه از ایده‌آل‌سازی‌های بر مبنای عناصر زیر استفاده کنید:



(الف) عنصر مبتنی بر تغییر مکان چهار گره‌ای.

(ب) عنصر مبتنی بر تغییر مکان نه گره‌ای.

(پ) عنصر ۴/۱ u/p .

(ت) عنصر ۹/۳ u/p .

در هر حالت از دنباله‌ای از شبکه‌ها استفاده نموده و نرخ همگرایی انرژی کرنشی را مشخص نمایید.

۴.۵ شرط INF-SUP برای تحلیل محیط تراکم‌ناپذیر و مسائل سازه‌ای

همانگونه که در بخش پیشین اشاره شد، این نکته مهم است که برای تحلیل محیط تقریباً (و نیز کاملاً) تراکم‌ناپذیر، گسسته‌سازی عناصر محدود شرط inf-sup را تأمین نماید. هدف این بخش، ارائه این شرط می‌باشد. در ابتدا فرمول‌بندی مبتنی بر تغییر مکان صرف را در نظر می‌گیریم و سپس فرمول‌بندی تغییر مکان / فشار را ملاحظه می‌کنیم. سرانجام، به اختصار در مورد کاربرد شرط inf-sup برای عناصر سازه‌ای بحث می‌نماییم.

در مباحث زیر فرمول‌بندی‌هایی تغییر مکان و تغییر مکان / فشار را برای یک محیط جامد به کار می‌بریم، با وجود این، نکات و نتایج اساسی مستقیماً به حل جریان سیالات تراکم‌ناپذیر نیز قابل کاربرد می‌باشند، البته در صورتی که سرعت‌ها به جای تغییر مکان‌ها مورد استفاده قرار گیرند (ر.ک. به: بخش ۷.۴).

۴.۵.۱ شرط Inf-sup استخراج شده از ملاحظات همگرایی

می‌خواهیم یک مسئله ارتجاعی خطی عمومی را حل نماییم (ر.ک. به: بخش ۴.۲.۱) که در آن جسم تحت اثر نیروهای جسمی f^B و نیروهای سطحی f^S در سطح Γ_D و شرایط مرزی تغییر مکانی u^S در سطح Γ_K قرار دارد. بدون از دست دادن عمومیت نتایجی که می‌خواهیم در این بخش به آنها دست یابیم، می‌توانیم فرض کنیم که تغییر مکان‌های از پیش تعیین شده u^S و نیروهای سطحی f^S مساوی صفر می‌باشند. البته فرض می‌کنیم که جسم دارای تکیه‌گاه‌های مناسبی می‌باشد، بگونه‌ای که هیچ گونه حرکت صلب جسمی امکان‌پذیر نیست. در این صورت می‌توان مسئله تحلیلی خود را به صورت یک مسئله مینیمم‌سازی نوشت:

$$\min_{v \in V} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) + \frac{\kappa}{2} \int_{Vol} (\operatorname{div} v)^2 dVol - \int_{Vol} f^B \cdot v dVol \right\} \quad (۴.۱۵۱)$$

که در آن از نمادگذاری اندیسی و کمیت‌های تانسوری استفاده می‌شود (ر.ک. به: بخش‌های ۴.۳.۴ و ۴.۴.۳):

$$\begin{aligned} a(u, v) &= 2G \int_{Vol} \sum_{i,j} \epsilon'_{ij}(u) \epsilon'_{ij}(v) dVol \\ \epsilon'_{ij}(u) &= \epsilon_{ij}(u) - \frac{1}{3} \operatorname{div} u \delta_{ij} \\ \epsilon_{ij}(u) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right); \quad \operatorname{div} v = v_{i,i} \end{aligned} \quad (۴.۱۵۲)$$

که در آن $\kappa = E/[3(1 - 2\nu)]$ (ضریب تغییر حجمی)، $G = E/[2(1 + \nu)]$ (ضریب برشی)،

E = ضریب ارتجاعی و ν = ضریب پواسون می‌باشند.

$$V = \left\{ v \mid \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \in L^2(\text{Vol}), i, j = 1, 2, 3; v_i|_{S_u} = 0, i = 1, 2, 3 \right\}$$

در این عبارات، از نمادگذاری که پیشتر تعریف شده است استفاده می‌کنیم (ر.ک. به: بخش ۴.۳). و نیز برای اجتناب از هرگونه تداخل با فضای برداری V ، از نماد "Vol" برای نمایش میدانی که انتگرال‌گیری در روی آن انجام می‌گیرد استفاده خواهیم نمود. همچنین برای بردار v و اسکالر q نرم‌های زیر را به کار می‌بریم:

$$\|v\|_V^2 = \sum_{i,j} \left\| \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\text{Vol})}^2; \quad \|q\|_0^2 = \|q\|_{L^2(\text{Vol})}^2 \quad (4.153)$$

که در آن نرم برداری $\|\cdot\|_V$ برای کار کردن تا حدودی آسانتر است، ولی معادل با نرم Sobolev $\|\cdot\|_1$ می‌باشد که به وسیله (۴.۷۶) تعریف می‌شود (به وسیله نامعادله Poincare-Friedrichs).

در بحث زیرین، به طور صریح اندیس‌های بالا در روی نرم‌ها را نشان نخواهیم داد ولی همواره به طور ضمنی منظورمان این است که یک بردار w دارای نرم $\|w\|_V$ و یک اسکالر v دارای نرم $\|v\|_0$ می‌باشد.

فرض کنید که u ، مینیمم سازنده ۴.۱۵۱ بوده (به عبارت دیگر جواب کامل مسأله) و V_h فضای دنباله‌ای از فضاهای عناصر محدود باشد که برای حل مسأله انتخاب نموده‌ایم. این فضاها در (۴.۸۴) تعریف می‌شوند. مشخص است که هر مسأله گسسته:

$$\min_{v_h \in V_h} \left\{ \frac{1}{2} a(v_h, v_h) + \frac{\kappa}{2} \int_{\text{Vol}} (\text{div } v_h)^2 d\text{Vol} - \int_{\text{Vol}} f \cdot v_h d\text{Vol} \right\} \quad (4.154)$$

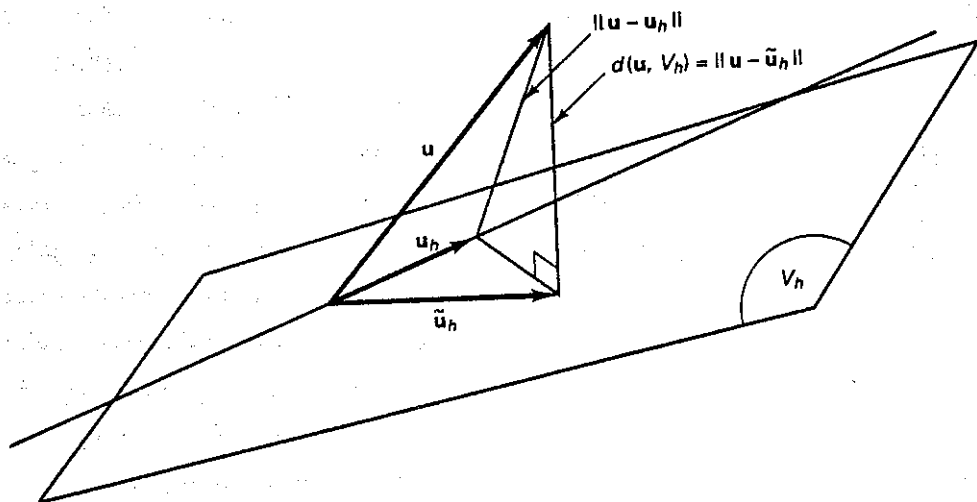
دارای یک جواب عناصر محدود منحصر به فرد u_h است. در بخش ۴.۳.۴ خواص این جواب را ملاحظه نمودیم، بویژه خواص (۴.۹۵) و (۴.۱۰۱) را ارائه کردیم. همچنین بیان کردیم که مقادیر ثابت c در این روابط وابسته به خواص مصالح می‌باشند. حال نکته مهم این است که وقتی ضریب تغییر حجمی κ بسیار بزرگ است، روابط (۴.۹۵) و (۴.۱۰۱) دیگر سودمند نیستند، زیرا این مقادیر ثابت بیش از اندازه بزرگ می‌باشند. بنابراین، می‌خواهیم فضای عناصر محدود V_h ، خاصیت دیگری را ارضا نماید که هنوز هم به صورت (۴.۹۵) می‌باشد ولی در آن مقدار ثابت c علاوه بر اینکه مستقل از h می‌باشد، مستقل از κ نیز است.

برای بیان این خاصیت جدید مورد نظر، ابتدا «فاصله» بین جواب کامل u و فضای عناصر

محدود V_h را تعریف می‌کنیم (ر.ک. به: شکل ۴.۲۲):

$$d(u, V_h) = \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\| = \|u - \tilde{u}_h\| \quad (۴.۱۵۵)$$

که در آن \tilde{u}_h ، یک عنصر مربوط به V_h بوده، ولی در حالت کلی جواب عناصر محدود نیست.



شکل ۴.۲۲ نمایش شماتیکی جواب و فاصله‌ها؛ برای همگرایی بهینه داریم:
 $\|u - u_h\| \leq c d(u, V_h)$ که در آن c مستقل از h و κ است.

شرایط اساسی

در عمل مهندسی، ضریب تغییر حجمی κ ممکن است که از مقادیری در اندازه G تا مقادیری بسیار بزرگ تغییر کند و در حقیقت هنگامی که تراکم‌ناپذیری کامل در نظر گرفته می‌شود مقدار κ بی‌نهایت می‌گردد. هدف ما استفاده از عناصر محدودی است که به طور یکسان مؤثر باشند، صرف نظر از اینکه κ دارای چه مقداری باشد. بنابراین، از نقطه نظر ریاضی، هدف ما یافتن شرایطی در V_h می‌باشد بگونه‌ای که:

$$\|u - u_h\| \leq c d(u, V_h)$$

with a constant c independent of h and κ .

(۴.۱۵۶)

این شرایط ما را در انتخاب عناصر محدود و گسسته‌سازی‌های مؤثر راهنمایی خواهند کرد. نامعادله (۴.۱۵۶) بدین معنی است که فاصله بین جواب پیوسته u و جواب تحلیل عناصر محدود u_h کوچکتر از یک (مقدار معقول) ثابت c ضربدر $d(u, V_h)$ خواهد بود، از اینرو این رابطه با همان مقدار ثابت c ، صرف‌نظر از مقدار ضریب تغییر حجمی مورد استفاده، ارضا می‌گردد. توجه شود که این استقلال c از ضریب تغییر حجمی خاصیت مهمی است که در بخش ۴.۳.۴ هنگامی که رابطه‌ای نظیر (۴.۱۵۶) را استخراج کردیم، در مورد آن بحثی نمودیم [ر.ک. به: (۴.۹۵)].

فرض کنید که شرط (۴.۱۵۶) (به ازای یک مقدار معقول ثابت c) صادق باشد. در این صورت اگر $d(u, V_h)$ مساوی $o(h^k)$ می‌باشد، و با توجه به اینکه می‌دانیم که $\|u - u_h\|$ نیز مساوی $o(h^k)$ است و نیز از آنجا که c دارای مقدار معقولی بوده و مستقل از h می‌باشد، از اینرو به میزانی که h - صرف‌نظر از مقدار ضریب تغییر حجمی مسأله - کاهش پیدا می‌کند، همان دقت حل و همان بهبود در دقت جوابها را مشاهده خواهیم نمود. در این صورت، فضاهاى عناصر محدود برای هر مقدار h دارای خواص تقریب‌سازی خوبی بوده و گسسته‌سازی عناصر محدود قابل اطمینان می‌باشد (ر.ک. به: بخش ۱.۳).

رابطه (۴.۱۵۶) شرط بنیادی ما را برای گسسته‌سازی عناصر محدود بیان می‌کند و فرمول‌بندی‌های عناصر محدود که (۴.۱۵۶) را تأمین می‌کنند، خاصیت قفل شوندگی از خود نشان نمی‌دهند (ر.ک. به: بخش ۴.۴.۳). در بحث بعدی، (۴.۱۵۶) را به صورتهایی می‌نویسیم که با آنها به آسانی می‌توان عناصر محدود مؤثری را انتخاب نمود. در یکی از این فرم‌ها از یک مقدار $\inf\text{-sup}$ استفاده می‌شود که به شرط $\inf\text{-sup}$ معروف است. در ادامه بحث، فضاهاى K و D را تعریف می‌کنیم:

$$K(q) = \{v \mid v \in V, \operatorname{div} v = q\} \quad (4.157)$$

$$D = \{q \mid q = \operatorname{div} v \text{ for some } v \in V\} \quad (4.158)$$

و فضاهاى متناظر برای گسسته‌سازی‌ها عبارتند از:

$$K_h(q_h) = \{v_h \mid v_h \in V_h, \operatorname{div} v_h = q_h\} \quad (4.159)$$

$$D_h = \{q_h \mid q_h = \operatorname{div} v_h \text{ for some } v_h \in V_h\} \quad (4.160)$$

بنابراین فضای $K_h(q_h)$ برای یک q_h معلوم، متناظر با تمامی عناصر v_h در V_h است که $\operatorname{div} v_h = q_h$ را ارضا می‌نماید. همچنین، فضای D_h متناظر با تمامی عناصر q_h با $q_h = \operatorname{div} v_h$ می‌باشد که به عناصر v_h در V_h می‌رسند؛ به عبارت دیگر، برای هر q_h یک عنصر از D_h ، حداقل

یک عنصر v_h در V_h وجود دارد بگونه‌ای که $q_h = \text{div } v_h$. این چنین نظراتی در فضاها K و D نیز قابل کاربرد می‌باشند.

یادآوری می‌کنیم هنگامی که κ بزرگ است، کمیت $\|\text{div } u_h\|$ کوچک خواهد بود؛ هر اندازه κ بزرگتر باشد، $\|\text{div } u_h\|$ کوچکتر خواهد بود و یافتن یک پیش‌بینی دقیق فشار $p_h = -\kappa \text{div } u_h$ دشوار می‌شود. در حد $\kappa \rightarrow \infty$ ، داریم $\text{div } u_h = 0$ ، ولی فشار p_h هنوز هم دارای مقدار متناهی است (و البته از مرتبه نیروهای سطحی وارده) و بالتیجه داریم:

$$\kappa (\text{div } u_h)^2 = 0$$

پیش از ایجاد شرط $\inf\text{-sup}$ ، شرط بیضوی بودن را برای مسأله کاملاً تراکم‌ناپذیر بیان می‌کنیم: یک مقدار ثابت α بزرگتر از صفر و مستقل از h وجود دارد بگونه‌ای که:

$$a(v_h, v_h) \geq \alpha \|v_h\|^2 \quad \forall v_h \in K_h(0) \quad (4.161)$$

این شرط در اساس بیان می‌کند که انرژی کرنشی انحراف‌دار از پایین کران‌دار است، شرطی که به روشنی تأمین می‌گردد. در بخش ۴.۵.۲ مجدداً به شرط بیضوی بودن برای مسأله ارتجاعی تراکم‌ناپذیر رجوع کرده، بیشتر توضیح خواهیم داد. تأکید می‌کنیم که در این فرمول‌بندی عناصر محدود، متغیرها صرفاً تغییر مکان‌ها می‌باشند.

به دست آوردن شرط Inf-Sup

حال شرط $\inf\text{-sup}$ را - که با تأمین آن، تضمین می‌شود که (۴.۱۵۶) صادق است - می‌توان به صورتی که در زیر شرح داده می‌شود ایجاد نمود. از آنجا که شرط تراکم‌ناپذیری کامل، به روشنی نمایشگر قید بسیار سختی می‌باشد، از اینرو این حالت را در نظر می‌گیریم. در این صورت $q = 0$ ، u متعلق به $K(q)$ برای $q = 0$ می‌باشد [به عبارت دیگر $K(0)$] و مسأله پیوسته (۴.۱۵۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\min_{v \in K(0)} \left\{ \frac{1}{2} a(v, v) - \int_{\text{Vol}} f^B \cdot v \, d\text{Vol} \right\} \quad (4.162)$$

که جواب آن u می‌باشد و مسأله گسسته عبارت است از:

$$\min_{v_h \in K_h(0)} \left\{ \frac{1}{2} a(v_h, v_h) - \int_{\text{Vol}} f^B \cdot v_h \, d\text{Vol} \right\} \quad (4.163)$$

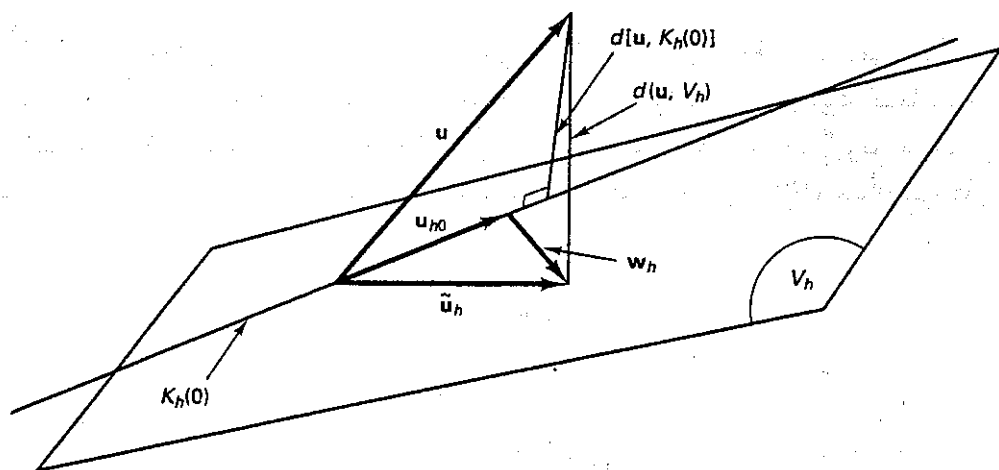
که جواب آن u_h است.

حال شرط (۴.۱۵۶) را در نظر می‌گیریم. مشاهده می‌کنیم که در این شرط تغییر مکان‌ها را مقایسه می‌نماییم. در بحث زیرین یک فاصله را «کوچک» محسوب می‌داریم اگر به میزانی که h کاهش پیدا می‌کند، آن فاصله با همان مرتبه مقدار $d(u, V_h)$ باقی بماند. به طور مشابه، هنگامی یک بردار را کوچک در نظر می‌گیریم که طول آن، تعریف مذکور را برساند و نیز یک بردار هنگامی به بردار دیگر نزدیک است که اختلاف برداری در این دو بردار کوچک باشد. از آنجا که $u_h \in K_h(0)$ ، و بنابراین همواره $d[u, K_h(0)] \leq \bar{c} d[u, V_h]$ می‌باشد (ر.ک. به: تمرین ۴.۴۷) و می‌توان شرط (۴.۱۵۶) را به صورت زیر نوشت:

$$d[u, K_h(0)] \leq c d(u, V_h) \quad (4.164)$$

که بدین معنی است که ما می‌خواهیم فاصله u تا $K_h(0)$ کوچک باشد. رابطه مزبور این شرط را بیان می‌کند که اگر فاصله بین u و V_h (فضای کامل تغییر مکان عناصر محدود)، هنگامی که h به سمت صفر میل می‌کند، با نرخ معینی کاهش پیدا کند، در این صورت فاصله بین u و فضای که در آن جواب واقعی قرار دارد نیز با همان نرخ کاهش پیدا خواهد کرد [زیرا $u_h \in K_h(0)$]. شکل ۴.۲۳ بطور شماتیکی فضاها و بردارهای مورد استفاده را نشان می‌دهد. فرض کنید u_{h0} بردار انتخابی ما از $K_h(0)$ بوده و w_h بردار متناظر باشد بگونه‌ای که:

$$\tilde{u}_h = u_{h0} + w_h \quad (4.165)$$



شکل ۴.۲۳ فضاها و بردارهای مورد نظر در استخراج شرط inf-sup

در این صورت می‌توان ثابت کرد که شرط (۴.۱۶۴) هنگامی تأمین می‌گردد که داشته باشیم:

for all $q_h \in D_h$, there is a $w_h \in K_h(q_h)$ such that

$$\|w_h\| \leq c' \|q_h\| \quad (4.166)$$

where c' is independent of h and the bulk modulus κ .

اولاً، همواره داریم (ر.ک. به: تمرین ۴.۴۸):

$$\|\operatorname{div}(u - \bar{u}_h)\| \leq \alpha \|u - \bar{u}_h\| \quad (4.167)$$

و بنابراین داریم:

$$\|\operatorname{div} \bar{u}_h\| \leq \alpha d(u, V_h) \quad (4.168)$$

که در آن α یک مقدار ثابت می‌باشد و از $\operatorname{div} u = 0$ استفاده نمودیم.

ثانیاً، ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} \|u - u_{h0}\| &= \|u - \bar{u}_h + w_h\| \\ &\leq \|u - \bar{u}_h\| + \|w_h\| \end{aligned}$$

حال فرض می‌کنیم که در (۴.۱۶۶)، $q_h = \operatorname{div} \bar{u}_h$ صدق می‌کند. از آنجا که $\operatorname{div} u_{h0} = 0$ می‌باشد، از اینرو داریم: $\operatorname{div} \bar{u}_h = \operatorname{div} w_h$ که در آن یادآوری می‌کنیم که \bar{u}_h به وسیله (۴.۱۵۵) تثبیت شده و از اینرو q_h نیز تثبیت می‌گردد، ولی با انتخاب مقادیر مختلف w_h ، مقادیر مختلفی نیز برای u_{h0} به دست می‌آیند. در این صورت نتیجه می‌شود که:

$$\begin{aligned} \|u - u_{h0}\| &\leq d(u, V_h) + c' \|q_h\| \\ &= d(u, V_h) + c' \|\operatorname{div} \bar{u}_h\| \\ &\leq d(u, V_h) + c' \alpha d(u, V_h) \end{aligned} \quad (4.169)$$

تأکید می‌کنیم که از شرط (۴.۱۶۶) در استخراج روابط مزبور استفاده نموده‌ایم و فرض کرده‌ایم که u_{h0} عنصری در $K_h(0)$ می‌باشد بگونه‌ای که w_h رابطه (۴.۱۶۶) را ارضا می‌نماید. توجه شود که (۴.۱۶۸) تنها هنگامی ایجاد می‌شود که $\|\operatorname{div} \bar{u}_h\|$ کوچک باشد، ولی در این صورت (۴.۱۶۹) نیز ایجاد می‌گردد زیرا $\|u - u_{h0}\|$ کوچک است.

ثالثاً، از آنجا که $u_{h0} \in K_h(0)$ است، از اینرو از (۴.۱۶۹) حاصل می‌شود:

$$d[u, K_h(0)] \leq \|u - u_{h0}\| \leq (1 + \alpha c') d(u, V_h) \quad (4.170)$$

که با فرض $c = 1 + \alpha c'$ ، مانند رابطه (۴.۱۶۴) می باشد و یادآوری می کنیم که c مستقل از h و ضریب تغییر حجمی است.

مرحله مهم در استخراج (۴.۱۶۴) استفاده از (۴.۱۶۶) با $q_h = \operatorname{div} \bar{u}_h$ است و می توانیم یک بردار w_h را که کوچک است انتخاب نماییم [که با استفاده از (۴.۱۶۶) و (۴.۱۶۸) نتیجه می شود]. یادآوری می کنیم که (۴.۱۶۶) تنها شرطی است که برای اثبات (۴.۱۶۴) ضروری است و بنابراین برای داشتن یک گسسته سازی عناصر محدود که یک نرخ بهین همگرایی را به دست خواهد داد، یک شرط بنیادی می باشد.

نرخ بهین همگرایی در (۴.۱۶۴) ایجاب می کند که مقدار ثابت c' در (۴.۱۶۶) مستقل از h باشد. به عنوان مثال فرض کنید که به عوض (۴.۱۶۶)، داریم $\|w_h\| \leq (1/\beta_h) \|q_h\|$ که در آن β_h با کاهش h می یابد. در این صورت (۴.۱۷۰) به صورت زیر درخواهد آمد:

$$d[u, K_h(0)] \leq \left(1 + \frac{\alpha}{\beta_h}\right) d(u, V_h) \quad (4.171)$$

و بنابراین فاصله بین u و $K_h(0)$ با همان نرخ $d(u, V_h)$ کاهش پیدا نخواهد کرد. ولی، در صورتی که $d(u, V_h)$ سریعتر از β_h کاهش یابد، همگرایی باز هم پیش خواهد آمد، اگرچه این همگرایی بهین نمی باشد. این نکته نشان می دهد که شرط (۴.۱۶۶) یک تضمین قوی برای همگرایی مطلوب خواص گسسته سازی ها می باشد.

حال می خواهیم (۴.۱۶۶) را به صورت شرط inf-sup بازنویسی کنیم. از (۴.۱۶۶) با متغیرهای $w_h \in K_h(q_h)$ ، q_h و w_h شرط زیر را پیدا می کنیم:

$$\|w_h\| \|q_h\| \leq c' \|q_h\|^2 = c' \int_{\text{Vol}} q_h \operatorname{div} w_h \, d\text{Vol} \quad (4.172)$$

یا شرط مذکور به این صورت است که برای تمام $q_h \in D_h$ ، یک $w_h \in K_h(q_h)$ وجود دارد بگونه ای که:

$$\frac{1}{c'} \|q_h\| \leq \frac{\int_{\text{Vol}} q_h \operatorname{div} w_h \, d\text{Vol}}{\|w_h\|} \quad (4.173)$$

بنابراین، می خواهیم:

$$\frac{1}{c'} \|q_h\| \leq \sup_{v_h \in V_h} \frac{\int_{\text{Vol}} q_h \operatorname{div} v_h \, d\text{Vol}}{\|v_h\|} \quad (4.174)$$

و از اینرو شرط inf-sup به صورت زیر نتیجه می‌شود:

$$\inf_{q_h \in D_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{\int_{Vol} q_h \operatorname{div} v_h dVol}{\|v_h\| \|q_h\|} \geq \beta > 0$$

(۴.۱۷۵)

with β a constant independent of κ and h

یادآوری می‌کنیم که $\beta = 1/c'$.

بنابراین (۴.۱۶۶) به طور ضمنی دلالت بر (۴.۱۷۵) دارد و نیز می‌توان اثبات کرد که (۴.۱۷۵) به طور ضمنی دلالت بر (۴.۱۶۶) دارد (ر.ک. به: مثال ۴.۴۲). (اثبات این مطلب را بعداً ارائه خواهیم داد، زیرا که باید در آغاز برخی واقعیت‌های اساسی معینی را ارائه نماییم). بنابراین ممکن است که به (۴.۱۶۶) به عنوان صورت دیگری از شرط inf-sup رجوع نماییم. شرط inf-sup بیان می‌کند که برای مؤثر بودن یک گسسته‌سازی عناصر محدود، برای دنباله‌ای از فضاها عناصر محدود، اگر در نظر بگیریم که $q_h \in D_h$ ، در این صورت باید یک $v_h \in V_h$ وجود داشته باشد بگونه‌ای که خارج قسمت در (۴.۱۷۵) بزرگتر یا مساوی β که (بزرگتر از صفر است) گردد. اگر شرط inf-sup به وسیله دنباله‌ای از فضاها عناصر محدود تأمین شود، در این صورت روش گسسته‌سازی عناصر محدود مورد نظر، خاصیت تقریب‌سازی مطلوبی را که دنبال آن هستیم به نمایش خواهد گذاشت، به عنوان مثال (۴.۱۵۶) ارضا خواهد شد.

توجه شود که اگر β وابسته به h باشد، به عبارت دیگر (۴.۱۷۵) با β_h ، به عوض β ، ارضا شود، در این صورت عبارت (۴.۱۷۱) قابل کاربرد خواهد بود (به عنوان مثال ر.ک. به: عنصر تیری تک پارامتری سه گرهی در بخش ۴.۵.۷).

اینکه آیا شرط inf-sup ارضا می‌شود یا نه، در حالت کلی، بستگی به عنصر محدود خاص مورد استفاده، هندسه شبکه و شرایط مرزی دارد. اگر یک گسسته‌سازی با استفاده از یک عنصر محدود خاص و هرگونه هندسه شبکه‌ای و شرایط مرزی، رابطه (۴.۱۷۵) را تأمین نماید، به آسانی، می‌توان گفت که شرط inf-sup به وسیله عنصر تأمین می‌شود. از سوی دیگر، اگر برای یک هندسه شبکه‌ای و / یا یک مجموعه شرایط مرزی (واقع‌بینانه از نکته نظر فیزیکی)، گسسته‌سازی، رابطه (۴.۱۷۵) را ارضا ننماید، در این صورت به سادگی می‌توان گفت که عنصر، شرط inf-sup را تأمین نمی‌نماید.

فرم دیگر شرط Inf-Sup

برای تحلیل اینکه آیا یک عنصر، شرط inf-sup (۴.۱۷۵) را تأمین می‌کند یا نه، فرم دیگری از این شرط بسیار مفید می‌باشد که عبارت است از:

For all \mathbf{u} there is a $\mathbf{u}_I \in V_h$ (a vector that interpolates \mathbf{u}) such that

$$\int_{\text{Vol}} \text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_I) q_h \, d\text{Vol} = 0 \quad \text{for all } q_h \in D_h \quad (4.176)$$

$$\|\mathbf{u}_I\| \leq c \|\mathbf{u}\|$$

with the constant c independent of \mathbf{u} , \mathbf{u}_I , and h .

هم‌ارزی (۴.۱۷۶) و (۴.۱۷۵) [و بنابراین (۴.۱۶۶)] را می‌توان به صورت تفضیلی ثابت نمود (ر.ک. به: F. Brezzi and M. Fortin [A] و F. Brezzi and K. J. Bathe [A, B]). ولی صرفاً برای ارتباط گزاره‌های (۴.۱۷۶) به بحث نخستین ما، یادآوری می‌کنیم که دو شرط بنیادی در استخراج شرط inf-sup ظاهر می‌شوند؛ یعنی اینکه یک بردار \mathbf{w}_h وجود دارد بگونه‌ای که (ر.ک. به: شکل ۴.۲۳):

$$\text{div } \mathbf{w}_h = \text{div } \bar{\mathbf{u}}_h \quad (4.177)$$

و [ر.ک. به: (۴.۱۶۶) و (۴.۱۶۸)]

$$\|\mathbf{w}_h\| \leq c^* d(\mathbf{u}, V_h) \quad (4.178)$$

که در آن c^* یک مقدار ثابت است. یادآوری می‌کنیم که اگر بردار $\bar{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}$ (بردار تفاوت بین بهترین تقریب‌سازی در V_h و جواب کامل) را بردار جواب و بردار \mathbf{w}_h را بردار درون‌یابی در نظر بگیریم، در این صورت (۴.۱۷۶) متناظر با (۴.۱۷۷) و (۴.۱۷۸) خواهد بود.

بنابراین، شرایط بدین گونه‌اند که بردار درون‌یابی \mathbf{w}_h ، شرایط دیوژانس مزبور و شرایط «با اندازه کوچک» برای بردار $(\bar{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u})$ و تعیین شده در روی آن را تأمین خواهد کرد تا اینکه روش گسیسته‌سازی مؤثری به دست آید.

سه صورت بیان شرط inf-sup، (۴.۱۶۶)، (۴.۱۷۵) و (۴.۱۷۶) در طرق مختلف سودمند می‌باشند، ولی مشخص است که هر سه، شرط مشابهی را بیان می‌کنند. در تحلیل‌های ریاضی، معمولاً فرم‌های (۴.۱۶۶) و (۴.۱۷۵) به کار می‌روند در حالی که (۴.۱۷۶) اغلب به طور بسیار ساده برای اثبات اینکه آیا یک عنصر خاصی شرط inf-sup را ارضا می‌کند یا نه،

مورد استفاده قرار می‌گیرد (ر.ک. به: مثال ۴.۳۶).

اگر شرط $\inf\text{-sup}$ را در نظر بگیریم، تصدیق می‌کنیم که هر اندازه فضای $K_h(0)$ غنی‌تر باشد، به همان میزان ظرفیت برای ارضای (۴.۱۷۵) [به عبارت دیگر (۴.۱۶۴)] بیشتر است. با وجود این، متأسفانه در هنگام استفاده از عناصر مبتنی بر تغییر مکان استاندارد، قید برای عناصر و شبکه‌های مورد نظر (یعنی فضاها V_h) عموماً بیش از اندازه قوی است؛ از اینرو گسسته‌سازی‌ها از خود خاصیت قفل شوندگی نشان می‌دهند (ر.ک. به: شکل ۴.۲۰). بنابراین توجه ما به سوی فرمول‌بندی‌های آمیخته‌ای سوق داده می‌شود که خاصیت قفل شوندگی از خود نشان نمی‌دهند و نرخ‌های همگرایی مطلوبی را به نمایش می‌گذارند. بهترین نوع فرمول‌بندی‌های آمیخته، فرمول‌بندی‌های تغییر مکان / فشار می‌باشند که پیشتر در بخش ۴.۴.۳ معرفی گردیدند. فرمول‌بندی تغییر مکان صرف (همواره) پایدار است ولی عموماً خاصیت قفل شوندگی از خود نشان می‌دهد، با این حال برای هر نوع فرمول‌بندی آمیخته، نگرانی اصلی دیگر پایداری آن است. در بحث بعدی ملاحظه خواهیم نمود که شرایط عدم قفل شوندگی و پایداری هنگامی ارضا می‌شوند که با انتخاب مناسب درونی‌یابی‌های تغییر مکان و فشار، شرط $\inf\text{-sup}$ تأمین گردد و اگر درونی‌یابی‌ها برای تغییر مکان‌ها و فشار به طور مناسبی انتخاب شوند، در این صورت نرخ همگرایی (بهین) مطلوبی نیز به دست می‌آید.

تضعیف قید

فرمول‌بندی u/p را در نظر می‌گیریم. مسأله گسسته وردشی در فرمول‌بندی u/p [مطابق با (۴.۱۴۰) و (۴.۱۴۳)] عبارت است از:

$$\min_{\mathbf{v}_h \in V_h} \left\{ \frac{1}{2} a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \frac{\kappa}{2} \int_{\text{Vol}} [P_h(\text{div } \mathbf{v}_h)]^2 d\text{Vol} - \int_{\text{Vol}} \mathbf{f}^B \cdot \mathbf{v}_h d\text{Vol} \right\} \quad (4.179)$$

که در آن عملگر تصویر P_h بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\int_{\text{Vol}} [P_h(\text{div } \mathbf{v}_h) - \text{div } \mathbf{v}_h] q_h d\text{Vol} = 0 \quad \text{for all } q_h \in Q_h \quad (4.180)$$

و Q_h «یک فضای فشار» می‌باشد که انتخاب می‌گردد. مشاهده می‌کنیم که Q_h همواره شامل $P_h(D_h)$ است، ولی Q_h بعضی مواقع بزرگتر از $P_h(D_h)$ می‌باشد و این حالتی است که ما بعداً در مورد آن بحث خواهیم نمود.

برای تصدیق اینکه (۴.۱۷۹) و (۴.۱۸۰) در حقیقت معادل فرمول‌بندی u/p می‌باشند، (۴.۱۷۹) و (۴.۱۸۰) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

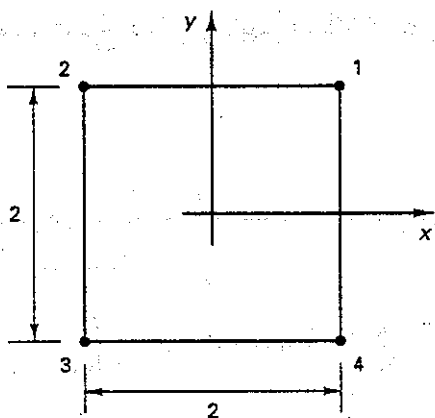
$$2G \int_{Vol} \epsilon_{ij}^e(u_h) \epsilon_{ij}^e(v_h) dVol - \int_{Vol} p_h \operatorname{div} v_h dVol = \int_{Vol} f^B \cdot v_h dVol \quad \forall v_h \in V_h \quad (4.181)$$

$$\int_{Vol} \left(\frac{p_h}{\kappa} + \operatorname{div} u_h \right) q_h dVol = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \quad (4.182)$$

این معادلات، همان معادلات (۴.۱۴۰) و (۴.۱۴۳) بخش ۴.۴.۳ می‌باشند و یادآوری می‌کنیم که آنها به ازای هر مقدار $\kappa > 0$ معتبر هستند. نکته اصلی در فرمول‌بندی u/p این است که (۴.۱۸۰) [و یا به عبارت دیگر (۴.۱۸۲)] به طور انفرادی به هر عنصر اعمال می‌شود و به شرط اینکه κ متناهی باشد، متغیرهای فشار را می‌توان به طور ایستا در همان مرحله از فرمول‌بندی عنصر حذف کرد (چگالش ایستایی) (قبل از شوار نمودن ماتریس سختی عنصر در ماتریس سختی کلی سازه).

مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۴.۳۴: $P_h(\operatorname{div} v_h)$ را برای عنصر ۴/۱ نشان داده شده در شکل ۴.۳۴ استخراج نمائید. بنابراین، عبارت $\int_{Vol} [P_h(\operatorname{div} v_h)]^2 dVol$ را در (۴.۱۷۹) تعیین کنید.



شکل ۴.۳۴ E یک عنصر کرنش مسطح ۴/۱

حل:

داریم:

$$\operatorname{div} v_h = [h_{1,x} \quad \dots \quad h_{4,x} : h_{1,y} \quad \dots \quad h_{4,y}] \hat{u}$$

که در آن:

$$\hat{u}^T = [u_1 \quad \dots \quad u_4 : v_1 \quad \dots \quad v_4]$$

حال (۴.۱۸۰) را با این فرض که q_h یک مقدار ثابت غیر صفر دلخواه است (یعنی $q_h = \alpha$) به کار می‌بریم، زیرا در این جا Q_h فضای فشارهای ثابت است. از آنجا که $P_h(\text{div } \mathbf{v}_h)$ نیز ثابت است، از اینرو از (۴.۱۸۰) داریم:

$$4P_h(\text{div } \mathbf{v}_h)\alpha = \alpha \int_{\text{vol}} \text{div } \mathbf{v}_h d\text{Vol}$$

که نتیجه زیر را به دست می‌دهد:

$$P_h(\text{div } \mathbf{v}_h) = \frac{1}{4} [1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1 \quad 1] \hat{\mathbf{u}} \\ = \mathbf{D} \hat{\mathbf{u}}$$

بنابراین داریم:

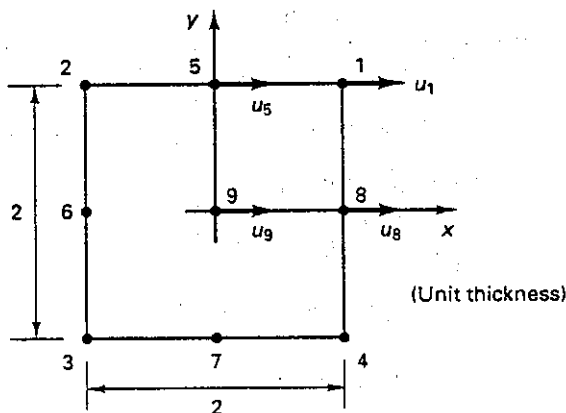
$$\frac{\kappa}{2} \int_{\text{vol}} [P_h(\text{div } \mathbf{v}_h)]^2 d\text{Vol} = \frac{\kappa}{2} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{G}_h \hat{\mathbf{u}} \quad \text{که در آن:}$$

$$\mathbf{G}_h = 4\mathbf{D}^T \mathbf{D}$$

توجه شود که اگر چه از فضای فشار Q_h استفاده نموده‌ایم، ماتریس سختی حاصله از (۴.۱۷۹) تنها متناظر با تغییر مکان‌های نقاط گرهی خواهد بود.

همچنین یادآوری می‌کنیم که عبارت $P_h(\text{div } \mathbf{v}_h)$ ، صرفاً $\text{div } \mathbf{v}_h$ در $x = y = 0$ می‌باشد.

مثال ۴.۳۵: عنصر نه گرهی نشان داده شده در شکل ۴.۳۵ E را در نظر بگیرید و فرض کنید که \mathbf{v}_h به وسیله تغییر مکان‌های نقاط گرهی $u_1 = 0.25$ و $u_2 = 0.5$ و $u_3 = 0.5$ و $u_4 = 1$ و سایر تغییر مکان‌های نقاط گرهی که مساوی صفر می‌باشند داده شده است. فرض کنید که Q_h فضای مناظر با $\{I, x, y\}$ است. $P_h(\text{div } \mathbf{v}_h)$ را تعیین کنید.



شکل ۴.۳۵ E یک عنصر ۹/۳ تحت اثر تغییر مکان‌های نقاط گرهی

حل:

برای تعیین $P_h(\text{div } \mathbf{v}_h)$ ، از رابطه عمومی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int_{\text{Vol}} (P_h(\text{div } \mathbf{v}_h) - \text{div } \mathbf{v}_h) q_h d\text{Vol} = 0 \quad \forall q_h \in Q_h \quad (\text{الف})$$

در این مثال داریم:

$$\text{div } \mathbf{v}_h = \frac{\partial u_h}{\partial x} + \frac{\partial v_h}{\partial y}$$

که در آن u_h و v_h به وسیله تغییر مکان‌های نقاط گرهی عنصر مشخص شده‌اند. بنابراین

$$u_h = \frac{1}{4}(1+x)(1+y)$$

$$v_h = 0$$

$$\text{div } \mathbf{v}_h = \frac{1}{4}(1+y)$$

و

$$P_h(\text{div } \mathbf{v}_h) = a_1 + a_2x + a_3y \quad \text{فرض کنید که:}$$

در این صورت (الف)، به ازای $q_h = 1, x, y$ ، نتیجه زیر را به دست می‌دهد.

$$\int_{\text{Vol}} \left[(a_1 + a_2x + a_3y) - \frac{1}{4}(1+y) \right] q_h dx dy = 0 \quad (\text{ب})$$

بنابراین از (ب) مجموعه معادلات زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \int_{\text{Vol}} dx dy & \int_{\text{Vol}} x dx dy & \int_{\text{Vol}} y dx dy \\ \int_{\text{Vol}} x^2 dx dy & \int_{\text{Vol}} xy dx dy & \int_{\text{Vol}} y^2 dx dy \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{\text{Vol}} \frac{1}{4}(1+y) dx dy \\ \int_{\text{Vol}} \frac{1}{4}(1+y)x dx dy \\ \int_{\text{Vol}} \frac{1}{4}(1+y)y dx dy \end{bmatrix}$$

Symmetric

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ \text{Sym.} & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad (\text{پ})$$

از حل (پ) نتایج $a_1 = \frac{1}{4}$ و $a_2 = 0$ ، $a_3 = \frac{1}{4}$ حاصل می‌گردد بنابراین داریم:

$$P_h(\text{div } \mathbf{v}_h) = \frac{1}{4}(1+y)$$

این نتیجه صحیح می‌باشد، چرا که $\text{div } \mathbf{v}_h$ را می‌توان کاملاً در Q_h به نمایش گذارد و درچنین حالتی، مشخص است که تصویر، مقدار $\text{div } \mathbf{v}_h$ را به دست می‌دهد.

اینک شرط inf-sup متناظر با (۴.۱۷۹)، شبیه شرط inf-sup است که پیش از این مورد بحث واقع گردید، ولی در آن از عبارت $P_h(\text{div } \mathbf{v}_h)$ به جای $\text{div } \mathbf{v}_h$ استفاده شده است، بنابراین، حالا شرط ما به صورت زیر می‌باشد:

$$\inf_{q_h \in P_h(D_h)} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{\int_{\text{Vol}} q_h \text{div } \mathbf{v}_h d\text{Vol}}{\|\mathbf{v}_h\| \|q_h\|} \geq \beta > 0 \quad (۴.۱۸۳)$$

به عبارت دیگر، حالا شرط inf-sup متناظر با هر عنصر در V_h و $P_h(D_h)$ می‌باشد. بنابراین هنگامی که (۴.۱۶۶) و (۴.۱۷۵) و یا (۴.۱۷۶) را به عناصر u/p که به صورت آمیخته فرمول‌بندی شده‌اند اعمال می‌کنیم، نیاز داریم که فضاهای عناصر محدود V_h و $P_h(D_h)$ را در نظر بگیریم که در آنها به جای D_h از $P_h(D_h)$ استفاده می‌نماییم.

مثال ۴.۳۶: ثابت کنید که شرط inf-sup به وسیلهٔ عنصر u/p سه بعدی $9/3$ که در بخش ۴.۴.۳ ارائه گردید، تأمین می‌شود.

حل:

برای اثبات، فرمی از شرط inf-sup را که در (۴.۱۷۶) ارائه شده است استفاده می‌کنیم (ر.ک. به: F. Brezzi and K. J. Bathe [A]). اگر \mathbf{u} را هموار در نظر بگیریم، یک درون‌یابی $\mathbf{u}_I \in V_h$ را باید پیدا کنیم بگونه‌ای که به ازای هر عنصر m و برای هر q_h چندجمله‌ای از درجه کوچکتر یا مساوی یک در $\text{Vol}^{(m)}$ داشته باشیم:

$$\int_{\text{Vol}^{(m)}} (\text{div } \mathbf{u} - \text{div } \mathbf{u}_I) q_h d\text{Vol}^{(m)} = 0 \quad (\text{الف})$$

برای تعریف \mathbf{u}_I ، مقدار هر تغییر مکان را در نه گره عنصر (گره‌های گوشه، گره‌های میانی اضلاع و گره مرکزی) اعمال می‌کنیم. ابتدا با گره‌های گوشه شروع می‌کنیم و برای این گره‌های $i = 1, 2, 3, 4$ نیاز داریم که:

$$\mathbf{u}_I|_i = \mathbf{u}|_i \quad \text{هشت شرط} \quad (\text{ب})$$

سپس مقادیر را در گرهمای میانی اضلاع ۵، ۶، ۷، ۸ به زبیه طریقی تنظیم می‌کنیم که:

$$\int_{S_j} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_I) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_j} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_I) \cdot \boldsymbol{\tau} dS = 0 \quad \text{هشت شرط} \quad (\text{پ})$$

که در آن S_1, \dots, S_4 چهار لبهٔ عنصر بوده و \mathbf{n} بردار واحد عمود بر هر لبه و $\boldsymbol{\tau}$ بردار واحد مماس بر هر یک از لبه‌ها می‌باشند.

سپس یادآوری می‌کنیم که رابطه (الف)، برای هر مقدار ثابت q_h ، به طور ضمنی دلالت بر این دارد که:

$$\int_{Vol(m)} \text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_I) q_h dVol(m) = q_h \sum_{S_1, \dots, S_4} \int_{S_j} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_I) \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{ت})$$

حال باید در گره مرکزی عنصر از دو درجه آزادی استفاده کنیم. این مقادیر را به طریقه‌ای انتخاب می‌کنیم که:

$$\int_{Vol(m)} \text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_I) x dVol(m) = \int_{Vol(m)} \text{div}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_I) y dVol(m) = 0 \quad (\text{ث})$$

یادآوری می‌کنیم که (ت) و (ث) به طور ضمنی دلالت بر (الف) دارند و \mathbf{u}_I ، که عنصر به عنصر با استفاده از (ب) و (پ) ساخته می‌شود، از یک عنصر به عنصر دیگر پیوسته خواهد بود. سرانجام یادآوری می‌کنیم که اگر \mathbf{u} یک (بردار) چند جمله‌ای از درجه کوچکتر یا مساوی ۲ در عنصر باشد، درمی‌یابیم که $\mathbf{u}_I \equiv \mathbf{u}$ و این نکته کران‌های بهینی را برای $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_I\|$ تضمین می‌کند و به طور ضمنی دلالت بر شرط $\|\mathbf{u}_I\| \leq c \|\mathbf{u}\|$ در (۴.۱۷۶) به ازای تمام \mathbf{u} ها دارد.

در حالی که در فرمول‌بندی u/p ، تصویر (۴.۱۸۰) برای هر عنصر به طور انفرادی انجام می‌گیرد، در فرمول‌بندی $u/p-c$ یک درون‌یابی فشار پیوسته فرض می‌شود و سپس (۴.۱۸۱) و (۴.۱۸۲) اعمال می‌شوند. رابطه (۴.۱۸۲) با درون‌یابی فشار پیوسته مجموعه‌ای از معادلات را که ترکیبی از تغییر مکان‌ها و فشار می‌باشند، برای عناصر مجاور هم نتیجه می‌دهد. در این حالت، شرط $\inf\text{-sup}$ هنوز هم به وسیله (۴.۱۸۳) ارائه می‌گردد، ولی حالا فضای فشار متناظر با درون‌یابی‌های فشار پیوسته نقاط گرهی می‌باشد.

هنگام کار کردن با شرط $\inf\text{-sup}$ ملاحظه می‌کنیم که توانایی تأمین شرط مذکور بستگی به چگونگی ارتباط فضای $P_h(D_h)$ با فضای تغییر مکان‌های V_h دارد. در این جا مجدداً P_h عملگر تصویر در روی فضای Q_h است [ر.ک. به: (۴.۱۸۰) و (۴.۱۸۲)] و در حالت کلی هر چقدر فضای Q_h کوچکتر باشد، تأمین شرط مذکور آسانتر خواهد بود. البته اگر برای یک فضای معلوم V_h ، شرط $\inf\text{-sup}$ با Q_h کوچکتر از حد نیاز تأمین شود، در این صورت یک عنصر پایدار داریم اما میزان دقت پیش‌بینی آن عنصر در حد امکان بالا نمی‌باشد (بالا بودن این میزان دقت تا آنجا امکان‌پذیر است که در حالی که از فضای بزرگتر Q_h استفاده می‌شود، ولی باز هم شرط $\inf\text{-sup}$ ارضاء می‌گردد).

به عنوان مثال، عنصر تک‌پارامتری نه گرهی را در نظر بگیرید (ر.ک. به: بخش ۴.۴.۳). با استفاده از فرمول‌بندی u/p با $P_h = I$ (عملگر همانی)، فرمول‌بندی مبتنی بر تغییر مکان به دست می‌آید ولی عنصر از خود خاصیت قفل شوندگی نشان می‌دهد. با کاهش فید جهت پیدا کردن

عناصر ۹/۳، شرط inf-sup ارضاء می‌گردد (ر.ک. به: مثال ۴.۳۶) و نرخ‌های همگرایی بهینی برای تغییر مکان‌ها و فشار به دست می‌آیند؛ به عبارت دیگر، نرخ همگرایی برای تغییر مکان‌ها $o(h^3)$ و برای تنش $o(h^2)$ است، که همان نرخ‌هایی هستند که می‌توان با یک درون‌یابی سهموی تغییر مکان‌ها و یک درون‌یابی خطی فشار انتظار داشت. با کاهش بیشتر قید برای یافتن عنصر ۹/۱، شرط inf-sup هم ارضاء می‌گردد، و در حالی که رفتار عنصر برای درون‌یابی‌های مورد استفاده هنوز هم بهین می‌باشد، ولی میزان دقت پیش‌بینی عنصر نه‌گرمی، بهترین میزان دقت ممکن نیست (زیرا یک فشار ثابت برای عنصر فرض می‌شود، در حالی که می‌توانستیم یک تغییر خطی را برای فشار عنصر استفاده نماییم).

این نکته (در مورد کیفیت جواب) به وسیله کران‌های خطا توضیح داده می‌شود (به عنوان مثال ر.ک. به: (F. Brezzi and K. J. Bathe [A]). فرض کنید که $u_I \in V_h$ یک تابع درون‌یاب‌کننده u باشد که شرط زیر را ارضاء می‌کند:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\text{Vol}} [\text{div}(u - u_I)] q_h \, d\text{Vol} &= 0 \quad \forall q_h \in P_h(D_h) \\ \|u_I\| &\leq c \|u\| \end{aligned} \right\} \quad (4.184)$$

و اگر (۴.۱۸۴) به ازای تمامی جواب‌های ممکن صادق باشد، در این صورت:

$$\|u - u_h\| \leq c_1 (\|u - u_I\| + \|(I - P_h)p\|) \quad (4.185)$$

و

$$\|p - \kappa P_h \text{div } u_h\| \leq c_2 (\|u - u_h\| + \|(I - P_h)p\|) \quad (4.186)$$

که در آن $p = -\kappa \text{div } u$ و c_1 و c_2 مقادیر ثابت مستقل از h و κ می‌باشند. البته یادآوری می‌کنیم که (۴.۱۸۴) بیانگر شرط inf-sup با قید تضعیف شده $q_h \in P_h(D_h)$ می‌باشد (ر.ک. به: (۴.۱۷۶) و هر چه قدر سمت‌های راست (۴.۱۸۵) و (۴.۱۸۶) کوچکتر باشند، P_h به I نزدیکتر خواهد بود.

۴.۵.۲ شرط Inf-Sup استخراج شده از معادلات ماتریسی

فهم بیشتر شرط inf-sup از طریق مطالعه معادلات جبری عناصر محدود حاکم حاصل می‌گردد. حالت تراکم‌ناپذیری کامل را در نظر می‌گیریم (که شدیدترین حالت می‌باشد)،

$$\begin{bmatrix} (K_{uu})_h & (K_{up})_h \\ (K_{pu})_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_h \\ P_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_h \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.187)$$

که در آن U_h شامل تمامی تغییر مکان‌های نقاط گرهی مجهول و P_h شامل متغیرهای فشار مجهول می‌باشند. از آنجا که مصالح کاملاً تراکم‌ناپذیر در نظر گرفته می‌شود، یک ماتریس مربعی صفر که هم‌اندازه تعداد متغیرهای فشار می‌باشد، در پایین سمت راست ماتریس ضریب وجود دارد.

تحلیل ریاضی فرمول‌بندی حاصل در (۴.۱۸۷) شامل مطالعه حل‌پذیری و پایداری معادلات می‌باشد و در آن پایداری معادلات به طور ضمنی دلالت بر حل‌پذیری آنها دارد.

حل‌پذیری (۴.۱۸۷) به این واقعیت اشاره دارد که (۴.۱۸۷) را می‌توان، هنگامی که R_h معلوم است، برای یافتن جواب‌های منحصر به فرد U_h و P_h حل نمود. شرایط برای حل‌پذیری (ر.ک. به: تمرین ۴.۵۴) عبارتند از:

شرط i:

$$(۴.۱۸۸) \quad V_h^T (K_{uu})_h V_h > 0 \quad \text{برای کلیه } V_h \text{ ها که در } (K_{pu})_h V_h = 0 \text{ صدق می‌کنند.}$$

شرط ii:

$$(۴.۱۸۹) \quad (K_{up})_h Q_h = 0 \quad \text{بطور ضمنی دلالت بر این دارد که } Q_h \text{ باید صفر باشد}$$

فضای بردارهای تغییر مکان V_h که در $(K_{pu})_h V_h = 0$ صدق می‌کنند، هسته $(K_{pu})_h$ را نمایش می‌دهد.

پایداری فرمول‌بندی با در نظر گرفتن دنباله‌ای از مسائل به صورت (۴.۱۸۷) و با استفاده از شبکه‌هایی که به طور فزاینده ریزتر می‌شوند، بررسی می‌گردد. فرض کنید که S کوچکترین مقدار ثابت باشد بگونه‌ای که:

$$(۴.۱۹۰) \quad \frac{\|\Delta u_h\|_V + \|\Delta p_h\|_0}{\|u_h\|_V + \|p_h\|_0} \leq S \frac{\|\Delta f^B\|_{DV}}{\|f^B\|_{DV}}$$

برای تمامی $\Delta f^B, \Delta p_h, \Delta u_h, f^B, p_h, u_h$ صادق باشد و در آن $\| \cdot \|_V$ و $\| \cdot \|_0$ نرم‌هایی هستند که در (۴.۱۵۳) تعریف شده‌اند و $\| \cdot \|_{DV}$ بیانگر نرم دوگانه $\| \cdot \|_V$ است [ر.ک. به: بخش (۲.۷)] و Δf^B و Δu_h و Δp_h نشانگر اختلال‌های اعمال شده در تابع بار f^B و بردار تغییر مکان u_h و فشار p_h می‌باشند. البته داریم:

$$(۴.۱۹۱) \quad \begin{bmatrix} (K_{uu})_h & (K_{up})_h \\ (K_{pu})_h & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta U_h \\ \Delta P_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta R_h \\ 0 \end{bmatrix}$$

که در آن ΔR_h متناظر با تغییر بار Δf^B است و نرم‌های متغیرهای عناصر محدود در (۴.۱۹۰) به وسیله مقادیر نقاط گرهی که در بردارهای جواب قرار گرفته‌اند، مشخص می‌شوند. بنابراین (۴.۱۹۰) بیان می‌کند که برای یک اختلال نسبی معلوم در بردار بار، اختلال نسبی متناظر در

جواب با S برابر اختلال نسبی در بارها کران‌دار می‌شود.

برای هر شبکه تثبیت شده معلوم، تأمین شرایط حل‌پذیری (۴.۱۸۸) و (۴.۱۸۹) به طور ضمنی دلالت بر این دارد که (۴.۱۹۰) به ازای برخی مقادیر S ، که بستگی به شبکه دارند، ارضا می‌گردد.

اگر برای هر دنباله‌ای از شبکه‌ها، مقدار ثابت پایداری S به طور یکنواختی کران‌دار باشد، در این صورت فرمول‌بندی پایدار است. بنابراین سؤال پایداری به این صورت درمی‌آید: هنگامی که هر دنباله‌ای از شبکه‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرند، چه شرایطی در ماتریس‌های $(K_{uu})_h$ و $(K_{up})_h$ تضمین می‌کنند که به طور یکنواخت کران‌دار باقی بماند.

در بخش ۲.۷ بطور خلاصه شرایط پایداری را در ارتباط با یک فرمول‌بندی در نظر گرفتیم که منجر به یک ماتریس ضریب عمومی A می‌شود [ر.ک. به: (۲.۱۶۹) الی (۲.۱۷۹)]. اگر این نکات را به طور خاص برای ماتریس ضریب ویژه‌ای که در فرمول‌بندی‌های تغییر مکان / فشار مورد استفاده قرار می‌گیرد، به کار ببریم، یک نتیجه نسبتاً طبیعی را به دست خواهیم آورد (ر.ک. به: (F. Brezzi and K. J. Bathe)؛ که به این صورت است که شرایط پایداری بسطی از شرایط حل‌پذیری (۴.۱۸۸) و (۴.۱۸۹) بوده و نیز پایداری در هنگام استفاده از این روابط، با شبکه‌هایی که بطور فزاینده ریزتر می‌شوند، باید حفظ شود. شرط پایداری متناظر با شرط حل‌پذیری (۴.۱۸۸) بدین صورت است که یک $\alpha > 0$ مستقل از اندازه شبکه وجود دارد بگونه‌ای که:

$$V_h^T (K_{uu})_h V_h \geq \alpha \|v_h\|_V^2 \quad \text{for all } V_h \in \text{kernel} [(K_{pu})_h] \quad (۴.۱۹۲)$$

شرط مذکور، همان شرط بیضوی بودن است که پیشتر به طور خلاصه در بخش ۴.۵.۱ به آن اشاره شد. این رابطه بیان می‌کند که برای هرگونه تظریف شبکه، خارج قسمت Rayleigh حاصله، با هر بردار V_h که در $(K_{pu})_h V_h = 0$ صدق می‌کنند، از پایین به وسیله یک مقدار ثابت α (که مستقل از اندازه شبکه می‌باشد) کران‌دار خواهد بود. شرط بیضوی بودن همواره (یا به عبارت دیگر برای هر درونیابی عنصری) به وسیله فرمول‌بندی‌های تغییر مکان / فشار ارضا می‌گردد. این واقعیت را با جزییات بیشتر در مثال زیر نشان می‌دهیم.

مثال ۴.۳۷: شرط بیضوی بودن (۴.۱۹۲) را در نظر بگیرید و بحث کنید که شرط مذکور به ازای هر فرمول‌بندی (عملی) تغییر مکان / فشار تأمین می‌گردد.

حل:

برای فهم اینکه شرط بیضوی بودن تأمین می‌شود، ضروری است که یادآوری شود که (۴.۱۸۷) حاصل گسسته‌سازی عناصر محدود در (۴.۱۷۹) می‌باشد. بنابراین داریم:

$$V_h^T (K_{uu})_h V_h; \quad V_h \in \text{kernel} (K_{pu})_h \quad (\text{الف})$$

که متناظر با دو برابر انرژی کرنشی ذخیره شده در گسسته‌سازی عناصر محدود است، البته هنگامی که \mathbf{v}_h مربوط به یک عنصر V_h باشد که شرط $P_h(\operatorname{div} \mathbf{v}_h) = 0$ را تأمین می‌کند. با وجود این، عبارت موجود در (الف) همواره بزرگتر از صفر خواهد بود (از پایین کراندار خواهد بود)، مگر اینکه فضاهای فشار $Q_h = \{0\}$ را انتخاب کنیم، به عبارت دیگر مگر اینکه کاملاً قید تراکم‌ناپذیری را حذف کنیم و فرمول‌بندی شامل انرژی کرنشی ناشی از فشار - که یک حالت غیر عملی است - نباشد.

اگر (۴.۱۹۲) ارضاء نشود، به سادگی می‌توان حل را پایدار کرد. این نکته از طریق در نظر گرفتن شرایط تقریباً تراکم‌ناپذیر و با استفاده از یک فرمول‌بندی وردشی زیر حاصل می‌گردد:

$$\min_{\mathbf{v}_h \in V_h} \left\{ \frac{1}{2} a(\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h) + \frac{\kappa^*}{2} \int_{\text{Vol}} (\operatorname{div} \mathbf{v}_h)^2 d\text{Vol} + \frac{\kappa - \kappa^*}{2} \int [P_h(\operatorname{div} \mathbf{v}_h)]^2 d\text{Vol} - \int_{\text{Vol}} \mathbf{f}^B \cdot \mathbf{v}_h d\text{Vol} \right\}$$

که در آن κ^* ضریب تغییر حجمی از مرتبه ضریب برشی بوده و منجر به ایجاد خاصیت قفل شوندگی نمی‌شود. البته حالا می‌توانیم فرض کنیم که $(\kappa - \kappa^*) \rightarrow \infty$.

این شیوه معادل تعیین قسمتی از انرژی تغییر حجمی - همچون حالت روش تغییر مکان - و استفاده از یک تصویر برای قسمت باقی‌مانده می‌باشد. توجه شود هنگامی که κ مساوی κ^* است، قسمتی که باید تصویر شود مساوی صفر می‌باشد. بنابراین اساس روش مذکور این است که قسمتی از فرمول‌بندی که کار کردن با آن مشکل می‌باشد بدون عمل تصویر تعیین می‌گردد: این نوع پایدارسازی برای تأمین شرط بیضوی بودن در طرح فرمول‌بندی‌ها حائز اهمیت است (ر.ک. به: F. Brezzi and M. Fortin [A]). این روش برای پایدارسازی یک فرمول‌بندی تغییر مکان / فشار برای تحلیل سیالات بدون لزجت (ر.ک. به: C. Nitikitpaiboon and K. J. Bathe [A]) و برای ایجاد عناصر صفحه‌ای و پوسته‌ای (ر.ک. به: D. N. Arnold and F. Brezzi [A]) پیشنهاد شده است. ولی، اشکال این روش در انتخاب بخش‌هایی از انرژی‌ها است که با تصویر و بدون تصویر تعیین می‌شوند، مخصوصاً هنگامی که عمل‌های سینماتیکی مختلفی در تحلیل - مثلاً در تحلیل سازه‌های پوسته‌ای - کاملاً با هم ترکیب می‌گردند (ر.ک. به: بخش ۵.۴.۲).

شرط پایداری متناظر با شرط حل‌پذیری (۴.۱۸۹) بدین ترتیب است که یک $\beta > 0$ مستقل از اندازه شبکه h برای هر مسأله‌ای در یک دنباله وجود دارد بگونه‌ای که:

$$\inf_{Q_h} \sup_{V_h} \frac{Q_h(K_{pu})_h V_h}{\|q_h\| \|\mathbf{v}_h\|} \geq \beta > 0 \quad (۴.۱۹۳)$$

توجه شود که در این جا \sup را با استفاده از عناصر موجود در V_h و \inf را با استفاده از

عناصر موجود در Q_h انجام می‌دهیم. البته این رابطه در شرط $\inf\text{-sup}$ (۴.۱۸۳) به فرم جبری است، ولی حالا داریم $q_h \in Q_h$ که در آن ضرورتاً مساوی با $P_h(D_h)$ نیست. یادآوری می‌کنیم که انجام یک آزمون ساده که شامل شمارش متغیرهای تغییر مکان و فشار و مقایسه تعداد این متغیرها باشد، برای مشخص نمودن اینکه آیا یک فرمول‌بندی آمیخته پایدار می‌باشد یا نه، کافی نیست. بحث مزبور نشان می‌دهد که چنین آزمونی مطمئناً برای تضمین پایداری یک فرمول‌بندی کافی نیست و در حالت کلی حتی ارضای شرط (۴.۱۸۹) برای حل‌پذیری را نیز تضمین نمی‌کند (همچنین ر.ک. به: تمرین‌های ۴.۶۰ و ۴.۶۴).

۴.۵.۳ مدفشاری (فیزیکی) ثابت

در این بخش فرض می‌کنیم که گسسته‌سازی عناصر محدود مورد نظر شامل هیچ مدفشاری غیرواقعی نیست (که در مورد آن در بخش بعدی بحث می‌کنیم) و نیز شرط $\inf\text{-sup}$ به ازای $q_h \in P_h(D_h)$ ارضاء می‌شود.

پیش از این اشاره کردیم (ر.ک. به: بخش ۴.۴.۳) که وقتی مسأله ارتجاعی، مربوط به تراکم‌ناپذیری کامل می‌باشد (به عبارت دیگر در نظر می‌گیریم که $q = \text{div } \mathbf{u} = 0$) و تمامی تغییر مکان‌های عمود بر سطح جسم از پیش تعیین شده می‌باشند (به عبارت دیگر S_h مساوی با S است)، ملاحظات خاصی ضروری می‌باشند. در واقع، می‌توان دو حالت زیر را در نظر گرفت: حالت i: تمامی تغییر مکان‌های عمود بر سطح جسم از پیش صفر تعیین می‌شوند. در این حالت فشار مجهول است مگر اینکه در یک نقطه از جسم از پیش تعیین شده باشد. به عنوان مثال فرض کنید که p_0 یک فشار ثابت است. در این صورت:

$$\int_{\text{Vol}} p_0 \text{div } \mathbf{v}_h \, d\text{Vol} = p_0 \int_S \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h \quad (4.194)$$

که در آن \mathbf{n} بردار واحد عمود بر سطح جسم است. بنابراین، اگر فشار در یک نقطه از پیش تعیین شده نباشد، می‌توانیم یک فشار ثابت دلخواه p_0 را به هر جواب پیشنهادی اضافه کنیم. در نتیجه معادلات (۴.۱۸۷) را نمی‌توان حل نمود، مگر اینکه فشار در یک نقطه از پیش تعیین شده باشد که معادل حذف یک درجه آزادی فشار [یک ستون در $(K_{up})_h$] و سطر متناظر آن در $(K_{pu})_h$] است. اگر این درجه آزادی فشار حذف نشود، Q_h بزرگتر از $P_h(D_h)$ بوده و شرط حل‌پذیری (۴.۱۸۹) ارضاء نمی‌گردد و مقدار $\inf\text{-sup}$ که شامل این مدفشاری می‌باشد، صفر خواهد بود. برای بحث در حالتی که Q_h بزرگتر از $P_h(D_h)$ است، ولی مربوط به مدفشاری غیرواقعی می‌باشد، به بخش ۴.۵.۴ رجوع شود. البته به جای حذف یک درجه آزادی فشار، شاید در عمل مفیدتر باشد که برخی درجات

آزادی تغییر مکانی عمود بر سطح جسم آزاد رها شوند.

حالت ii: به تمامی تغییر مکان‌های عمود بر سطح جسم، مقادیری غیر صفر اعمال می‌شوند. اشکال اصلی در این حالت به این صورت است که شرط تراکم‌ناپذیری زیر باید ارضاء شود:

$$\int_{Vol} \text{div } \mathbf{v}_h \, dVol = \int_S \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h \quad (۴.۱۹۵)$$

یک مد فشاری ثابت نیز می‌تواند موجود باشد و همانگونه که در حالت i بحث گردید می‌تواند حذف شود. اگر هندسهٔ جسم پیچیده باشد، ارضای کامل شرط انتگرال سطحی (۴.۱۹۵) می‌تواند دشوار باشد. از آنجا که هر خطایی در تأمین این شرط می‌تواند موجب یک خطای بزرگی در پیش‌بینی فشار شود، از اینرو در عمل شاید بهتر باشد که تغییر مکان (های) عمود بر سطح جسم در یک گره (یا برخی گره‌ها) به صورت آزاد رها شوند.

حال فرض کنید که جسم تقریباً تراکم‌ناپذیر بوده و κ بزرگ، ولی متناهی می‌باشد و نیز فرمول‌بندی u/p مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این صورت در حالت i، فشار ثابت دلخواه p_0 به طور خودکار مساوی صفر قرار داده می‌شود (به همان طریقی که مدهای غیر واقعی مساوی صفر قرار داده می‌شوند، ر.ک. به: بخش ۴.۵.۴). این یک نتیجهٔ بسیار مناسبی می‌باشد، چون نیازی نیست که نگران حذف یک درجه آزادی فشار باشیم. البته، در عمل می‌توانستیم یک درجهٔ آزادی (یا برخی درجات آزادی) عمود بر سطح جسم را به صورت آزاد رها کنیم که در این صورت مد فشاری ثابت حذف می‌گردید.

با مد فشاری ثابت موجود در مدل، Q_h (با یک بردار پایه) بزرگتر از $P_h(D_h)$ است و مقدار $\inf\text{-sup}$ مربوط به این مد مساوی صفر می‌باشد. با وجود این، می‌توانیم معادلات جبری را حل کنیم و یک جواب قابل اطمینان پیدا کنیم (مگر اینکه κ به اندازه‌ای بزرگ باشد که بدطرح بودن ماتریس ضریب موجب خطاهای گرد کردن بسیار قابل توجهی بشود، ر.ک. به: بخش ۸.۲.۶).

در حالت ii، احتمالاً بهترین طریقه همان باشد که در بالا توصیه گردید، به عنوان مثال، برخی تغییر مکان (های) عمود بر سطح جسم آزاد رها شدند تا اینکه آزادی عمل را برای مصالح فراهم نمایند تا قید تقریباً تراکم‌ناپذیری تأمین شود. در این صورت مد فشاری ثابت در مدل عناصر محدود موجود نمی‌باشد.

یک نکته مهم در این ملاحظات این است که اگر تمامی تغییر مکان‌های عمود بر سطح جسم از پیش تعیین شده باشند، فضای فشار، با مد فشاری ثابت، بزرگتر از $P_h(D_h)$ خواهد بود. البته این مد یک پدیدهٔ فیزیکی بوده و یک مد غیر واقعی نمی‌باشد. اگر شرط $\inf\text{-sup}$ به ازای

$q_h \in P_h(D_h)$ ارضاء شود، در این صورت جواب پایدار و دقیق با حذف مد فشاری ثابت (یا با استفاده از فرمول‌بندی u/p با یک مقدار κ ، که خیلی بزرگ نیست، جهت صفر قرار دادن به طور خودکار مقدار فشار ثابت) حاصل می‌گردد. در بخش بعدی حالتی را که به علت وجود مدهای فشاری غیرواقعی، Q_h بزرگتر از $P_h(D_h)$ می‌باشد در نظر می‌گیریم.

۴.۵.۴ مدهای فشاری غیرواقعی، حالت تراکم‌ناپذیری کامل

در این بخش شرط تراکم‌ناپذیری کامل را در نظر می‌گیریم و صرفاً برای سهولت بحث، فرض می‌کنیم که مد فشاری ثابت فیزیکی که پیش از این اشاره شد، در مدل موجود نمی‌باشد. اگر مد مذکور در مدل موجود باشد، نکات ارائه شده در فوق را نیز علاوه بر آنچه که در این بخش ارائه می‌کنیم، مورد ملاحظه قرار خواهیم داد.

با در نظر گرفتن این شرط، یادآوری می‌کنیم که در بحث مربوط به شرط $\inf\text{-sup}$ فرض کردیم که فضای Q_h مساوی فضای $P_h(D_h)$ است [ر.ک. به: (۴.۱۸۳)]، در حالی که در (۴.۱۹۳) چنین محدودیتی را نداشتیم. در یک حل عناصر محدود واقعی، ممکن است که داشته باشیم $P_h(D_h) \subsetneq Q_h$ و در این صورت ملاحظه پیامدهای آن حائز اهمیت است.

اگر فضای Q_h بزرگتر از فضای $P_h(D_h)$ باشد، جواب تحلیل، مدهای فشاری غیرواقعی را به نمایش خواهد گذاشت. این مدها صرفاً ناشی از روش حل عددی می‌باشند، به عنوان مثال به علت عناصر محدود خاص و نوع شبکه‌های مورد استفاده می‌توانند ایجاد شوند و دارای توضیح فیزیکی نمی‌باشند.

اینک یک مد فشاری غیرواقعی را به عنوان یک توزیع فشار p_s (غیرصفر) تعریف می‌کنیم که در رابطه زیر صدق می‌کند:

$$\int_{\text{Vol}} p_s \operatorname{div} \mathbf{v}_h d\text{Vol} = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h \quad (4.196)$$

در فرمول‌بندی ماتریسی (۴.۱۸۷)، یک مد فشاری غیرواقعی مربوط به حالت زیر می‌باشد:

$$(\mathbf{K}_{up})_h \mathbf{p}_s = \mathbf{0} \quad (4.197)$$

که در آن بردار \mathbf{p}_s (غیرصفر) متغیرهای فشار مربوط به p_s می‌باشد. بنابراین، هنگامی که مدهای فشاری غیرواقعی موجوداند، شرط حل‌پذیری (۴.۱۸۹) تأمین نمی‌شود و مشخص است که در هنگام آزمون در روی فضای کامل Q_h در (۴.۱۹۳) مقدار $\inf\text{-sup}$ صفر است.

حال می‌خواهیم نشان دهیم که اگر Q_h مساوی $P_h(D_h)$ باشد، در این صورت مد فشاری غیرواقعی می‌تواند وجود نداشته باشد. فرض کنید که \hat{p}_h را یک مد فشاری غیرواقعی در نظر

می‌گیریم. اگر $Q_h = P_h(D_h)$ باشد، در این صورت همواره یک بردار \hat{v} وجود دارد بگونه‌ای که $\hat{p}_h = -P_h(\operatorname{div} \hat{v}_h)$ ولی با استفاده از \hat{v}_h در (۴.۱۹۶) نتیجه زیر را به دست می‌آوریم:

$$-\int_{\text{Vol}} \hat{p}_h \operatorname{div} \hat{v}_h d\text{Vol} = -\int_{\text{Vol}} \hat{p}_h P_h(\operatorname{div} \hat{v}_h) d\text{Vol} = \int_{\text{Vol}} \hat{p}_h^2 d\text{Vol} > 0 \quad (۴.۱۹۸)$$

که بدین معنی است که (۴.۱۹۶) تأمین نمی‌گردد. از سوی دیگر، اگر Q_h بزرگتر از $P_h(D_h)$ باشد، مثلاً $Q_h \subsetneq P_h(D_h)$ ، در این صورت می‌توان یک توزیع فشار در فضای متعامد بر $P_h(D_h)$ پیدا کرد و از اینرو به ازای توزیع فشار، رابطه (۴.۱۹۶) ارضا می‌گردد (ر.ک. به: مثال ۴.۳۸). بنابراین حالا ملاحظه می‌کنیم که اساساً در موقع آزمون یک گسسته‌سازی عناصر محدود خاص با استفاده از متغیرهای تغییر مکان و فشار، ممکن است که دو پدیده زیر رخ دهند:

۱. پدیده قفل شوندگی که به وسیله کمترین مقدار عبارت $\inf\text{-sup}$ که از پایین با مقدار

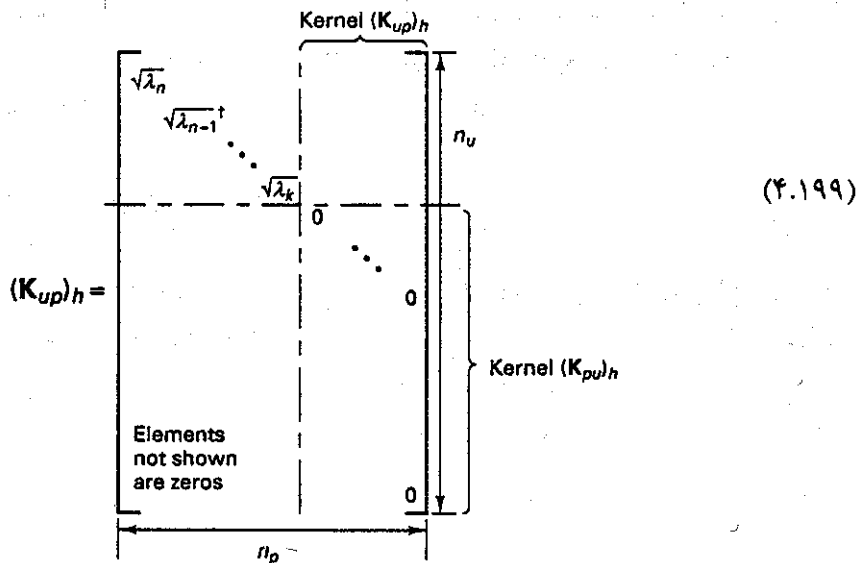
$$\beta > 0 \quad \text{کران دار نمی‌شود، کشف می‌گردد [ر.ک. به: بحث ذیل (۴.۱۵۶)].}$$

۲. پدیده مدهای غیرواقعی که هنگامی که آزمونی با $q_h \in Q_h$ انجام می‌گیرد متناظر با یک مقدار صفر برای عبارت $\inf\text{-sup}$ می‌باشد.

البته، هنگامی که یک گسسته‌سازی با مدهای غیرواقعی در نظر گرفته می‌شود، ممکن است که هنوز هم کوچکترین مقدار غیرصفر عبارت $\inf\text{-sup}$ جلب توجه کند و در این صورت می‌توانیم نظر خود را به این مقدار، صرفاً به وسیله آزمونی با $q_h \in P_h(D_h)$ معطوف کنیم، به عبارت دیگر از تمامی مدهای فشاری غیرواقعی صرف نظر نماییم. آزمون $\inf\text{-sup}$ عددی که در بخش ۴.۵.۶ توصیف خواهد شد، در واقع کوچکترین مقدار غیرصفر عبارت $\inf\text{-sup}$ را به دست می‌دهد و نیز تعداد مدهای فشاری غیرواقعی را تعیین می‌نماید.

در این جا لازم است به عنوان یک نکته فرعی یادآوری شود که مدهای فشاری غیرصفر هیچ ارتباطی با مدهای انرژی صفر غیرواقعی که در بخش ۵.۵.۶ اشاره خواهد شد، ندارند (این مدهای انرژی صفر غیرواقعی ناشی از استفاده از انتگرال‌گیری عددی کاهش یافته یا گزینشی در تعیین ماتریس‌های سختی عنصر می‌باشند). در فرمول‌بندی تغییر مکان / فشار که در این جا ملاحظه شد، هر ماتریس سختی عنصر دقیقاً محاسبه شده و صرفاً مدهای صلب فیزیکی صحیحی را به نمایش می‌گذارد. مدهای فشاری غیرواقعی در شبکه کامل ناشی از فضاهای خاص تغییر مکانی و فشاری مورد استفاده برای گسسته‌سازی کامل می‌باشند.

یک طریقه برای فهم بیشتر رابطه (۴.۱۹۳) تصوّر ماتریس $[(K_{up})_h]$ یا $[(K_{pu})_h] = (K_{up})_h^T$ به صورت قطری شده می‌باشد [با انتخاب پایه مناسب برای متغیرهای تغییر مکان و فشار]، که در این حالت خواهیم داشت:



† We call the elements $\sqrt{\lambda_i}$ in anticipation of our discussion in Section 4.5.6

در این نمایش خاص ماتریسی، ستون‌های صفر، هسته $(K_{up})_h$ را تعریف نموده و هر ستون صفر متناظر با یک مد فشاری غیر واقعی است. همچنین از آنجا که به ازای هر بردار تغییر مکان \hat{U}_h ، نیاز داریم که:

$$(K_{pu})_h \hat{U}_h = 0 \quad (4.200)$$

و $(K_{pu})_h = (K_{up})_h^T$ ، از اینرو اندازه هسته $(K_{pu})_h$ تعیین می‌کند که آیا جواب بیش از اندازه مقید شده است یا نه. در حالی که از یک سو، می‌خواهیم که هسته $(K_{up})_h$ صفر باشد (بدون مدهای غیر واقعی)، از سوی دیگر می‌خواهیم که هسته $(K_{pu})_h$ بزرگ باشد تا اینکه بردارهای مستقل خطی بسیاری موجود باشند تا در (4.200) صدق کنند. جواب تغییر مکان واقعی مسأله (4.189) در زیر فضایی قرار دارد که به وسیله این بردارها پوشش داده می‌شود و اگر آن زیرفضا بیش از اندازه کوچک باشد، به علت بیش از اندازه بزرگ بودن فضای فشار Q_h ، جواب بیش از اندازه مقید می‌شود. نظریه ارائه شده در مورد شرط inf-sup [ر.ک. به بحث ارائه شده در بخش 4.5.1 و (4.193)] نشان داد که این مقید بودن بیش از اندازه به وسیله $\sqrt{\lambda_k}$ کشف می‌گردد و این مقدار به میزانی که شبکه ریزتر می‌شود به صفر کاهش پیدا می‌کند. برعکس، اگر $\sqrt{\lambda_k} \geq \beta > 0$

باشد، در این صورت برای هر شبکه‌ای، با β مستقل از شبکه، به میزانی که اندازه عناصر کاهش می‌یابد، فضای جواب بیش از اندازه مقید نشده و گسسته‌سازی منجر به یک جواب قابل اطمینان می‌شود (با نرخ همگرایی بهین در تغییر مکان‌ها و فشار، به شرطی که فضای فشار، بدون نقض شرط inf-sup بزرگترین باشد، ر.ک. به: بخش ۴.۵.۱).

۴.۵.۵ مدهای فشاری غیرواقعی - حالت تقریباً تراکم‌ناپذیری

در مبحث پیشین شرایط تراکم‌ناپذیری کامل را در نظر گرفته و از فرمول‌بندی u/p یا $u/p-c$ استفاده نمودیم. حال در نظر بگیریم که یک مقدار متناهی κ (ولی بزرگ) داریم و از فرمول‌بندی u/p با چگالش ایستایی در روی درجه آزادی فشار (همانگونه که معمول است) استفاده می‌کنیم. در این حالت، معادلات عناصر محدود حاکم، برای یک عنصر نمونه (و یا شبکه کامل) عبارتند از:

$$\begin{bmatrix} (K_{uu})_h & (K_{up})_h \\ (K_{pu})_h & (K_{pp})_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_h \\ P_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_h \\ 0 \end{bmatrix} \quad (۴.۲۰۱)$$

یا

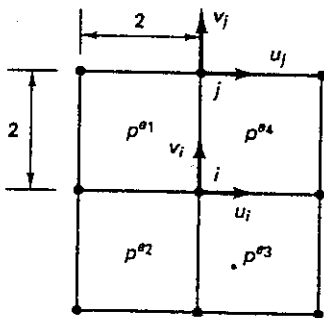
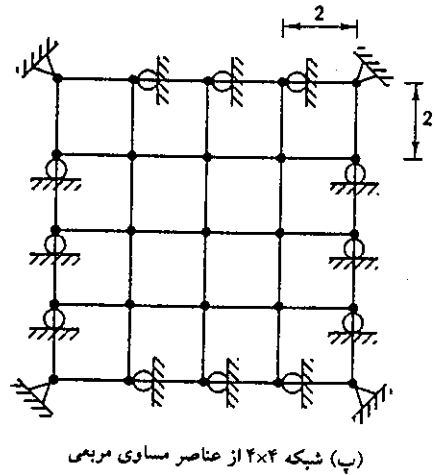
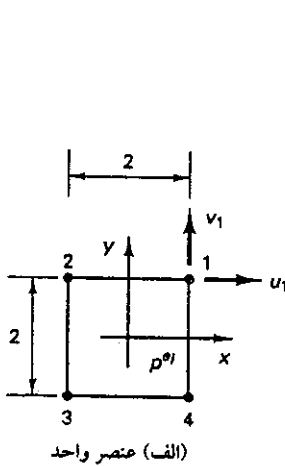
$$[(K_{uu})_h - (K_{up})_h (K_{pp})_h^{-1} (K_{pu})_h] U_h = R_h \quad (۴.۲۰۲)$$

تاکنون فرض کرده‌ایم که هیچ تغییر مکان غیر صفری از پیش تعیین شده نمی‌باشد. این نکته مهمی است که در این حالت هرگونه مدفشاری غیرواقعی هیچ تأثیری در تغییر مکان‌ها و فشار پیش‌بینی شده ندارد. دلیل این نکته را می‌توان با در نظر گرفتن $(K_{up})_h$ در (۴.۱۹۹) با برخی ستون‌های صفر نشان داد. چون $(K_{pp})_h$ ، در پایه مشابه، ماتریس قطری با ضریب تغییر حجمی κ^{-1} به عنوان عناصر قطری بوده و بردار متناظر سمت راست، یک بردار صفر می‌باشد، از اینرو جواب مقادیر مدفشاری غیرواقعی صفر است (همچنین ر.ک. به: مثال ۴.۳۹). یک نکته دیگر این است که ماتریس ضریب در (۴.۲۰۱) شامل یک ضریب تغییر حجمی بزرگ بوده و هنگامی که κ^{-1} به صفر میل می‌کند، منجر به بدطرح شدن ماتریس مذکور می‌شود، ولی بدطرح شدن مذکور، صرف نظر از بودن یا نبودن مدهای فشاری غیرواقعی مشاهده می‌گردد.

مدهای فشاری غیرواقعی، هنگامی که تغییر مکان‌های غیر صفر از پیش تعیین شده می‌باشند، می‌توانند اثر بسیار مهمی داشته باشند. در این حالت، ملاحظه می‌کنیم که سمت راست متناظر با درجات آزادی فشار، می‌تواند صفر نباشد (ر.ک. به: بخش ۴.۲.۲ در مورد چگونگی اعمال تغییر مکان‌های غیر صفر) و یک فشار غیرواقعی بزرگی ممکن است ایجاد گردد. روشن است که یک عنصر قابل اطمینان باید خاصیت قفل شونده از خود نشان دهد و

به طور ایده‌آل نباید منجر به ایجاد مد فشاری غیرواقعی در هر شبکه انتخاب شده گردد. عناصر مندرج در جدول‌های ۴.۶ و ۴.۷ دارای چنین طبیعتی می‌باشند، البته عنصر u/p دوبعدی ۴/۱ (و عنصر سه بعدی ۸/۱ مشابه) مستثنی می‌باشد. با استفاده از عنصر ۴/۱۲، شبکه‌های خاصی با شرایط مرزی معینی یک مد فشاری غیرواقعی را به نمایش می‌گذارند و عنصر ۴/۱ شرط $\inf\text{-sup}$ (۴.۱۸۳) را تأمین می‌نماید مگر اینکه در ترتیبات هندسی خاصی از بزرگ - عناصر استفاده شود (به عنوان مثال ر.ک. به: [P. LeTallec and V. Ruas A]). با وجود این عنصر ۴/۱، به علت سادگی اش، به طور گسترده در عمل بکار می‌رود و این عنصر را با جزییات بیشتر در مثال زیر مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال ۴.۳۸: یک گسسته‌سازی عناصر محدود متشکل از عناصر ۴/۱ را که در شکل E ۴.۳۸ نشان داده شده است در نظر بگیرید و نشان دهید که مد شطرنجی فشاری غیرواقعی نمایش داده شده در شکل وجود دارد.



+	-	+	-
-	+	-	+
+	-	+	-
-	+	-	+

(ت) توزیع فشار شطرنجی، + و - به معنی Δp و $-\Delta p$ است که در آن Δp یک مقدار اختیاری است.

شکل E ۴.۳۸ عناصر ۴/۱

حل:

یادآوری می‌کنیم که برای این مدل، تمامی تغییر مکان‌های مماسی در مرز مساوی صفر قرار داده می‌شوند. برای اینکه نشان دهیم که توزیع فشار ارائه شده در شکل E ۴.۳۸ متناظر با یک مد فشاری غیرواقعی می‌باشد، نیاز داریم ثابت کنیم که (۴.۱۹۶) صادق است. یک عنصر منفرد را بگونه‌ای که در E ۴.۳۸ (الف) نشان داده شده است در نظر می‌گیریم، در این صورت داریم:

$$\int_{Vol} p^{*i} \text{div } \mathbf{v}_h^i dVol = p^{*i} [1 \quad -1 \quad -1 \quad 1 \quad ; \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -1] \hat{\mathbf{u}}$$

که در آن p^{*i} فشار ثابت در عنصر است. سپس اگر یک مجموعه همبند از چهار عنصر مجاور هم را در نظر بگیریم، یادآوری می‌کنیم که برای تغییر مکان u_i نشان داده شده در شکل E ۴.۳۸ (ب) داریم:

$$\int_{Vol} p \text{div } \mathbf{v}_h dVol = [p^{*1}(1) + p^{*2}(1) + p^{*3}(-1) + p^{*4}(-1)] u_i = 0 \quad (\text{الف})$$

به شرط اینکه توزیع فشار با $p^{*1} = -p^{*2} = p^{*3} = -p^{*4}$ متناظر باشد. به طور مشابه، برای هر تغییر مکان v_i داریم:

$$\int_{Vol} p \text{div } \mathbf{v}_h dVol = [p^{*1}(-1) + p^{*2}(1) + p^{*3}(1) + p^{*4}(-1)] v_i = 0 \quad (\text{ب})$$

برای تغییر مکان عمودی v_j در یک لبه مجموعه همبند، به طور مشابه رابطه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\int_{Vol} p \text{div } \mathbf{v}_h dVol = [p^{*1}(1) + p^{*2}(1)] v_j = 0 \quad (\text{پ})$$

از سوی دیگر برای یک تغییر مکان مماسی u_j ، انتگرال زیر حاصل می‌شود:

$$\int_{Vol} p \text{div } \mathbf{v}_h dVol \neq 0$$

در مدل شکل (پ) E ۴.۳۸، تمامی تغییر مکان‌های مماسی به صفر مقید می‌گردند. بنابراین با استفاده از جمع آثار و نیز با استفاده از عبارات (الف) تا (پ)، هنگامی که توزیع فشار به صورت فشار شطرنجی نشان داده شده می‌باشد، رابطه (۴.۱۹۶) به ازای تغییر مکان‌های نقاط گرهی ارضا می‌گردد. توجه شود هنگامی که تغییر مکان‌های نقاط گرهی بیشتری نسبت به آنچه که در شکل (پ) E ۴.۳۸ داده شده است، مقید به صفر گردند، در این صورت توزیع شطرنجی فشار نیز نشانگر یک مد فشاری غیرواقعی خواهد بود. همچنین یادآوری می‌شود که توزیع فشار (فرض شده) در شکل (ت) E ۴.۳۸ را نمی‌توان به وسیله تغییر مکان‌های نقاط گرهی به دست آورد، از اینرو این توزیع فشار مربوط به یک عنصر در $P_h(D_h)$ نمی‌باشد.

در مثال مزبور، نشان دادیم هنگامی که از عنصر ۴/۱ در گسسته‌سازی متشکل از عناصر مربعی هم‌اندازه با شرایط مرزی معینی استفاده می‌شود، در این صورت یک مد فشاری غیرواقعی موجود می‌باشد. البته هنگامی که شبکه‌های غیرهمگن به کار می‌روند و یا حداقل یک تغییر مکان مماس بر سطح جسم، آزاد رها می‌شود، در این صورت مد فشاری غیرواقعی دیگر وجود نخواهد داشت.

حال در نظر بگیرید که یک نیرو به یکی از درجات آزادی در شکل (پ) ۴.۳۸ اعمال می‌شود. در این صورت جواب از حل (۴.۲۰۱) حاصل می‌شود و همانگونه که پیش از این اشاره شد، مد فشاری غیرواقعی در جواب وارد نخواهد شد (آن مشاهده نخواهد شد).

با وجود این، هنگامی که، به عنوان مثال، یک تغییر مکان مرزی مماسی از پیش، غیرصفر تعیین شده و سایر تغییر مکان‌های مرزی مماسی صفر در نظر گرفته می‌شوند^(۱۸)، در این صورت مد فشاری غیرواقعی یک اثر بسیار مهمی در تنش‌های محاسبه شده خواهد داشت. در این حالت، تغییر مکان‌های نقاط گرهی از پیش تعیین شده، موجب یک بردار نیرویی غیرصفر برای درجات آزادی فشار می‌شود و مد فشاری غیرواقعی تحریک می‌گردد. بنابراین در عمل مناسب خواهد بود که تمامی تغییر مکان‌های نقاط گرهی مماس بر سطح جسم مورد نظر مقید نشوند.

حال این بخش را با در نظر گرفتن مثال زیر به پایان می‌رسانیم، زیرا این مثال به وجهی ساده برخی نکات عمومی مهمی را که به آنها اشاره کردیم نشان می‌دهد.
مثال ۴.۳۹: فرض کنید که معادلات حاکم (۴.۱۸۷) به صورت زیر می‌باشند:

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} \alpha_1 & 0 & 0 & \beta_1 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & \alpha_3 & 0 & 0 \\ \hline \beta_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ g_1 \\ g_2 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

البته چنین معادلات ساده‌ای در یک تحلیل عملی عناصر محدود حاصل نمی‌گردند، ولی اجزای اصلی آن همان اجزای مربوط به معادلات عمومی (۴.۱۸۷) می‌باشند. یادآوری می‌کنیم که ماتریس ضریب، مربوط به شرط مصالح کاملاً تراکم‌ناپذیر است و عناصر g_1 و g_2 متناظر با تغییر مکان‌های مرزی از پیش تعیین شده می‌باشند.

(۱۸) یادآوری می‌کنیم که این شرایط تحلیل و نتایج، مشابه شرایط و نتایج حاصل از وضعیتی هستند که در آن تمامی تغییر مکان‌های عمود بر سطح جسم مقید به صفر می‌شوند به جز یک مورد که در آن یک تغییر مکان عمودی از پیش تعیین می‌گردد [ر.ک. به: (۴.۱۹۵)].
(۱۹) این مثال به وسیله F. Brezzi and K. J. Bathe [A] ارائه شده است.

حل:

این معادلات را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\alpha_i u_i + \beta_i p_i = r_i; \quad \beta_i u_i = g_i; \quad i = 1, 2; \quad \alpha_3 u_3 = r_3$$

فرض کنید که به ازای تمامی i ها، $\alpha_i > 0$ می‌باشد (همانگونه که در عمل خواهیم داشت). در این صورت $u_3 = r_3/\alpha_3$ بوده و فقط نیاز داریم که معادلات نمونه زیر را در نظر بگیریم:

$$\alpha u + \beta p = r; \quad \beta u = g \quad (\text{ب})$$

(که در آن اندیس پایین i را حذف کرده‌ایم)

هنگامی که مصالح تقریباً تراکم‌ناپذیر در نظر گرفته می‌شود u_3 تغییر نمی‌یابد، ولی (ب) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\alpha u_\epsilon + \beta p_\epsilon = r; \quad \beta u_\epsilon - \epsilon p_\epsilon = g \quad (\text{پ})$$

که در آن $\epsilon = 1/\kappa$ بوده (هنگامی که ضریب تغییر حجمی κ بسیار بزرگ می‌باشد، ϵ خیلی کوچک است) و p_ϵ ، u_ϵ جواب مورد نظر می‌باشد. معادلات (پ) نتایج زیر را به دست می‌دهند:

$$u_\epsilon = \frac{\epsilon r + \beta g}{\epsilon \alpha + \beta^2}; \quad p_\epsilon = \frac{\beta r - \alpha g}{\epsilon \alpha + \beta^2} \quad (\text{ت})$$

حال می‌توان نکات زیر را ملاحظه نمود.

ابتدا، حالت یک مد فشاری غیرواقعی را در نظر می‌گیریم، به عبارت دیگر $\beta = 0$

حالت i: $\beta = g = 0$

این حالت مربوط به یک مد فشاری غیرواقعی و تغییر مکانهایی که از پیش صفر تعیین شده‌اند، می‌باشد.

از حل (ب) $u = r/\alpha$ نتیجه می‌شود ولی p مجهول است.از حل (پ) $u_\epsilon = r/\alpha$ و $p_\epsilon = 0$ نتیجه می‌شوند.

بنابراین مشاهده می‌کنیم که استفاده از یک ضریب تغییر حجمی متناهی، حل معادلات را امکان‌پذیر می‌کند و از ایجاد فشار غیرواقعی جلوگیری می‌نماید.

حالت ii: $\beta = 0$ و $g \neq 0$

این حالت مربوط به یک مد فشاری غیرواقعی و تغییر مکان‌هایی که از پیش غیر صفر تعیین شده‌اند (متناظر با این مد)، می‌باشد.

حال از حل (ب) جوابی برای u و p حاصل نمی‌گردد.

از حل (پ) جوابهای $u_e = r/\alpha$ و $p_e = -g/\epsilon$ حاصل می‌گردند.

بنابراین به میزانی که κ افزایش می‌یابد، فشار غیر واقعی بزرگ می‌گردد.

در مرحله بعدی، حالتی را در نظر می‌گیریم که β خیلی کوچک است.

بنابراین مد فشاری غیر واقعی وجود ندارد. البته اگر $\beta \rightarrow 0$ ، در این صورت شرط $\inf\text{-sup}$ تأمین نمی‌گردد.

حالت iii: β کوچک است.

همچنین فرض کنید که $g = 0$ است.

حالا از حل (ب) نتایج $u = 0$ و $p = r/\beta$ حاصل می‌گردند.

جواب (پ)، $u_e \rightarrow 0$ و $p_e \rightarrow r/\beta$ به ازای $\epsilon \rightarrow 0$ است (β تثبیت شده و از اینرو داریم $\epsilon\alpha >> \beta^2$)، که با جواب حاصل از حل (ب) هماهنگ است. بنابراین تغییر مکان به صفر میل می‌کند و هنگامی که β کوچک است فشار بزرگ شده و ضریب تغییر حجمی افزایش می‌یابد. البته این رفتار را با شرط $\inf\text{-sup}$ مورد آزمون قرار می‌دهیم. برای یک تحلیل عناصر محدود واقعی این نکته ممکن است که بدین صورت تفسیر شود که یک شبکه تثبیت شده در نظر گرفته شده (β تثبیت شده است) و κ افزایش می‌یابد. نتیجه حاصله این است که در مدی که به ازای آن β کوچک است، فشار افزایش می‌یابد، در حالی که تغییر مکان‌ها در این مد کاهش پیدا می‌کنند.

با وجود این حل (پ) $p_e \rightarrow r/\alpha$ و $p_e \rightarrow 0$ به ازای $\beta \rightarrow 0$ را نتیجه می‌دهد (ϵ تثبیت شده از اینرو داریم $\epsilon\alpha >> \beta^2$) که رفتاری است که پیش از این در حالت i مورد اشاره قرار گرفت. برای یک حل واقعی عناصر محدود، این نکته ممکن است بدین صورت تفسیر شود که یک κ تثبیت شده در نظر گرفته شده و تظریف شبکه افزایش می‌یابد. چون β به علت تظریف شبکه کاهش پیدا می‌کند، فشار متناظر با این مد کوچک می‌شود. بنابراین هنگامی که β به حد کافی کوچک بوده (و وقتی که κ بزرگ باشد، به معنی یک شبکه بسیار ریز است)، رفتار این مد فشاری شبیه رفتار یک مد غیر واقعی است.

۴.۵.۶ آزمون $\inf\text{-Sup}$

نتایج مطالعات تحلیلی مشخصات $\inf\text{-sup}$ عناصر متنوع تغییر مکان / فشار در جداول ۴.۶ و ۴.۷ به اختصار ارائه شده‌اند (همچنین ر.ک به: [F. Brezzi and M. Fortin A]). اثبات تحلیلی اینکه آیا شرط $\inf\text{-sup}$ به وسیله یک عنصر خاص تأمین می‌شود یا نه، می‌تواند دشوار باشد، از اینرو انجام یک آزمون عددی حائز ارزش است. چنین آزمونی را می‌توان به عناصری که جدیداً پیشنهاد شده‌اند و نیز به گسسته‌سازیهایی با عناصری که دارای هندسه‌های اعوجاج یافته می‌باشند، اعمال نمود (یادآوری می‌شود که در مطالعات

تحلیلی، شبکه‌های همگن متشکل از عناصر مربعی فرض می‌شوند). البته نمی‌توان به نتایج یک آزمون عددی بطور کامل اطمینان کرد (مانند اثبات تحلیلی که قابل اطمینان می‌باشد)، ولی اگر نتیجه یک آزمون عددی که به طور مناسب طراحی شده است مثبت باشد، به احتمال زیاد فرمول‌بندی مورد مطالعه مؤثر خواهد بود. هنگامی که آزمون حساسیت صرفاً به صورت عددی انجام می‌گیرد، همان ایده مورد استفاده قرار می‌گیرد (برای مطالعه فرمول‌بندی‌های تغییر مکان محیط تراکم‌ناپذیر و اثر اعوجاج‌های هندسی عنصر)، زیرا انجام یک بررسی تحلیلی عملی نیست (ر.ک. به: بخش ۴.۴.۱).

در مبحث آینده آزمون عددی $\inf\text{-sup}$ را که بوسیله D. chapelle and K. J. Bathe [A] پیشنهاد شده است ارائه می‌کنیم.

در ابتدا فرمول‌بندی u/p را در نظر بگیرید. در این حالت شرط $\inf\text{-sup}$ (۴.۱۸۳) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\inf_{w_h \in V_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{\int_{\text{Vol}} P_h(\text{div } w_h) \text{div } v_h d\text{Vol}}{\|P_h(\text{div } w_h)\| \|v_h\|} \geq \beta > 0 \quad (4.203)$$

یا

$$\inf_{w_h \in V_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{b'(w_h, v_h)}{[b'(w_h, w_h)]^{1/2} \|v_h\|} \geq \beta > 0 \quad (4.204)$$

که در آن داریم:

$$b'(w_h, v_h) = \int_{\text{Vol}} P_h(\text{div } w_h) P_h(\text{div } v_h) d\text{Vol} = \int_{\text{Vol}} P_h(\text{div } w_h) \text{div } v_h d\text{Vol} \quad (4.205)$$

رابطه (۴.۲۰۴) به صورت ماتریسی عبارت است از:

$$\inf_{w_h} \sup_{v_h} \frac{W_h^T G_h V_h}{[W_h^T G_h W_h]^{1/2} [V_h^T S_h V_h]^{1/2}} \geq \beta > 0 \quad (4.206)$$

که در آن V_h و W_h بردارهای مقادیر تغییر مکان‌های گرهی مربوط به v_h و w_h بوده و G_h و S_h به ترتیب متناظر با عملگر b' و نرم $\|\cdot\|_V$ می‌باشند. ماتریس‌های G_h و S_h به ترتیب نیمه‌معین مثبت و معین مثبت می‌باشند (برای مسأله مورد نظر، ر.ک. به: بخش ۴.۵.۱).

مثال ۴.۴۰: در مثال ۴.۳۴، ماتریس G_h یک عنصر $4/1$ را محاسبه کردیم. حال ماتریس S_h این

عناصر را نیز ایجاد کنید.

حل:

برای تعیین S_h ، یادآوری می‌کنیم که نرم w بوسیله رابطه زیر مشخص می‌شود [ر.ک. به: (۴.۱۵۳)]:

$$\|w\|_V^2 = \sum_{i,j} \left\| \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right\|_{L^2(\text{Vol})}^2$$

بنابراین، برای این حالت داریم:

$$\|w_h\|_V^2 = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (\text{الف})$$

که در آن u و v مؤلفه‌های w_i و $i = 1, 2$ می‌باشند.

حال تغییر مکان‌های نقاط گرهی در \hat{u} را به صورتی که در مثال ۴.۳۴ عمل شده است، مرتب می‌کنیم:

$$\hat{u}^T = [u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad ; \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4]$$

طبق تعریف داریم: $\|w_h\|_V^2 = \hat{u}^T S_h \hat{u}$. همچنین داریم:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{i=1}^4 h_{i,x} u_i; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \sum_{i=1}^4 h_{i,y} u_i \quad (\text{ب})$$

و در (الف) می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^T \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 &= \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^T \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (\text{پ})$$

از جایگذاری (پ) و (ب) در (الف) نتایج زیر را به دست می‌آوریم:

$$S_h(1, 1) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [(h_{1,x})^2 + (h_{1,y})^2] dx dy = \frac{2}{3}$$

$$S_h(1, 2) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [h_{1,x} h_{2,x} + h_{1,y} h_{2,y}] dx dy = -\frac{1}{6}$$

و بدین ترتیب ادامه می‌دهیم.

به طور مشابه، عبارات مربوط به درجات آزادی v_i محاسبه می‌شوند و نتیجه زیر به

دست می‌آید:

$$S_h = \begin{bmatrix} \tilde{S}_h & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tilde{S}_h \end{bmatrix}; \quad \tilde{S}_h = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -2 \\ -2 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

حال فرمول بندی $u/p-c$ را در نظر می‌گیریم. در این حالت، عبارت مشابه (۴.۲۰۶) اعمال می‌گردد ولی ضروری است که از $G_h = (K_{pu})_h^T T_h^{-1} (K_{pu})_h$ استفاده شود که در آن ماتریس نرم L^2 ، مربوط به p_h می‌باشد (ر.ک. به: تمرین ۴.۵۹)؛ به عبارت دیگر، به ازای بردار مقادیر گرهی فشار داریم: $\|p_h\| = P_h^T T_h P_h$.

شرط $\inf\text{-sup}$ به صورت (۴.۲۰۶)، مؤثر است زیرا می‌توان از طریق عددی مقدار مقدار $\inf\text{-sup}$ سمت چپ را تعیین کرده و به طور مشابه برای دنباله‌ای از شبکه‌ها عمل نمود. اگر مقدار $\inf\text{-sup}$ سمت چپ به یک مقدار بزرگتر از صفر (به طور مجانبی) میل کند (و مدهای فشاری غیر واقعی وجود نداشته باشد، که در زیر بیشتر شرح داده خواهد شد)، در این صورت شرط $\inf\text{-sup}$ تأمین می‌گردد. در عمل، تنها دنباله‌ای شامل -حدوداً- سه شبکه مورد نیاز است تا در نظر گرفته شود (ر.ک. به: مثالهای ارائه شده در زیر).

نکته اصلی، تعیین مقدار $\inf\text{-sup}$ عبارت (۴.۲۰۶) می‌باشد. می‌توان نشان داد که این مقدار از طریق جذر کوچکترین ویژه مقدار غیر صفر مسئله زیر حاصل می‌گردد:

$$G_h \phi_h = \lambda S_h \phi_h \quad (۴.۲۰۷)$$

بنابراین اگر $(k-1)$ ویژه مقدار صفر وجود داشته باشد (چون G_h یک ماتریس نیمه معین مثبت است) و ویژه مقادیر را به ترتیب صعودی مرتب کنیم، در این صورت درمی‌یابیم که مقدار $\inf\text{-sup}$ عبارت (۴.۲۰۶)، $\sqrt{\lambda_k}$ است. نتیجه مذکور را در مثال زیر اثبات می‌کنیم. مثال ۴.۴۱: تابع $f(U, V)$ را که بصورت زیر تعریف می‌شود در نظر بگیرید:

$$f(U, V) = \frac{U^T G V}{(U^T G U)^{1/2} (V^T S V)^{1/2}} \quad (\text{الف})$$

که در آن G یک ماتریس نیمه معین مثبت متقارن $n \times n$ و S یک ماتریس معین مثبت بوده و U و V بردارهایی از مرتبه n می‌باشند. نشان دهید که:

$$\inf_U \sup_V f(U, V) = \sqrt{\lambda_k} \quad (\text{ب})$$

که در آن λ_k کوچکترین ویژه مقدار غیر صفر مسئله زیر می‌باشد:

$$G \Phi = \lambda S \Phi \quad (\text{پ})$$

حل:

فرض کنید که ویژه مقادیر مسئله (پ) عبارتند از:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{k-1} = 0 < \lambda_k \leq \lambda_{k+1} \leq \dots \leq \lambda_n$$

و ویژه بردارهای متناظر $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ می‌باشند.

برای تعیین $f(U, V)$ و U و V را به صورت زیر نشان می‌دهیم:

$$U = \sum_{i=1}^n \bar{u}_i \phi_i; \quad V = \sum_{i=1}^n \bar{v}_i \phi_i$$

بنابراین، به ازای هر U داریم:

$$\begin{aligned} \sup_V f(U, V) &= \sup_{\bar{v}_i} \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{u}_i \bar{v}_i}{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{u}_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n \bar{v}_i^2 \right)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{u}_i^2 \right)^{1/2}} \sup_{\bar{v}_i} \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{u}_i \bar{v}_i}{\left(\sum_{i=1}^n \bar{v}_i^2 \right)^{1/2}} \quad (ت) \end{aligned}$$

برای تعیین کمترین مقدار کران بالایی در (ت)، از تعریف $\alpha_i = \lambda_i \bar{u}_i$ استفاده می‌کنیم؛ در این صورت یادآوری می‌کنیم که:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{u}_i \bar{v}_i = \sum_{i=1}^n \alpha_i \bar{v}_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sum_{i=1}^n \bar{v}_i^2} \quad (ث)$$

(با استفاده از نامعادله Schwarz)، و تساوی هنگامی حاصل می‌گردد که $\bar{v}_i = \alpha_i$ از جایگذاری (ث) در (ت) و با استفاده از $\lambda_1 = \dots = \lambda_{k-1} = 0$ نتیجه زیر حاصل می‌گردد:

$$\sup_V f(U, V) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 \bar{u}_i^2}{\sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{u}_i^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=k}^n \lambda_i^2 \bar{u}_i^2}{\sum_{i=k}^n \lambda_i \bar{u}_i^2}}$$

حال اگر فرض کنیم که $\sqrt{\lambda_i} \bar{u}_i = \beta_i$ در این صورت می‌توان نوشت:

$$\inf_U \sup_V f(U, V) = \inf_{(\bar{u}_i)_{i=1}^n} \sqrt{\frac{\sum_{i=k}^n \lambda_i^2 \bar{u}_i^2}{\sum_{i=k}^n \lambda_i \bar{u}_i^2}} = \inf_{(\beta_i)_{i=k}^n} \sqrt{\frac{\sum_{i=k}^n \lambda_i \beta_i^2}{\sum_{i=k}^n \beta_i^2}} \quad (ج)$$

آخرین عبارت در (ج) به صورت خارج قسمت Rayleigh است (ر.ک. به: بخش ۲.۶) و می‌دانیم که $\sqrt{\lambda_k}$ کمترین مقدار می‌باشد که به ازای $\beta_i = 0$ و $\beta_k \neq 0$ برای $i \neq k$ به دست می‌آید و لذا نتیجه مورد نظر حاصل می‌گردد.

در عمل، برای تعیین مقدار $\sqrt{\lambda_k}$ inf-sup، باید از یک حل ویژه مقدار رایج استفاده شود تا بتوان سریعاً از روی ویژه مقادیر صفر عبور کرده و سپس λ_k را محاسبه نمود. در این صورت یک آزمون دنباله Sturm (ر.ک. به: بخش ۱۱.۴.۳)، مقدار k را نیز به دست خواهد داد و سپس مستقیماً می‌توانیم نتیجه‌گیری کنیم که آیا مدل شامل مدهای فشاری غیرواقعی می‌باشد یا نه. به عنوان مثال فرض کنید که n_p تعداد درجات آزادی فشاری بوده و n_u تعداد درجات آزادی تغییر مکانی باشد. در این صورت تعداد مدهای فشاری k_{pm} عبارت است از:

$$k_{pm} = k - (n_u - n_p + 1)$$

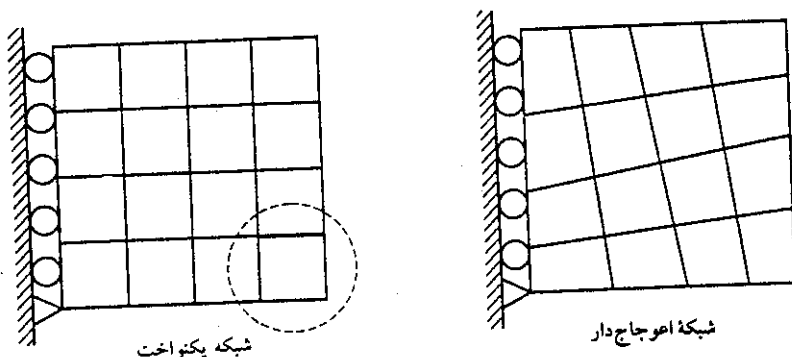
اگر $k_{pm} > 0$ باشد، در این صورت گسسته‌سای عناصر محدود شامل مدفشاری ثابت یا مدهای فشاری غیرواقعی است [مقدار inf-sup در (۴.۱۹۳) صفر می‌باشد، اگرچه λ_k (اولین ویژه مقدار غیرصفر) ممکن است که به طور مجانبی به یک مقدار بزرگتر از صفر میل کند]. این فرمول بدین دلیل نتیجه می‌شود که برای اینکه مدفشاری وجود نداشته باشد، هسته $(K_{up})_h$ باید صفر باشد (ر.ک. به: (۴.۱۹۹)).

برای نشان دادن آزمون inf-sup، در شکل ۴.۲۴ نتایج حاصله برای عناصر چهارگره‌ای و نه‌گره‌ای را ارائه کرده‌ایم. مشاهده می‌کنیم که در این حالات برای هر گسسته‌سازی، دنباله‌ای از سه شبکه برای محاسبه $\sqrt{\lambda_k}$ استفاده می‌شود که برای مشخص کردن اینکه آیا عنصر خاصیت قفل شوندگی از خود نشان می‌دهد یا نه، کافی می‌باشد. یادآوری می‌کنیم که عناصر مبتنی بر تغییر مکان چهارگره‌ای و نه‌گره‌ای شرط inf-sup را تأمین نمی‌کنند و نیز اعوجاجات عناصر اثر ناچیزی در نتایج دارند. در هر یک از این آزمون‌ها، k_{pm} مساوی صفر بود، بنابراین، همانگونه که انتظار می‌رفت، ایده‌آل‌سازی‌ها شامل مدهای فشاری نمی‌باشند. البته اگر شرایط مرزی مثال ۴.۳۸ مورد استفاده قرار می‌گرفتند، در این صورت یک مدفشاری غیرواقعی برای عنصر ۴/۱ پیدا می‌شد. به عبارت دیگر، در آزمون عمومی عناصر برای مدهای غیرواقعی، شرط تغییر مکان‌های صفر در سرتاسر مرز باید در نظر گرفته شود [هر اندازه بُعد V_h ، به ازای یک O_h معلوم، کوچکتر باشد، به همان میزان امکان ارضای (۴.۱۹۶) بیشتر است].

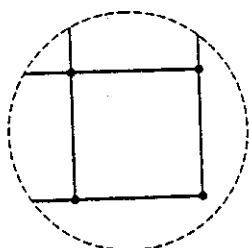
جواب‌های ارائه شده در ۴.۲۴ نتایج عددی مربوط به تنها یک مسأله و یک هندسه شبکه‌ای می‌باشد. ولی اگر در این نتایج، شرط inf-sup تأمین نشود، در این صورت می‌توان نتیجه‌گیری کرد که در حالت کلی شرط مذکور تأمین نخواهد گردید.

شکل ۴.۲۵ نتایج مربوط به عنصر فشار ثابت مثلثی سه‌گره‌ای را که به صورت یک عنصر

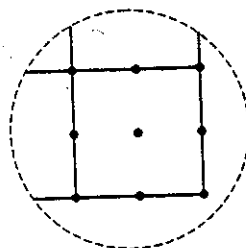
u/p فرمول‌بندی شده است، نشان می‌دهد (ر.ک. به: تمرین ۴.۵۰). نتایج نشان می‌دهند که شرط inf-sup برای این عنصر حاصل نمی‌شود. همچنین جالب توجه است که شبکه‌های از نوع B شامل مدهای فشاری غیرواقعی نبوده، در حالی که سایر شبکه‌ها در حالت کلی شامل مدهای فشاری غیرواقعی می‌باشند.



(الف) مسأله در نظر گرفته شده در آزمون Inf-sup. N ، مساوی تعداد عناصر در امتداد هر ضلع می‌باشد. در این مسأله $N=4$ بوده و حالت کرنش مسطح در نظر گرفته می‌شود.



عنصر چهارگره‌ای



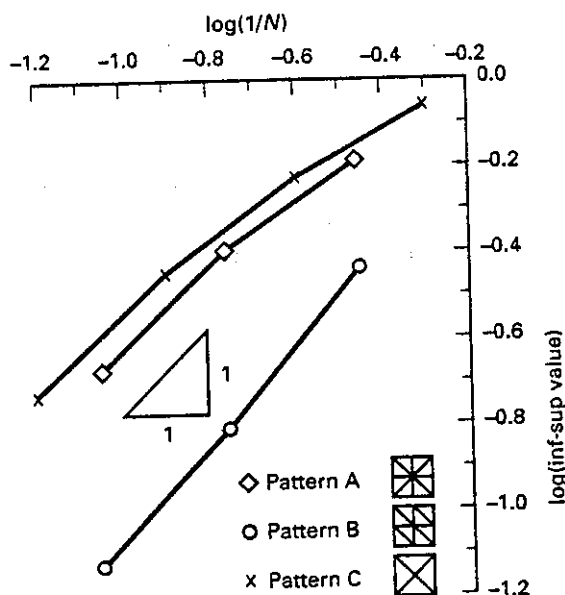
عنصر نه‌گره‌ای

(ب) عناصر استفاده شده

Figure 1 is a log-log plot showing the relationship between $\log(1/N)$ (x-axis) and $\log(\text{inf-sup value})$ (y-axis). The x-axis ranges from -1.0 to 0.0, and the y-axis ranges from -1.4 to 0.0. Two data series are plotted, both showing a linear relationship with a slope of 1, as indicated by the triangle with sides of length 1.

- The upper series, marked with solid circles, corresponds to $N=2$, $N=4$, and $N=8$.
- The lower series, marked with open diamonds, corresponds to a different set of values, indicated by the diamond symbol.

(ت) عناصر نہ گریھی















شکل ۴.۲۵. آزمون $\inf\text{-sup}$ عناصر مثلثی با استفاده از مسأله شکل (الف) ۴.۲۴. شبکه‌های از نوع A و C موجب ایجاد مدهای غیرواقعی می‌شوند.

نتایج دیگری در جدول ۴.۸ ارائه شده‌اند (ر.ک. به: D. Chapelle and K. J. Bathe). این جدول خلاصه‌ای از نتایج ارزیابی‌های عددی شرط $\inf\text{-sup}$ و نتایج تحلیلی را که به عنوان مثال توسط F. Brezzi and M. Fortin [A] داده شده است، ارائه می‌دهد. بررسی عددی سودمند است، زیرا شیوه مشابهی را برای تمامی عناصر u/p و $u/p-c$ در شبکه‌های یکنواخت یا اعوجاج‌دار اعمال می‌کند و عناصری را که برای آنها هنوز نتایج تحلیلی در دسترس نمی‌باشند می‌توان از طریق عددی ارزیابی نمود. همچنین اثرات ساخت بزرگ - عناصر از عناصر پایه‌ای را می‌توان به آسانی تعیین نمود (ر.ک. به: D. Chapelle and K. J. Bathe). برای برخی نتایج مربوط به عنصر $4/1$ مورد استفاده در یک بزرگ - عنصر).

ارزیابی عددی مشابهی را از شرط $\inf\text{-sup}$ برای سایر مسائل قیدی، خصوصاً فرمول‌بندی‌های آمیخته، می‌توان انجام داد (به عنوان مثال ر.ک. به: تمرین ۴.۶۳).

سرانجام یادآوری می‌کنیم که در استخراج شرط $\inf\text{-sup}$ (ر.ک. به: بخش ۴.۵.۱) نشان دادیم که اگر (۴.۱۶۶) صادق باشد، در این صورت شرط $\inf\text{-sup}$ (۴.۱۷۵) نتیجه می‌شود. با وجود این همانگونه که اشاره کردیم، هم‌ارزی (۴.۱۶۶) و (۴.۱۷۵) همچنین ایجاب می‌کند که ثابت کنیم که اگر (۴.۱۷۵) صادق باشد، در این صورت (۴.۱۶۶) نتیجه می‌شود. اثبات این مورد را به مثال ۴.۴۲ که بعداً ارائه می‌شود، موکول می‌کنیم.

جدول ۴.۸ پیش‌بینی‌های عددی inf-sup

شرط Inf-sup				
ملاحظات	پیش‌بینی عددی	اثبات تحلیلی	عناصر \dagger	
ر.ک. به: شکل ۴.۲۵	Fail	Fail	$3/1^\dagger$	
ر.ک. به: شکل ۴.۲۴	Fail	Fail	$4/1^\dagger$	
	Fail	Fail	8/3	
	Pass	Pass	8/1	
	Fail	Fail	9/4	
ر.ک. به: مثال‌های ۴.۳۶ و شکل ۴.۲۴	Pass	Pass	9/3	
	Pass	Pass	4/3-c	
	Fail	Fail	9/9-c	
	Fail	Fail	9/8-c	
	Fail	?	9/5-c	
	Pass	Pass	9/4-c	
برای این عنصر به	Pass	?	$9/(4-c + 1)$	

Gresho, R. L. Lee, S. T. Chan,
و J. M. Leone, Jr. [A] مراجعه شود.

\dagger \bigcirc درجه آزادی فشار پیوسته

X, درجه آزادی فشار غیرپیوسته.

\ddagger گستره‌سازی‌های شامل عناصر $3/1$ و $4/1$ می‌توانند شامل مدهای فشاری غیرواقعی باشند.

مثال ۴.۴۲: فرض کنید که شرط $\inf\text{-sup}$ (۴.۱۷۵) صادق است. ثابت کنید که در این صورت شرط (۴.۱۶۶) از آن نتیجه می‌شود.
حل:

فرض کنید که ویژه بردارها و ویژه مقادیر متناظر مسأله (۴.۲۰۷) با G_h مربوط به D_h [ونه $P_h(D_h)$ ، زیرا در (۴.۱۷۵)، D_h را در نظر گرفتیم] ϕ_i و λ_i و $i = 1, \dots, n$ باشند. بردارهای ϕ_i یک پایه یک‌متعامد از V_h را تشکیل می‌دهند. در این صورت هر بردار w_h در V_h را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$w_h = \sum_{i=1}^n w_h^i \phi_i \quad (\text{الف})$$

و با استفاده از خواص ویژه مقادیرها و خواص برداری داریم (ر.ک. به: بخش ۲.۵):

$$\|\operatorname{div} w_h\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i (w_h^i)^2 \quad (\text{ب})$$

حال هر q_h و هر \bar{w}_h را که در $\operatorname{div} \bar{w}_h = q_h$ صدق می‌کنند انتخاب می‌کنیم. می‌توان \bar{w}_h را به صورت (الف) تجزیه نمود:

$$\bar{w}_h = \sum_{i=1}^{k-1} \bar{w}_h^i \phi_i + \sum_{i=k}^n \bar{w}_h^i \phi_i \quad (\text{پ})$$

نخستین علامت مجموع یابی در (پ) برداری را تعریف می‌کند که متعلق به $K_h(0)$ بوده و ممکن است که یک مؤلفه بزرگی باشد. با وجود این، تنها با آن مؤلفه‌ای سر و کار داریم که عنصری از $K_h(0)$ نمی‌باشد که آنرا w_h می‌نامیم:

$$w_h = \sum_{i=k}^n \bar{w}_h^i \phi_i$$

$$\frac{\|q_h\|^2}{\|w_h\|^2} = \frac{\sum_{i=k}^n \lambda_i (\bar{w}_h^i)^2}{\sum_{i=k}^n (\bar{w}_h^i)^2} \quad \text{با این } w_h \text{ داریم:}$$

$$\geq \lambda_k$$













$$= \beta_k^2$$

$$\geq \beta^2$$

و با $c' = 1/\beta$ ، رابطه (۴.۱۶۶) نتیجه می‌شود.

جدول ۴.۸ پیش‌بینی‌های عددی inf-sup

شرط Inf-sup

ملاحظات	پیش‌بینی عددی	اثبات تحلیلی	عناصر †
ر.ک. به: شکل ۴.۲۵	Fail	Fail	 $3/1^\dagger$
ر.ک. به: شکل ۴.۲۴	Fail	Fail	 $4/1^\dagger$
	Fail	Fail	 $8/3$
	Pass	Pass	 $8/1$
	Fail	Fail	 $9/4$
ر.ک. به: مثال‌های ۴.۳۶ و شکل ۴.۲۴	Pass	Pass	 $9/3$
	Pass	Pass	 $4/3-c$
	Fail	Fail	 $9/9-c$
	Fail	Fail	 $9/8-c$
	Fail	?	 $9/5-c$
	Pass	Pass	 $9/4-c$
برای این عنصر به	Pass	?	 $9/(4-c + 1)$

 Gresho, R. L. Lee, S. T. Chan,
و J. M. Leone, Jr. [A] مراجعه شود.

† ○ درجه آزادی فشار پیوسته

X درجه آزادی فشار غیر پیوسته.

 † گسسته‌سازی‌های شامل عناصر $3/1$ و $4/1$ می‌توانند شامل مدهای فشاری غیرواقعی باشند.

مثال ۴.۴۲: فرض کنید که شرط $\inf\text{-sup}$ (۴.۱۷۵) صادق است. ثابت کنید که در این صورت شرط (۴.۱۶۶) از آن نتیجه می‌شود.
حل:

فرض کنید که ویژه بردارها و ویژه مقادیر متناظر مسأله (۴.۲۰۷) با G_h مربوط به D_h [ونه $P_h(D_h)$ ، زیرا در (۴.۱۷۵)، D_h را در نظر گرفتیم] ϕ_i و λ_i و $i = 1, \dots, n$ باشند. بردارهای ϕ_i یک پایه یکامتعامل از V_h را تشکیل می‌دهند. در این صورت هر بردار w_h در V_h را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$w_h = \sum_{i=1}^n w'_i \phi_i \quad (\text{الف})$$

و با استفاده از خواص ویژه مقادیر و خواص برداری داریم (ر.ک. به: بخش ۲.۵):

$$\|\text{div } w_h\|^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i (w'_i)^2 \quad (\text{ب})$$

حال هر q_h و هر \bar{w}_h را که در $\text{div } \bar{w}_h = q_h$ صدق می‌کنند انتخاب می‌کنیم. می‌توان \bar{w}_h را به صورت (الف) تجزیه نمود:

$$\bar{w}_h = \sum_{i=1}^{k-1} \bar{w}'_i \phi_i + \sum_{i=k}^n \bar{w}'_i \phi_i \quad (\text{پ})$$

نخستین علامت مجموع‌یابی در (پ) برداری را تعریف می‌کند که متعلق به $K_h(0)$ بوده و ممکن است که یک مؤلفه بزرگی باشد. با وجود این، تنها با آن مؤلفه‌ای سر و کار داریم که عنصری از $K_h(0)$ نمی‌باشد که آنرا w_h می‌نامیم:

$$w_h = \sum_{i=k}^n \bar{w}'_i \phi_i$$

$$\begin{aligned} \frac{\|q_h\|^2}{\|w_h\|^2} &= \frac{\sum_{i=k}^n \lambda_i (\bar{w}'_i)^2}{\sum_{i=k}^n (\bar{w}'_i)^2} \\ &\geq \lambda_k \\ &= \beta_k^2 \\ &\geq \beta^2 \end{aligned}$$

با این w_h داریم:

و با $c' = 1/\beta$ ، رابطه (۴.۱۶۶) نتیجه می‌شود.

۴.۵.۷ اعمال شرط Inf-Sup به عناصر سازه‌ای: عناصر تیری تک پارامتری

در بحث بالا مسأله ارتجاعی عمومی (۴.۱۵۱) و مسأله گسسته وردشی متناظر (۴.۱۵۴) را با قید تراکم‌ناپذیری (نسبی یا کامل) در نظر گرفتیم. با وجود این، شرایط بیضوی بودن و inf-sup نیز شرایط بنیادی می‌باشند که در ایجاد عناصر تیری، صفحه‌ای و پوسته‌ای که تحت اثر قیدهای کرنشی برشی و غشایی قرار دارند، در نظر گرفته می‌شوند (ر.ک. به: بخش ۵.۴). در مثال ۴.۳۰ به طور خلاصه عنصر تیری دوگره‌ای با فرمول‌بندی آمیخته را معرفی کردیم و نیز این عنصر و عناصر مرتبه بالاتری از این نوع را در بخش ۵.۴.۱ ملاحظه خواهیم نمود. اینک به اختصار در مورد شرایط بیضوی بودن و inf-sup برای عناصر تیری که به طور آمیخته درونیابی شده‌اند و نیز عناصر تیری مبتنی بر تغییر مکان صرف بحث می‌کنیم.

ملاحظات عمومی

مسأله گسسته وردشی فرمول‌بندی مبتنی بر تغییر مکان عبارت است از:

$$\min_{\mathbf{v}_h \in V_h} \left\{ \frac{EI}{2} \int_0^L (\beta_h')^2 dx + \frac{GAk}{2} \int_0^L (\gamma_h)^2 dx - \int_0^L p w_h dx \right\} \quad (4.208)$$

که در آن EI و Gak صلیبیت‌های خمشی و برشی تیر می‌باشند (ر.ک. به: بخش ۵.۴.۱)، L طول تیر بوده و p بار جانبی در واحد طول، β_h دوران مقطع و γ_h کرنش برشی جانبی می‌باشند:

$$\gamma_h = \frac{\partial w_h}{\partial x} - \beta_h \quad (4.209)$$

w_h تغییر مکان جانبی است و یک عنصر از V_h به صورت زیر می‌باشد:

$$\mathbf{v}_h = \begin{bmatrix} w_h \\ \beta_h \end{bmatrix} \quad (4.210)$$

اکنون قیدی را که با آن مواجه هستیم، قید برشی می‌باشد:

$$\gamma_h = \frac{\partial w_h}{\partial x} - \beta_h \rightarrow 0 \quad (4.211)$$

در عمل γ_h معمولاً بسیار کوچک است و البته صفر نیز می‌تواند باشد. بنابراین با به کارگیری نمادگذاری که پیش از این استفاده شد، فضاها را داریم:

$$K_h(q_h) = \{\mathbf{v}_h \mid \mathbf{v}_h \in V_h, \gamma_h(\mathbf{v}_h) = q_h\} \quad (4.212)$$

$$D_h = \{q_h \mid q_h = \gamma_h(v_h) \text{ for some } v_h \in V_h\} \quad (۴.۲۱۳)$$

و نرم‌ها عبارتند از:

$$\|v_h\|^2 = \int_{\text{Vol}} \left[\left(\frac{\partial w_h}{\partial x} \right)^2 + L^2 \left(\frac{\partial \beta_h}{\partial x} \right)^2 \right] d\text{Vol}; \quad \|\gamma_h\|^2 = \int_{\text{Vol}} (\gamma_h)^2 d\text{Vol} \quad (۴.۲۱۴)$$

شرط بیضوی بودن در این فرمول‌بندی مسأله محرز است، زیرا:

$$EI \int_0^L (\beta_h')^2 dx \geq \alpha \|v_h\|^2 \quad \forall v_h \in K_h(0) \quad (۴.۲۱۵)$$

که در آن $\alpha > 0$ بزرگتر از صفر و مستقل از h می‌باشد. برای اثبات این رابطه تنها ضروری است که یادآوری شود که:

$$\int_0^L \left(\frac{\partial w_h}{\partial x} \right)^2 dx = \int_0^L (\beta_h)^2 dx \leq \int_0^L L^2 \left(\frac{\partial \beta_h}{\partial x} \right)^2 dx \quad (۴.۲۱۶)$$

و از اینرو داریم:

$$\|v_h\|^2 \leq 2L^2 \int_0^L \left(\frac{\partial \beta_h}{\partial x} \right)^2 dx \quad (۴.۲۱۷)$$

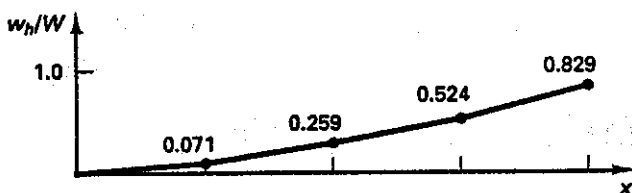
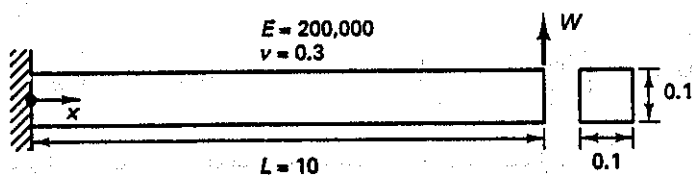
که $\alpha = EI/2L^2$ را نتیجه می‌دهد.

شرط inf-sup برای این فرمول‌بندی عبارت است از:

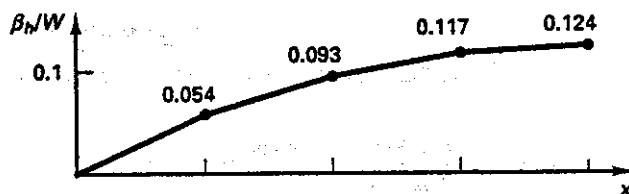
$$\inf_{\gamma_h \in D_h} \sup_{v_h \in V_h} \frac{\int_{\text{Vol}} \gamma_h [(\partial w_h / \partial x) - \beta_h] d\text{Vol}}{\|\gamma_h\| \|v_h\|} \geq c > 0 \quad (۴.۲۱۸)$$

که در آن مقدار ثابت c مستقل از h است.

عنصر دوگرهی. در ابتدا عنصر مبتنی بر تغییر مکان دوگرهی را در نظر می‌گیریم که برای آن w_h و β_h در هر عنصری خطی فرض می‌شوند (ر.ک. به: شکل (الف) ۴.۲۶ برای یک پاسخ نمونه). مقایسه نتایج محاسبه شده با روش حل مبتنی بر نظریه تیر Bernoulli در شکل ۴.۲۶ نشان می‌دهد که عنصر کاملاً به صورت نامطلوبی عمل می‌کند. در این حالت $K_h(0) = \{0\}$ بوده از اینرو شرط inf-sup (۴.۲۱۸) تأمین نمی‌شود. با مراجعه به (۴.۱۶۴)، همچنین می‌توان مشاهده نمود که رفتار همگرایی مطلوبی امکان‌پذیر نمی‌باشد؛ به عنوان مثال به میزانی که فضای V_h را افزایش می‌دهیم، $d(u, V_h)$ به سمت صفر میل می‌کند، در حالی که داریم $d(u, K_h(0)) = \|u\|$ (یک مقدار ثابت).



۲۰۰ = جواب حاصل از
نظریه تیر Bernoulli



۳۰ = جواب حاصل از
نظریه تیر Bernoulli

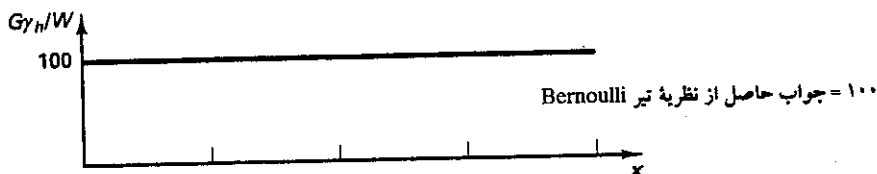
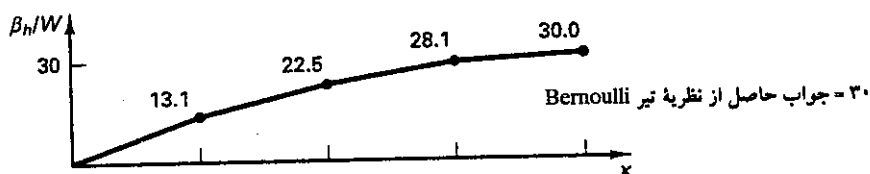
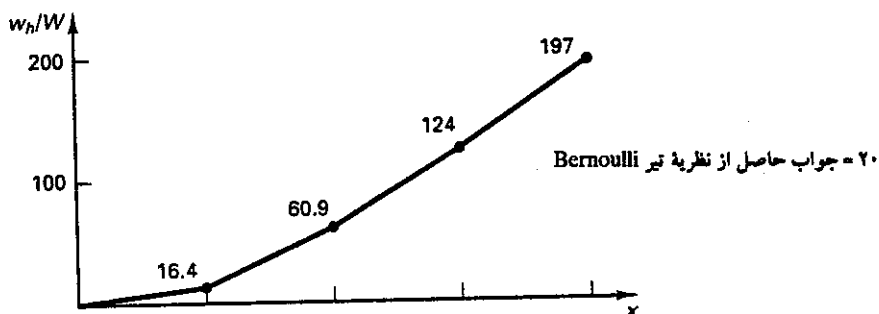
(الف) تحلیل با استفاده از عناصر مبتنی بر تغییر مکان: w_h و β_h به طور خطی در روی هر عنصر تغییر می‌کنند و $\gamma_h = (\partial w_h / \partial x) - \beta_h$ از آنجا که مقادیر w_h و β_h خیلی غیردقیق می‌باشند، از اینرو کرنش‌های برشی نیز بسیار غیردقیق خواهند بود.

شکل ۴.۲۶ تحلیل تیر طرّه‌ای با استفاده از عناصر تیری دوگرهی. از چهار عنصر با طول مساوی استفاده می‌شود. فاکتور اصلاحی برشی k مورد استفاده در رابطه (۵.۵۷) مساوی یک در نظر گرفته می‌شود.

سیس عنصر دوگرهی را که به طور آمیخته درون‌یابی شده است در نظر بگیرید که برای آن w_h و β_h خطی بوده و γ_h در روی هر عنصر ثابت می‌باشد. شکل (ب) ۴.۲۶ E نتایج حاصله از تحلیل تیر طرّه‌ای را نشان می‌دهد که دلالت بر ظرفیت پیش‌بینی‌کنندگی بهتر این عنصر دارد. مجدداً شرط بیضوی بودن حاصل می‌شود (ر.ک. به: تمرین ۴.۶۱) و بررسی این

نکته ضرورت می‌یابد که آیا شرط inf-sup زیر تأمین می‌شود یا نه.

$$\inf_{\gamma_h \in P_h(D_h)} \sup_{v_h \in V_h} \frac{\int_{Vol} \gamma_h [(\partial w_h / \partial x) - \beta_h] dVol}{\|\gamma_h\| \|v_h\|} \geq c > 0 \quad (۴.۲۱۹)$$



(ب) تحلیل با استفاده از عناصری که به طور آمیخته درونیابی شده‌اند w_h و β_h در روی هر عنصر بطور خطی تغییر می‌کنند و γ_h در هر عنصر ثابت می‌باشد.

حال داریم: $K_h(0) \neq \{0\}$ و برای شرط inf-sup با در نظر گرفتن یک نمونه آزمونی را انجام می‌دهیم (که γ_h به عنوان یک متغیر تلقی می‌شود). سپس با یک نمونه داده شده، انتخاب می‌کنیم که:

$$v_h = \begin{bmatrix} \hat{w}_h \\ \hat{\beta}_h \end{bmatrix} \quad (4.220)$$

که در آن $\partial \hat{w}_h / \partial x = \gamma_h$ و $\hat{\beta}_h = 0$ می‌باشد.
حال در نظر بگیرید که:

$$\frac{\int_{Vol} \gamma_h [(\partial \hat{w}_h / \partial x) - \hat{\beta}_h] dVol}{\|\hat{v}_h\|} = \sqrt{\int_{Vol} (\gamma_h)^2 dVol} \quad (4.221)$$

$$\sup_{v_h \in V_h} \frac{\int_{Vol} \gamma_h [(\partial w_h / \partial x) - \beta_h] dVol}{\|v_h\|} \geq \frac{\int_{Vol} \gamma_h [(\partial \hat{w}_h / \partial x) - \hat{\beta}_h] dVol}{\|\hat{v}_h\|} \quad \text{بنابراین داریم:}$$

$$= \sqrt{\int_{Vol} (\gamma_h)^2 dVol} \quad (4.222)$$

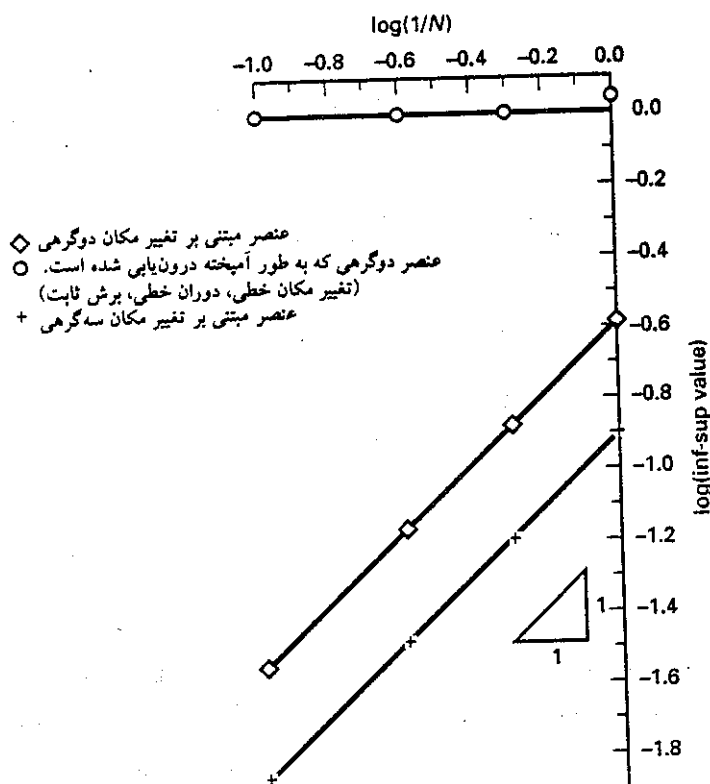
که در آن γ_h هنوز هم یک متغیر است. بنابراین برای عنصر تیری دوگرهی که به طور آمیخته درونیابی شده است داریم:

$$\inf_{\gamma_h \in P_h(D_h)} \sup_{v_h \in V_h} \frac{\int_{Vol} \gamma_h [(\partial w_h / \partial x) - \beta_h] dVol}{\|\gamma_h\| \|v_h\|} \geq 1 \quad (4.223)$$

از اینرو شرط inf-sup تأمین می‌شود.

همچنین می‌توان آزمون ویژه مقدار inf-sup را برای عناصر تیری دوگرهی انجام داد. معادلات مورد استفاده، آن معادلاتی هستند که برای مسأله ارتجاعی ارائه شده‌اند، اما از فضاهای عناصر تیری استفاده می‌کنیم (رجوع به تمرین ۴.۶۳). شکل ۴.۲۷ نتایج حاصله را نشان می‌دهد. یادآوری می‌کنیم که در (۴.۲۷)، کوچکترین ویژه مقدار غیرصفر گسسته‌سازی مبتنی بر تغییر مکان صفر، به میزانی که شبکه تعریف می‌شود، به صفر میل می‌کند، در حالی که شبکه‌های متشکل از عنصر تیری که به صورت آمیخته درونیابی شده‌اند، ویژه مقداری را به دست می‌دهند که مساوی یک است (و متناظر با علامت مساوی (۴.۲۲۳) می‌باشد).

عناصر تیری از مرتبه بالاتر را که به طور آمیخته درونیابی شده‌اند می‌توان به طریقه مشابه عناصر دوگرهی تحلیل نمود. همچنین شکل ۴.۲۷ نتایج حاصله برای عنصر دوگرهی مبتنی بر تغییر مکان صرف را با آزمون عددی inf-sup نشان می‌دهد.



شکل ۴.۲۷. آزمون inf-sup عناصر تیری (یک تیره طره‌ای در نظر گرفته می‌شود)

۴.۵.۸ تمرین‌ها

۴.۴۷ ثابت کنید که همواره نامعادله $\|u - u_h\| \leq \bar{c} d[u, K_h(0)]$ صادق می‌باشد که در آن u_h جواب تحلیل عناصر محدود و $K_h(0)$ در (۴.۱۵۹) تعریف شده است. از گزاره‌های زیر استفاده کنید:

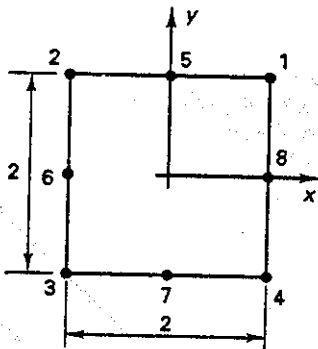
$$\forall v_h \in K_h(0), a(v_h, v_h) \geq \alpha \|v_h\|^2 \quad \text{بگونه‌ای که } \exists \alpha > 0$$

$$\forall v_{h1}, v_{h2} \in V_h, |a(v_{h2}, v_{h1})| \leq M \|v_{h1}\| \|v_{h2}\| \quad \text{بگونه‌ای که } \exists M > 0$$

و روش ارائه شده در (۴.۹۴) را به کار ببرید. توجه شود که ثابت \bar{c} مستقل از ضریب تغییر حجمی می‌باشد.

۴.۴۸ ثابت کنید که $\|\operatorname{div}(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)\|_0 \leq c \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_V$ در این جا $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V_h$ و c یک مقدار ثابت است.

۴.۴۹ $P_h(\operatorname{div} \mathbf{v}_h)$ را برای عنصر هشت گرهی نشان داده شده در زیر تعیین کنید. یک میدان فشار ثابت در روی عنصر فرض کنید.



۴.۵۰ ماتریس سختی یک عنصر عمومی u/p مثلثی $3/1$ را برای تحلیل دوبعدی تعیین نمایید. بنابراین عنصر دارای سه گره بوده و یک فشار پیوسته ثابت فرض می‌شود. از اطلاعات داده شده در شکل ۴.۱۷ استفاده نموده، شرایط تنش مسطح، کرنش مسطح و حالت تقارن محوری را در نظر بگیرید.

(الف) تمامی ماتریس‌های مورد نیاز را با استفاده از روش معمول برای عناصر u/p ایجاد کنید (ر.ک. به: مثال ۴.۳۲)، ولی هیچ گونه عملیات ضرب ماتریسی را انجام ندهید. حالتی را که K یک مقدار متناهی است در نظر بگیرید.

(ب) نتایج حاصل در مثال ۴.۱۷ را با نتایج حاصل در قسمت (الف) مقایسه نمایید.

(پ) ماتریس عنصر u/p را با فرض تراکم ناپذیری کامل به دست آورید (از اینرو چگالش ایستایی در روی درجه آزادی فشار را نمی‌توان انجام داد).

(توجه: این عنصر در تحلیل عملی، عنصر قابل اطمینانی نمی‌باشد بلکه صرفاً در این جا به عنوان یک تمرین مورد استفاده قرار می‌گیرد).

۴.۵۱ عنصر $4/1$ در مثال ۴.۳۲ را در نظر بگیرید. نشان دهید که با استفاده از عبارت $P_h(\operatorname{div} \mathbf{v}_h)$ (که در مثال ۴.۳۴ تعیین شده است) در (۴.۱۷۹)، ماتریس سختی مشابه آنچه را که در مثال ۴.۳۲ به دست آمده است می‌توان ایجاد نمود.

۴.۵۲ عنصر $9/3$ در مثال ۴.۳۶ را در نظر بگیرید، به عبارت دیگر فرض کنید که $Q_h = [1, x, y]$ فرض کنید که متناظر با \mathbf{v}_h تغییر مکان‌های نقاط گرهی عبارتند از:

$$\begin{array}{llllll} u_1 = 1; & u_2 = -1; & u_3 = -1; & u_4 = 1; & u_5 = -1; & u_8 = 1 \\ v_1 = 1; & v_2 = -1; & v_3 = -1; & v_4 = 1; & v_5 = -1; & v_8 = 1 \end{array}$$

و سایر تغییر مکان‌های نقاط گرهی مساوی صفر می‌باشند. تصویر $P_h(\text{div } \mathbf{v}_h)$ را محاسبه نماید.

۴.۵۳ نشان دهید که عنصر u/p $8/1$ ، شرط inf-sup را تأمین می‌کند (و از اینرو گسسته‌سازی با استفاده از این عنصر، مد فشاری غیرواقعی را به نمایش نخواهد گذاشت). برای اثبات این مطلب به مثال ۴.۳۶ رجوع کنید.

۴.۵۴ حل (۴.۱۸۷) را در نظر گرفته و نشان دهید که شرایط i و ii در (۴.۱۸۸) و (۴.۱۸۹) لازم و کافی برای وجود یک جواب منحصر به فرد می‌باشند.

۴.۵۵ شرط بیضوی بودن در (۴.۱۹۲) را در نظر بگیرید. ثابت کنید که این شرط به ازای عنصر $4/1$ در تحلیل‌های دوبعدی تنش مسطح و کرنش مسطح تأمین می‌شود.

۴.۵۶ مد فشاری ثابت $p_0 \in Q_h$ ، در یک میدان کرنش مسطح مربعی دوبعدی مربوط به مصالح تراکم‌ناپذیر، که با استفاده از چهار عنصر $9/3$ مدل شده و در آن همه تغییر مکان‌های مرزی مساوی صفر قرار داده شده‌اند، یک مد غیرواقعی نیست (زیرا آن مد به طور فیزیکی باید موجود باشد). نشان دهید که این مد یک عنصری از $P_h(D_h)$ نمی‌باشد.

۴.۵۷ عنصر $4/1$ را در نظر بگیرید. آیا می‌توانید یک مدل دو عنصری با شرایط مرزی مناسبی ایجاد کنید که شامل یک مد فشاری غیرواقعی باشد؟ جواب خود را شرح دهید.

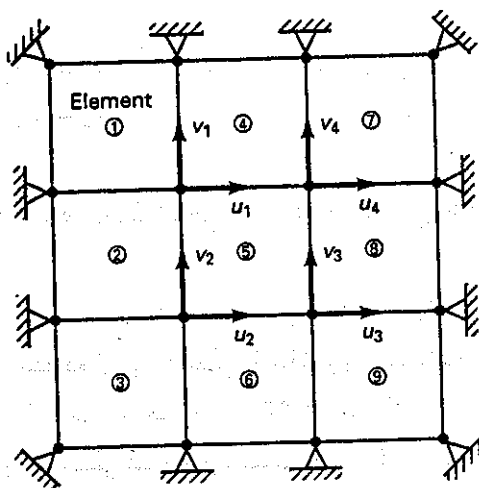
۴.۵۸ نه عنصر $4/1$ نشان داده شده در زیر را در نظر بگیرید. فرض کنید که تمامی تغییر مکان‌های مرزی صفر می‌باشند.

(الف) یک توزیع فشار \hat{p}_h را انتخاب کنید که به ازای آن یک بردار \mathbf{v}_h وجود دارد بگونه‌ای که:

$$\int_{\text{Vol}} \hat{p}_h \text{div } \mathbf{v}_h \, d\text{Vol} > 0$$

(ب) یک توزیع فشار \hat{p}_h را انتخاب کنید که به ازای آن هر توزیع تغییر مکان \mathbf{v}_h در V_h نتیجه زیر را به دست خواهد داد:

$$\int_{\text{Vol}} \hat{p}_h \text{div } \mathbf{v}_h \, d\text{Vol} = 0$$



۴.۵۹ فرمول‌بندی u/p -c را در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید که شرط \inf -sup را می‌توان بصورت (۴.۲.۶) نوشت، ولی با این نکته که

$$\mathbf{G}_h = (\mathbf{K}_{up})_h \mathbf{T}_h^{-1} (\mathbf{K}_{pu})_h$$

(ب) همچنین نشان دهید که به عنوان یک روش جایگزین، ویژه مسئله زیر را:

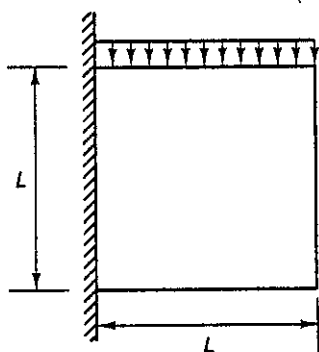
$$\mathbf{G}_h' \mathbf{Q}_h = \lambda' \mathbf{T}_h \mathbf{Q}_h$$

می‌توان در نظر گرفت که در آن $\mathbf{G}_h' = (\mathbf{K}_{pu})_h \mathbf{S}_h^{-1} (\mathbf{K}_{up})_h$ و نیز کوچکترین ویژه مقادیر غیر صفر (الف) و (۴.۲.۷) یکسان می‌باشند.

در این جا \mathbf{T}_h ماتریسی با نرم L^2 از p_h می‌باشد؛ به عبارت دیگر به ازای هر بردار حاوی فشارهای گرهی \mathbf{P}_h ، داریم: $\|\mathbf{p}_h\| = \mathbf{P}_h^T \mathbf{T}_h \mathbf{P}_h$ و از اینرو $\mathbf{T}_h = -\kappa (\mathbf{K}_{pp})_h$.

۴.۶ تحلیل صفحه طره‌ای نشان داده شده در شکل زیر را در شرایط کرنش مسطح در نظر بگیرید. فرض کنید که از عنصر u/p $3/1$ در دنباله‌ای از شبکه‌ها که به صورت یکنواخت تعریف می‌شوند، استفاده می‌شود. n_u را تعداد تغییر مکان‌های نقاط گرهی و n_p را تعداد متغیرهای فشار در نظر بگیرید. نشان دهید که به میزانی که شبکه تعریف می‌شود، نسبت n_u/n_p به ۱ میل می‌کند. (این نکته به روشنی دشواری‌های حل را نشان می‌دهد.)

نسبت مذکور را در موقعی که از عناصر $9/3$ و $9/8$ -c استفاده می‌شود محاسبه کنید (عنصر $9/8$ -c در جدول ۴.۸ تعریف شده است) و در مورد نتایج حاصل بحث نمایید.



Young's modulus E
 Poisson's ratio $\nu = 0.499$
 Plane strain conditions

۴.۶۱ نشان دهید که عناصر تیری دوگرهی و سه گرهی و چهار گرهی که به صورت آمیخته درون‌یابی شده‌اند، شرط بیضوی بودن را تأمین می‌کنند. در بخش ۴.۵.۷ عنصر دوگرهی در نظر گرفته شد و در مورد عناصر سه گرهی و چهار گرهی در بخش ۵.۴.۱ بحث خواهد شد (همچنین ر.ک. به: تمرین ۴.۶۲).

۴.۶۲ به طور تحلیلی نشان دهید که شرط $\inf\text{-sup}$ برای عناصر تیری مبتنی بر تغییر مکان سه گرهی و چهار گرهی تأمین نمی‌شود و نیز نشان دهید که شرط مذکور برای عناصر تیری که به صورت آمیخته درون‌یابی شده‌اند ارضا می‌شود، البته با این فرض که γ_h به ترتیب به صورت خطی و سهموی تغییر می‌کند (ر.ک. به: بخش ۵.۴.۱).

۴.۶۳ مسأله ویژه مقدار آزمون عددی $\inf\text{-sup}$ را برای عنصر تیری مورد نظر در بخش ۴.۵.۷ ایجاد نمایید. از (۴.۲.۷) استفاده کنید و تمامی ماتریس‌ها را با جزییات آن تعریف نمایید.

۴.۶۴ مسأله مربوط به شکل ۴.۲۴ و عناصر ارائه شده در جدول ۴.۸ را در نظر بگیرید. برای هر یک از این عناصر، به میزانی که شبکه تعریف می‌شود، به عبارت دیگر $h \rightarrow 0$ ، ضریب قید را که به صورت نسبت تعداد درجات آزادی تغییر مکان به تعداد درجات آزادی فشار تعریف می‌شود محاسبه نمایید. بنابراین توجه کنید که این ضریب قید به تنهایی نشان نمی‌دهد که آیا شرط $\inf\text{-sup}$ تأمین می‌گردد یا نه.

فرمول بندی و محاسبه ماتریس های عناصر محدود تک پارامتری

۵.۱ مقدمه

یکی از مراحل بسیار مهم روش حل عناصر محدود، محاسبه ماتریس های عناصر محدود است. در بخش ۴، در مورد فرمول بندی و محاسبه مدل های عناصر محدود با مختصات تعمیم یافته بحث نمودیم. اساساً هدف از ارائه عناصر محدود با مختصات تعمیم یافته تقویت فهم خود از روش عناصر محدود بود. پیشتر اشاره کردیم که در اغلب تحلیل های عملی استفاده از عناصر محدود تک پارامتری مؤثرتر است. (برای نحوه ایجاد اولیه و توسعه این عناصر به [A] I. C. Taig و [A] B. M. Irons مراجعه شود.)

هدف ما در این فصل ارائه فرمول بندی عناصر محدود تک پارامتری و توصیف پیاده سازی های مؤثر آنها است. در استخراج مدل های عناصر محدود با مختصات تعمیم یافته، از دستگاه های مختصات محلی عنصر x, y, z استفاده نمودیم و تغییر مکان های عنصری $u(x, y, z)$ و $v(x, y, z)$ و $w(x, y, z)$ (و متغیرهای تنش و کرنش عنصر در حالت فرمول بندی های آمیخته) را به صورت چند جمله ای هایی از x و y و z با ضرایب ثابت مجهول α_i و β_i و γ_i ، که به عنوان مختصات تعمیم یافته مشخص می شوند، فرض کردیم. همراه کردن یک مفهوم فیزیکی با مختصات تعمیم یافته ناممکن بود، با وجود این به هنگام ارزیابی دریافتیم که مختصات تعمیم یافته که تغییر مکان ها را تعیین می کنند، ترکیب های خطی از تغییر مکان های نقاط گرهی عنصراند. اندیشه اساسی فرمول بندی عناصر محدود تک پارامتری پیدا کردن رابطه ای است بین تغییر مکان های عنصر در هر نقطه ای و تغییر

مکان‌های نقاط گرهی عنصر، با استفاده مستقیم از توابع درونیابی (که توابع شکل نیز نامیده می‌شوند). این بدان معنی است که ماتریس تبدیل A^{-1} [ر.ک. به: (۴.۵۷)] تعیین نمی‌شود و به جای آن ماتریس‌های عنصری متناظر با درجات آزادی مورد نیاز مستقیماً به دست می‌آیند.

۵.۲ استخراج تک پارامتری ماتریس سختی عنصر میله‌ای

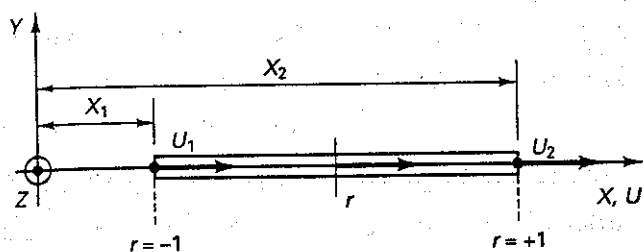
برای نشان دادن روش فرمول‌بندی سختی تک پارامتری، یک عنصر میله‌ای نمونه را در نظر بگیرید. برای آسان نمودن شرح روش مذکور فرض کنید که میله در محور مختصات X کلی، بگونه‌ای که در شکل ۵.۱ نشان داده شده است، قرار دارد. نخستین مرحله فرمول‌بندی، ارتباط مختصات کلی واقعی X به یک دستگاه مختصات طبیعی با متغیر r ، $-1 \leq r \leq 1$ می‌باشد (شکل ۵.۱). این تبدیل با استفاده از رابطه زیر انجام می‌گیرد:

$$X = \frac{1}{2}(1-r)X_1 + \frac{1}{2}(1+r)X_2 \quad (۵.۱)$$

یا

$$X = \sum_{i=1}^2 h_i X_i \quad (۵.۲)$$

که در آن $h_1 = \frac{1}{2}(1-r)$ و $h_2 = \frac{1}{2}(1+r)$ توابع درونیابی یا توابع شکل می‌باشند. توجه شود که (۵.۲) یک رابطه منحصر به فردی بین مختصات X و r در روی میله ایجاد می‌کند.



شکل ۵.۱ عنصر در دستگاه مختصات کلی و طبیعی

تغییر مکان‌های کلی میله به طریقه مشابه مختصات کلی، به صورت زیر بیان می‌شوند:

$$U = \sum_{i=1}^2 h_i U_i \quad (۵.۳)$$

که در این حالت یک تغییر خطی برای تغییر مکان‌ها در نظر گرفته می‌شود. درونیابی مختصات

عنصر و تغییر مکان‌های عنصری با استفاده از توابع درون‌یابی یکسان که در یک دستگاه مختصات طبیعی تعریف می‌شوند، پایه فرمول‌بندی تک پارامتری می‌باشد.

برای محاسبه ماتریس سختی عنصر، ضروری است که کرنش‌های عنصری $\epsilon = dU/dX$ پیدا شوند. در این جا از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\epsilon = \frac{dU}{dr} \frac{dr}{dX} \quad (5.4)$$

که در آن از رابطه (۵.۳) داریم:

$$\frac{dU}{dr} = \frac{U_2 - U_1}{2} \quad (5.5)$$

و با استفاده از (۵.۲)، نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\frac{dX}{dr} = \frac{X_2 - X_1}{2} = \frac{L}{2} \quad (5.6)$$

که در آن L طول میله است. بنابراین همانگونه که انتظار داشتیم، نتیجه زیر را خواهیم داشت:

$$\epsilon = \frac{U_2 - U_1}{L} \quad (5.7)$$

از اینرو ماتریس تبدیل کرنش - تغییر مکان که متناظر با (۴.۳۲) می‌باشد، عبارت است از:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

در حالت کلی، ماتریس تبدیل کرنش - تغییر مکان تابعی از مختصات طبیعی است و از اینرو انتگرال حجمی ماتریس سختی (۴.۳۳) را با انتگرال‌گیری روی مختصات طبیعی تعیین می‌کنیم. با دنبال نمودن شیوه عمومی مزبور، اگرچه در این مثال ضروری نمی‌باشد، نتیجه زیر را خواهیم داشت:

$$\mathbf{K} = \frac{AE}{L^2} \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} J dr \quad (5.9)$$

که در آن سطح مقطع میله A و ضریب ارتجاعی E ثابت فرض شده و J ژاکوبی است که طول عنصر در دستگاه مختصات کلی را به طول عنصر در دستگاه مختصات طبیعی ارتباط می‌دهد؛ به عبارت دیگر داریم:

$$dX = J dr \quad (5.10)$$

از (۵.۶) داریم:

$$J = \frac{L}{2} \quad (5.11)$$

در این صورت با تعیین (۵.۹) ماتریس معروف زیر را به دست می‌آوریم:

$$K = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.12)$$

همانگونه که در مقدمه اشاره شد، در فرمول‌بندی تک‌پارامتری از ایجاد ماتریس تبدیل A^{-1} اجتناب می‌شود. برای مقایسه این فرمول‌بندی با فرمول‌بندی مختصات تعمیم یافته، نیاز داریم که (۵.۱) را برای یافتن r حل کرده، سپس r را در رابطه (۵.۳) جایگذاری کنیم. در این صورت نتیجه زیر حاصل می‌گردد:

$$r = \frac{X - [(X_1 + X_2)/2]}{L/2} \quad (5.13)$$

و سپس داریم:

$$U = \alpha_0 + \alpha_1 X \quad (5.14)$$

که در آن:

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{2}(U_1 + U_2) - \frac{X_1 + X_2}{2L}(U_2 - U_1) \\ \alpha_1 &= \frac{1}{L}(U_2 - U_1) \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

یا

$$\alpha = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{X_1 + X_2}{2L} & \frac{1}{2} - \frac{X_1 + X_2}{2L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} U \quad (5.16)$$

که در آن داریم:

$$\alpha^T = [\alpha_0 \quad \alpha_1]; \quad U^T = [U_1 \quad U_2] \quad (5.17)$$

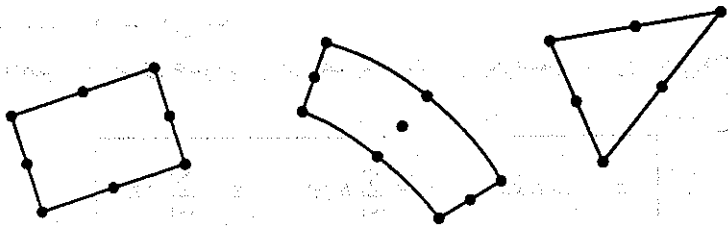
و ماتریسی که α را به U در (۵.۱۶) ارتباط می‌دهد، A^{-1} است. یادآوری می‌شود که در این مثال مختصات تعمیم یافته α_0 و α_1 تغییر مکان کلی عنصری را به مختصات کلی عنصری ارتباط می‌دهند [ر.ک. به: (۵.۱۴)].

۵.۳ فرمول‌بندی عناصر محیط پیوسته

برای یک عنصر محدود محیط پیوسته، در بسیاری حالات محاسبه مستقیم ماتریس‌های عنصر که متناظر با درجات آزادی کلی می‌باشند، روش مؤثری است. با وجود این نخست فرمول‌بندی ماتریس‌هایی را که مربوط به درجات آزادی محلی می‌باشند ارائه خواهیم داد، زیرا هنگامی که ماتریس‌های عنصری، متناظر با درجات آزادی کلی مستقیماً محاسبه می‌گردند رعایت ملاحظات دیگری ممکن است که ضروری باشد (ر.ک. به: بخش ۵.۳.۴). در ادامه بحث، استخراج ماتریس‌های عناصر خرابایی مستقیم، عناصر تنش مسطح دوبعدی، عناصر کرنش مسطح، عناصر با تقارن محوری و عناصر سه بعدی را که ممکن است همه دارای تعداد متفاوت گره باشند در نظر خواهیم گرفت. عناصر نمونه در شکل ۵.۲ نشان داده می‌شوند.

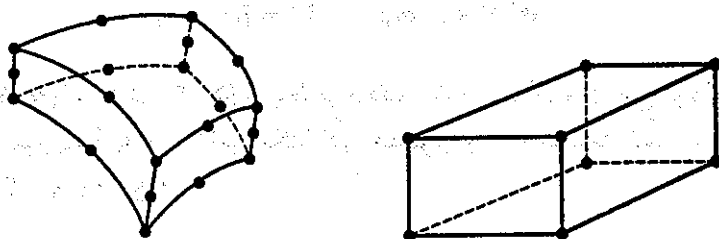


(الف) عناصر خرابایی و کابلی



(ب) عناصر دوبعدی

شکل ۵.۲ برخی عناصر نمونه محیط پیوسته



(پ) عناصر سه بعدی

ادامه شکل ۵.۲

بحث خود را به سمت محاسبه ماتریس های عناصر محدود مبتنی بر تغییر مکان سوق خواهیم داد. با این وجود، روش های مشابهی نیز در محاسبه ماتریس های عناصر با فرمول بندی آمیخته مورد استفاده قرار می گیرند، بویژه تحلیل فرمول بندی های مبتنی بر تغییر مکان / فشار که راجع به آنها در بخش ۵.۳.۵ به اختصار بحث خواهد شد.

۵.۳.۱ عناصر چهارضلعی

روش بنیادی در فرمول بندی عناصر محدود تک پارامتری، بیان مختصات عنصر و تغییر مکان های عنصری به صورت درونیابی هایی با استفاده از دستگاه مختصات طبیعی عنصر می باشد. دستگاه مختصات مزبور برحسب تعداد ابعاد عنصر، یک بعدی، دوبعدی یا سه بعدی خواهد بود. فرمول بندی ماتریس های عنصری صرف نظر از اینکه یک عنصر یک بعدی، دوبعدی یا سه بعدی مورد نظر می باشد، عموماً یکسان است. بر همین اساس در ارائه عمومی فرمول بندی ها، معادلات یک عنصر سه بعدی را مورد استفاده قرار می دهیم. فرمول بندی های عناصر یک بعدی و دوبعدی به آسانی با استفاده از محورهای مختصات مربوطه و توابع درونیابی مناسب به دست می آیند.

یک عنصر سه بعدی عمومی را در نظر بگیرید. در این صورت درونیابی های مختصات عبارتند از:

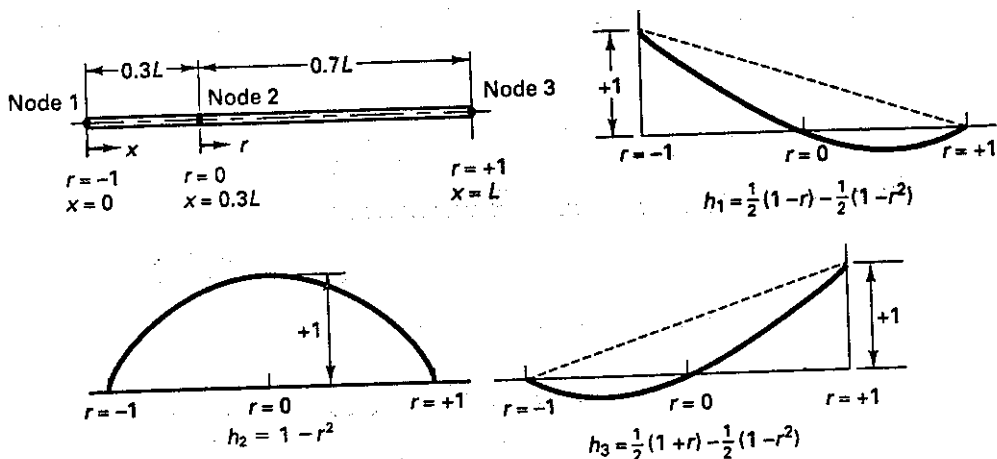
$$x = \sum_{i=1}^q h_i x_i; \quad y = \sum_{i=1}^q h_i y_i; \quad z = \sum_{i=1}^q h_i z_i \quad (5.18)$$

که در آن x و y و z مختصات هر نقطه ای از عنصراند (در این جا مختصات محلی) و x_i و y_i و z_i مختصات $i = 1, \dots, q$ گره عنصر می باشند. در این جا توابع درونیابی h_i در دستگاه

مختصات طبیعی عنصر تعریف می شوند و دارای متغیرهای r و s و t اند که هر کدام از ۱- الی ۱ تغییر می کنند. برای عناصر یک بعدی و دوبعدی فقط معادلات مربوطه، در (۵.۱۸) به کار خواهند رفت و توابع درونیابی به ترتیب تنها به متغیرهای مختصات طبیعی r و نیز s ، بستگی خواهند داشت.

تاکنون کمیت های مجهول در (۵.۱۸)، توابع درونیابی h_i می باشند. خاصیت بنیادی تابع درونیابی h_i این است که مقدار آن در دستگاه طبیعی در گره i مساوی یک و در سایر گره ها صفر می باشد. با استفاده از این شرایط، توابع h_i مربوط به یک آرایش نقاط گرهی خاص به طریقه ای سیستماتیک به دست می آیند. با وجود این به آسانی می توان این توابع را بگونه ای که در مثال ساده زیر نشان داده می شود با استفاده از یک بررسی ساده به دست آورد.

مثال ۵.۱: توابع درونیابی مربوط به عنصر خریایی سه گرهی نشان داده شده در شکل ۵.۱ E را ایجاد نمایید.



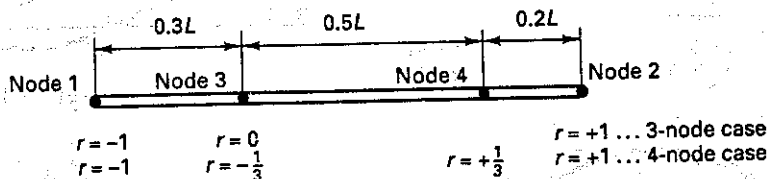
شکل ۵.۱ E توابع درونیابی یک بعدی یک عنصر خریایی

حل:

نکته نخست برای عنصر خریایی سه گرهی این است که می خواهیم چند جمله ای های درونیابی، شامل r^2 به عنوان بالاترین توان از r باشند؛ به عبارت دیگر توابع درونیابی سهمی خواهند بود. در این صورت h_2 را می توان به آسانی بدست آورد، یعنی یک سهمی که شرایط صفر بودن در $I = \pm 1$ و مساوی یک بودن در $r = 0$ را تأمین می کند، به صورت $(1-r^2)$ می باشد. دو تابع درونیابی h_1 و h_3 از جمع آثار یک تابع خطی و یک سهمی ایجاد می شوند.

تابع درونیابی h_3 را در نظر می‌گیریم. با استفاده از $\frac{1}{2}(1+r)$ این شرایط که تابع باید در $r = -1$ مساوی صفر و در $r = +1$ مساوی یک باشد، ارضا می‌گردند. برای حصول اطمینان از اینکه $h_3 = 0$ نیز مساوی صفر است، ضروری است که از تابع $h_3 = \frac{1}{2}(1+r) - \frac{1}{2}(1-r^2)$ استفاده شود. تابع درونیابی h_1 نیز به طریقه‌ای مشابه به دست می‌آید.

روش مورد استفاده در مثال ۵.۱ برای ایجاد توابع درونیابی نهایی مورد نظر اشاره بر یک فرمول‌بندی جالب برای عنصری با تعداد مختلف گره دارد. در این فرمول‌بندی نخست توابع درونیابی مربوط به یک عنصر بنیادی دوگره‌ای به دست می‌آید. در این صورت اضافه نمودن یک گره دیگر موجب ایجاد یک تابع درونیابی دیگری شده و یک اصلاح به توابع درونیابی پیشین اعمال می‌گردد. شکل ۵.۳ توابع درونیابی عنصر یک بعدی مورد نظر در مثال ۵.۱ را که دارای یک گره اضافی چهارم نیز می‌باشد ارائه می‌دهد. همانگونه که در شکل نشان داده شده است، عنصر می‌تواند دارای دو الی چهار گره باشد. یادآوری می‌کنیم که گرهای ۳ و ۴ گرهای داخلی هستند، زیرا گرهای ۱ و ۲ برای تعریف عنصر دوبعدی مورد استفاده قرار می‌گیرند.



(الف) عناصر خربایی با تعداد متغیر ۲ الی ۴ گره

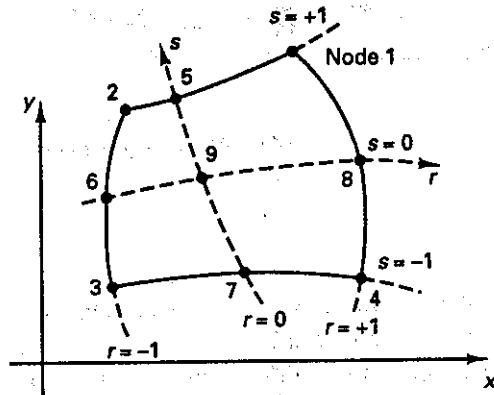
	تنها هنگامی در توابع وارد می‌شوند که گره ۳ موجود باشد	تنها موقعی در توابع وارد می‌شوند که گرهای ۳ و ۴ موجود باشند
$h_1 = \frac{1}{2}(1-r)$	$-\frac{1}{2}(1-r^2)$	$+\frac{1}{16}(-9r^3 + r^2 + 9r - 1)$
$h_2 = \frac{1}{2}(1+r)$	$-\frac{1}{2}(1-r^2)$	$+\frac{1}{16}(9r^3 + r^2 - 9r - 1)$
$h_3 = (1-r^2)$		$+\frac{1}{16}(27r^3 + 7r^2 - 27r - 7)$
$h_4 = \frac{1}{16}(-27r^3 - 9r^2 + 27r + 9)$		

(ب) توابع درونیابی

شکل ۵.۳ توابع درونیابی عنصر یک بعدی با تعداد متغیر دو الی چهار گره

این روش ایجاد توابع درونیابی عنصری برای تحلیل یک بعدی را می‌توان مستقیماً برای تحلیل‌های دوبعدی و سه بعدی تعمیم داد. شکل ۵.۴ توابع درونیابی یک عنصر دوبعدی با

تعداد متغیر چهار الی نه گره را نشان می دهد و شکل ۵.۵ توابع درونیابی برای عنصر سه بعدی ۸ الی ۲۰ گرهی را ارائه می نماید. توابع درونیابی دو و سه بعدی به طریقه مشابه توابع درونیابی یک بعدی ایجاد شده اند که در آن توابع بنیادی مورد استفاده در حقیقت همان توابع ارائه شده در شکل ۵.۳ می باشند. در شکل های ۵.۴ و ۵.۵ حداکثر، توابع سهموی را در نظر می گیریم ولی عناصر با تعداد متغیر گره و با درونیابی از مرتبه بالاتر را نیز می توان به طریقه ای مشابه استخراج نمود.



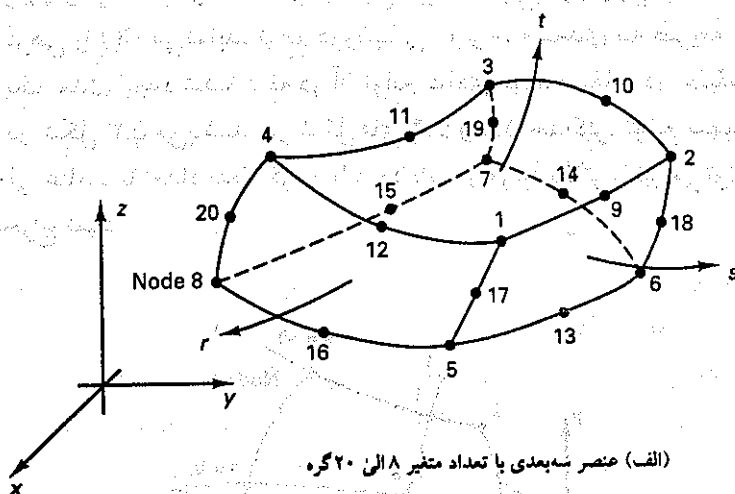
(الف) عنصر دوبعدی با تعداد متغیر ۴ الی ۹ گره

تنها موقعی در توابع وارد می شوند که گره i تعریف شده باشد

	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$	$i = 8$	$i = 9$
$h_1 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)$	$-\frac{1}{2}h_5$			$-\frac{1}{2}h_8$	$-\frac{1}{4}h_9$
$h_2 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s)$	$-\frac{1}{2}h_5$	$-\frac{1}{2}h_6$			$-\frac{1}{4}h_9$
$h_3 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s)$		$-\frac{1}{2}h_6$	$-\frac{1}{2}h_7$		$-\frac{1}{4}h_9$
$h_4 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)$			$-\frac{1}{2}h_7$	$-\frac{1}{2}h_8$	$-\frac{1}{4}h_9$
$h_5 = \frac{1}{2}(1-r^2)(1+s)$					$-\frac{1}{2}h_9$
$h_6 = \frac{1}{2}(1-s^2)(1-r)$					$-\frac{1}{2}h_9$
$h_7 = \frac{1}{2}(1-r^2)(1-s)$					$-\frac{1}{2}h_9$
$h_8 = \frac{1}{2}(1-s^2)(1+r)$					$-\frac{1}{2}h_9$
$h_9 = (1-r^2)(1-s^2)$					

(ب) توابع درونیابی

شکل ۵.۴ توابع درونیابی عنصر دوبعدی با تعداد متغیر چهار الی نه گره



$$\begin{aligned} h_1 &= g_1 - (g_9 + g_{12} + g_{17})/2 & h_6 &= g_6 - (g_{13} + g_{14} + g_{18})/2 \\ h_2 &= g_2 - (g_9 + g_{10} + g_{18})/2 & h_7 &= g_7 - (g_{14} + g_{15} + g_{19})/2 \\ h_3 &= g_3 - (g_{10} + g_{11} + g_{19})/2 & h_8 &= g_8 - (g_{15} + g_{16} + g_{20})/2 \\ h_4 &= g_4 - (g_{11} + g_{12} + g_{20})/2 & h_j &= g_j \text{ for } j = 9, \dots, 20 \\ h_5 &= g_5 - (g_{13} + g_{16} + g_{17})/2 \end{aligned}$$

اگر گره i در عنصر موجود نباشد $g_i = 0$ ؛ در غیر این صورت داریم:

$$g_i = G(r, r) G(s, s_i) G(t, t_i)$$

$$G(\beta, \beta_i) = \frac{1}{2} (1 + \beta_i \beta) \text{ for } \beta_i = \pm 1$$

$$G(\beta, \beta_i) = (1 - \beta^2) \text{ for } \beta_i = 0; \beta = r, s, t$$

(ب) توابع درونیابی

شکل ۵.۵ توابع درونیابی عنصر سه بعدی با تعداد متغیر هشت الی بیست گره

جالب توجه بودن عناصر ارائه شده در شکل‌های ۵.۳ الی ۵.۵ در این نکته نهفته است که عناصر مذکور می‌توانند دارای هر تعدادی گره بین مینیمم و ماکزیمم باشند. همچنین عناصر مثلثی را می‌توان تشکیل داد (ر.ک. به: بخش ۵.۳.۲). با وجود این عموماً برای به دست آوردن دقت ماکزیمم، عناصر با تعداد گره متغیر تا حد امکان باید تقریباً مستطیلی (در تحلیل سه بعدی، مستطیلی در هر صفحه محلی) و گره‌های غیرگوشه‌ای عموماً باید در موقعیت‌های

مختصات طبیعی واقع شده باشند، به عنوان مثال برای عنصر دوبعدی نه گرهی گره‌های میانی اضلاع باید عموماً در نقطه وسط بین گره‌های گوشه‌ای و نهمین گره باید در مرکز عنصر قرار گرفته باشند (برای برخی استثناها به بخش ۵.۳.۲ و برای جزییات بیشتر در مورد این نکات به بخش ۵.۳.۳ مراجعه شود).

با ملاحظه هندسه عناصر دوبعدی و سه بعدی در شکل‌های ۵.۴ و ۵.۵ یادآوری می‌کنیم که با استفاده از درونیابی‌های مختصات (۵.۱۸)، عناصر می‌توانند بدون هیچ‌گونه دشواری دارای مرزهای انحنا دار باشند. همین امر امتیاز مهم فرمول‌بندی تک پارامتری بر فرمول‌بندی عناصر محدود با مختصات تعمیم یافته می‌باشد. امتیاز مهم دیگر در این نکته نهفته است که توابع تغییر مکان عنصر را می‌توان به آسانی ایجاد نمود.

در فرمول‌بندی تک پارامتری، تغییر مکان‌های عناصر به طریق مشابه هندسه عنصر درونیابی می‌شوند، به عبارت دیگر از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$u = \sum_{i=1}^q h_i u_i; \quad v = \sum_{i=1}^q h_i v_i; \quad w = \sum_{i=1}^q h_i w_i \quad (5.19)$$

که در آن u و v و w تغییر مکان‌های محلی عنصری در هر نقطه عنصر بوده u_i ، v_i و w_i ، $i = 1, \dots, q$ ، تغییر مکان‌های عنصر در گره‌هایش می‌باشند. بنابراین فرض می‌شود که برای هر مختصات نقاط گرهی ضروری جهت توصیف هندسه عنصر، یک تغییر مکان نقاط گرهی متناظر، برای توصیف تغییر مکان‌های عنصر وجود دارد^(۱).

برای تعیین ماتریس سختی یک عنصر، محاسبه ماتریس تبدیل کرنش - تغییر مکان ضروری می‌باشد. کرنش‌های عنصر بر حسب مشتقات تغییر مکان‌های عنصر نسبت به مختصات محلی به دست می‌آیند. از آنجا که تغییر مکان‌های عنصر با استفاده از (۵.۱۹) در دستگاه مختصات طبیعی تعریف می‌شوند، ارتباط مشتقات z و y و x به مشتقات t و s و r ضروری است. ملاحظه می‌کنیم که روابط (۵.۱۸) به صورت زیر می‌باشند:

$$x = f_1(r, s, t); \quad y = f_2(r, s, t); \quad z = f_3(r, s, t) \quad (5.20)$$

که در آن f_i بیانگر «تابعی از» می‌باشد. رابطه معکوس عبارت است از:

$$r = f_4(x, y, z); \quad s = f_5(x, y, z); \quad t = f_6(x, y, z) \quad (5.21)$$

(۱) علاوه بر عناصر تک پارامتری، عناصر زیر پارامتری نیز وجود دارد که برای آنها، هندسه عنصر با درجه پایین‌تر از درجه تغییر مکان‌ها درونیابی می‌شود (ر.ک. به: انتهای این بخش) و عناصر زیر پارامتری نیز موجود می‌باشند که برای آنها هندسه عنصر با درجه بالاتر از درجه تغییر مکان‌ها درونیابی می‌گردد (ر.ک. به: بخش ۵.۴).

مشتقات $\partial/\partial x$ و $\partial/\partial y$ و $\partial/\partial z$ مورد نیاز می‌باشند و استفاده از قاعده زنجیره‌ای به صورت زیر طبیعی به نظر می‌رسد:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} \quad (5.22)$$

و روابط مشابهی را نیز می‌توان برای $\partial/\partial y$ و $\partial/\partial z$ نوشت. با وجود این، برای محاسبه $\partial/\partial x$ در (۵.۲۲)، نیاز داریم که $\partial r/\partial x$ و $\partial s/\partial x$ و $\partial t/\partial x$ را محاسبه کنیم. و این بدان معنی است که تعیین روابط صریح معکوس (۵.۲۱) ضروری است. ایجاد این روابط معکوس به طور صریح عموماً دشوار می‌باشد، از اینرو تعیین مشتقات مورد نیاز به طریقه زیر ضروری است. با استفاده از قاعده زنجیره‌ای داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

که به صورت نماد ماتریسی عبارت است از:

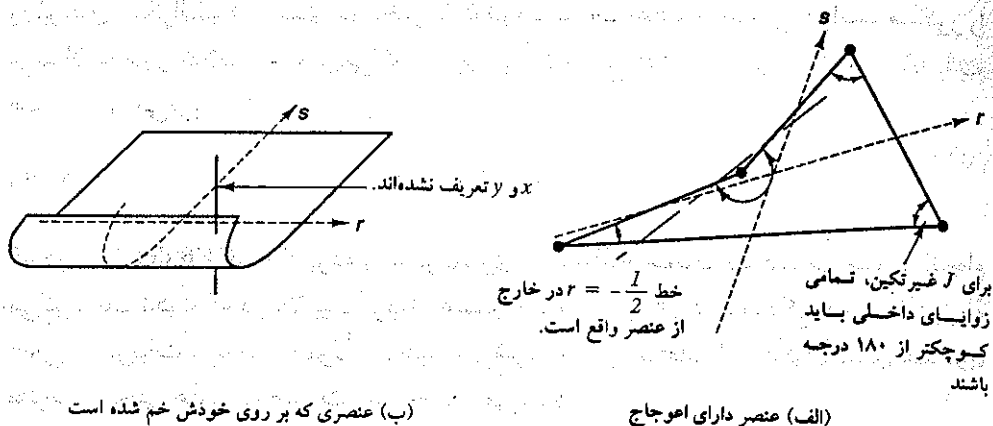
$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{J} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \quad (5.24)$$

که در آن \mathbf{J} عملگر ژاکوبی می‌باشد که مشتقات مختصات طبیعی را به مشتقات مختصات محلی ربط می‌دهد. باید یادآوری کنیم که عملگر ژاکوبی را می‌توان به آسانی با استفاده از روابط (۵.۱۸) پیدا کرد. ما نیاز به تعیین $\partial/\partial \mathbf{x}$ داریم و از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \quad (5.25)$$

که ایجاب می‌کند که معکوس \mathbf{J} موجود باشد. این معکوس به شرطی موجود است که یک تناظر یک به یک (به عبارت دیگر منحصر به فرد) بین مختصات طبیعی و محلی عنصر، بگونه‌ای که در (۵.۲۰) و (۵.۲۱) بیان گردید، وجود داشته باشد. در اغلب فرمول‌بندی‌ها نظیر فرمول‌بندی‌های عناصر شکل ۵.۳ الی ۵.۵ تناظر یک به یک بین دستگاه‌های مختصات (به عبارت دیگر برای هر r و s و t فقط یک x و y و z به طور متناظر وجود دارد) به روشنی داده می‌شود. با وجود این در حالاتی مانند حالات ارائه شده در شکل ۵.۶ که عنصر دارای اعوجاج زیادی بوده و یا به روی خودش خم می‌شود، رابطه منحصر به فردی بین دستگاه‌های مختصات

وجود ندارد (همچنین ر.ک. به: بخش ۵.۳.۲، مثال ۵.۱۷ برای تکنیکی ها در تبدیل ژاکوبی).



شکل ۵.۶ عناصر با ژاکوبی تکین احتمالی

با استفاده از (۵.۱۹) و (۵.۲۵)، $\partial u / \partial x$ ، $\partial u / \partial y$ ، $\partial u / \partial z$ ، $\partial v / \partial x$ ، ...، $\partial w / \partial z$ را تعیین می کنیم و در نتیجه می توان ماتریس تبدیل کرنش - تغییر مکان B را با استفاده از رابطه زیر ایجاد نمود:

$$\epsilon = B \hat{u} \quad (5.26)$$

که در آن برداری است که شامل تغییر مکان های نقاط گرهی (۵.۱۹) است و یادآوری می کنیم که J بر عناصر ماتریس B اثر می گذارد. در این صورت ماتریس سختی عنصر متناظر با درجات آزادی محلی عنصر عبارت است از:

$$K = \int_V B^T C B \, dV \quad (5.27)$$

باید دانست که عناصر ماتریس B توابعی از مختصات طبیعی r و s و t می باشند. بنابراین، انتگرال گیری حجمی روی حجم مختصات طبیعی بسط می یابد و ضروری است که دیرانسیل حجمی dV نیز برحسب مختصات طبیعی نوشته شود. در حالت کلی داریم:

$$dV = \det J \, dr \, ds \, dt \quad (5.28)$$

که در آن $\det J$ دترمینان عملگر ژاکوبی در (۵.۲۴) می باشد (ر.ک. به: تمرین ۵.۶). محاسبه تحلیلی انتگرال حجمی (۵.۲۷) عموماً مؤثر نیست، بویژه هنگامی که از درونیایی های از مرتبه بالاتر استفاده می شود و یا هنگامی که عنصر دارای اعوجاج است. بنابراین انتگرال گیری عددی مورد استفاده قرار می گیرد. در حقیقت انتگرال گیری عددی را باید

به عنوان یک قسمت مکمل محاسبه ماتریس سختی عنصر تک پارامتری تلقی نمود. جزئیات روش‌های انتگرال‌گیری عددی در بخش ۵.۵ توصیف خواهند شد، ولی فزاینده مذکور را می‌توان به طور خلاصه به صورتی که در زیر می‌آید، جمع‌بندی نمود. نخست (۵.۲۷) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$K = \int_V F dr ds dt \quad (5.29)$$

که در آن $F = B^T C B \det J$ بوده و انتگرال‌گیری در دستگاه مختصات طبیعی عنصر انجام می‌گیرد. همانگونه که در بالا بیان گردید اعضای ماتریس F به r و s و t بستگی دارند، اما رابطه تابعی با جزئیات مربوطه معمولاً محاسبه نمی‌شود. حال با استفاده از انتگرال‌گیری عددی، ماتریس سختی عنصر به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$K = \sum_{i,j,k} \alpha_{ijk} F_{ijk} \quad (5.30)$$

که در آن F_{ijk} ماتریس F می‌باشد که در نقطه (t_k, s_j, r_i) محاسبه شده است و α_{ijk} مقدار ثابت معلومی می‌باشد که بستگی به مقادیر r_i, s_j و t_k دارد. نقاط نمونه‌گیری (r_i, s_j, t_k) تابع و فاکتورهای وزنی متناظر با آنها α_{ijk} به گونه‌ای انتخاب می‌شوند که حداکثر دقت در انتگرال‌گیری حاصل شود. طبیعتاً دقت انتگرال‌گیری را می‌توان با افزایش تعداد نقاط نمونه‌گیری افزایش داد.

هدف از ارائه مختصر روش انتگرال‌گیری عددی تکمیل توصیف فرمول‌بندی عمومی تک پارامتری بود. پیش از این در مورد سهولت نسبی این فرمول‌بندی به نکاتی اشاره شد. سهولت فرمول‌بندی عنصر و وجود کارایی زیاد در تعیین ماتریس‌های عناصر در یک برنامه کامپیوتری موجب شده‌اند که توجه زیادی به ایجاد و بسط عناصر تک پارامتری و سایر عناصر مربوط به آن معطوف شود.

حال فرمول‌بندی ماتریس جرم عنصر و بردارهای بار به آسانی به دست می‌آیند. به عنوان مثال، اگر تغییر مکان‌های عنصر را به صورت زیر بنویسیم:

$$u(r, s, t) = H \hat{u} \quad (5.31)$$

که در آن H ماتریس توابع درونیابی می‌باشد، در این صورت مانند روابط (۴.۳۴) الی (۴.۳۷) داریم:

$$M = \int_V \rho H^T H dV \quad (5.32)$$

$$\mathbf{R}_B = \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{f}^B dV \quad (۵.۳۳)$$

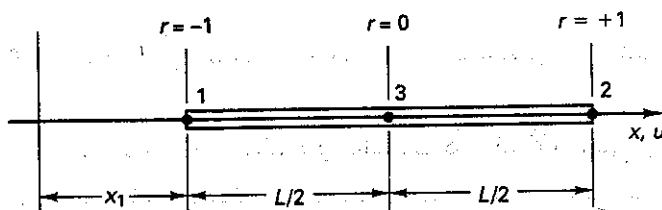
$$\mathbf{R}_S = \int_S \mathbf{H}^{ST} \mathbf{f}^S dS \quad (۵.۳۴)$$

$$\mathbf{R}_I = \int_V \mathbf{B}^T \boldsymbol{\tau}^I dV \quad (۵.۳۵)$$

همانگونه که برای ماتریس سختی \mathbf{K} در (۵.۳۰) عنوان گردید، این ماتریس‌ها نیز با استفاده از انتگرال‌گیری عددی تعیین می‌شوند. در تعیین این ماتریس‌ها نیاز داریم که از تابع مناسب \mathbf{F} استفاده کنیم. برای محاسبه بردار نیروی جسم \mathbf{R}_B ، از $\mathbf{F} = \mathbf{H}^T \mathbf{f}^B \det \mathbf{J}$ و برای تعیین بردار نیروی سطحی از $\mathbf{F} = \mathbf{H}^{ST} \mathbf{f}^S \det \mathbf{J}$ ، و برای محاسبه بردار بار تنش اولیه از $\mathbf{F} = \mathbf{B}^T \boldsymbol{\tau}^I \det \mathbf{J}$ و برای تعیین ماتریس جرم از $\mathbf{F} = \rho \mathbf{H}^T \mathbf{H} \det \mathbf{J}$ استفاده می‌کنیم.

این فرمول‌بندی برای عناصر یک بعدی، دوبعدی و سه بعدی بود. حال برخی حالات خاصی را در نظر گرفته و جزئیات محاسبه ماتریس‌های عناصر را نشان می‌دهیم.

مثال ۵.۲: ماتریس‌های درونیابی تغییر مکان \mathbf{H} ، ماتریس درونیابی کرنش - تغییر مکان \mathbf{B} و عملگر ژاکوبی \mathbf{J} برای عنصر خرابایی سه گرهی نشان داده شده در شکل ۵.۲ را استخراج نمایید.



شکل ۵.۲ عنصر خرابایی با گره ۳ در وسط عنصر

حل:

توابع درونیابی عنصر در شکل ۵.۱ داده شده‌اند. بنابراین داریم:

$$\mathbf{H} = \left[-\frac{r}{2}(1-r) \quad \frac{r}{2}(1+r) \quad (1-r^2) \right] \quad (\text{الف})$$

ماتریس کرنش - تغییر مکان \mathbf{B} از طریق مشتق‌گیری از \mathbf{H} نسبت به r و پیش ضرب نمودن نتیجه حاصله در معکوس عملگر ژاکوبی به دست می‌آید:

$$B = J^{-1} \left[\left(-\frac{1}{2} + r\right) \left(\frac{1}{2} + r\right) - 2r \right] \quad (\text{ب})$$

برای تعیین J از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$x = -\frac{r}{2}(1-r)x_1 + \frac{r}{2}(1+r)(x_1 + L) + (1-r^2)\left(x_1 + \frac{L}{2}\right)$$

بنابراین:

$$x = x_1 + \frac{L}{2} + \frac{L}{2}r \quad (\text{پ})$$

که در آن یادآوری می‌کنیم که چون گره ۳ در وسط عنصر خرابایی قرار دارد، x بطور خطی بین گره‌های ۱ و ۲ درون‌یابی می‌شود. نتیجه مشابهی نیز با استفاده تنها از گره‌های ۱ و ۲ برای درون‌یابی هندسی به دست می‌آید. حال با استفاده از رابطه (پ) داریم:

$$J = \left[\frac{L}{2} \right] \quad (\text{ت})$$

$$J^{-1} = \left[\frac{2}{L} \right]; \quad \det J = \frac{L}{2} \quad \text{و}$$

خال با داشتن روابط (الف) تا (ت)، می‌توان تمامی ماتریس‌های عناصر محدود و بردارهای داده شده در (۵.۲۷) الی (۵.۳۵) را تعیین نمود.

مثال ۵.۳: عملگر ژاکوبی J عناصر دوبعدی نشان داده شده در شکل ۵.۳ را ایجاد کنید.

حل:

عملگر ژاکوبی برای دستگاه‌های مختصات کلی X و Y و محلی x و y یکسان می‌باشد. از اینرو برای آسانی کار از دستگاه‌های مختصات محلی استفاده می‌کنیم. با استفاده از توابع درون‌یابی ارائه شده در شکل ۵.۴ و جایگزینی در ۵.۱۸ و ۵.۲۳، برای عنصر ۱ نتیجه زیر حاصل می‌گردد:

$$x = 3r; \quad y = 2s$$

$$J = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

به طور مشابه برای عنصر ۲ داریم:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4} \{ (1+r)(1+s)[3 + 1/(2\sqrt{3})] + (1-r)(1+s)[-3 - 1/(2\sqrt{3})] \\ &\quad + (1-r)(1-s)[-3 + 1/(2\sqrt{3})] + (1+r)(1-s)[3 - 1/(2\sqrt{3})] \} \\ y &= \frac{1}{4} \{ (1+r)(1+s)(\frac{1}{2}) + (1-r)(1+s)(\frac{1}{2}) + (1-r)(1-s)(-\frac{1}{2}) \\ &\quad + (1+r)(1-s)(-\frac{1}{2}) \} \end{aligned}$$

و از اینرو:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

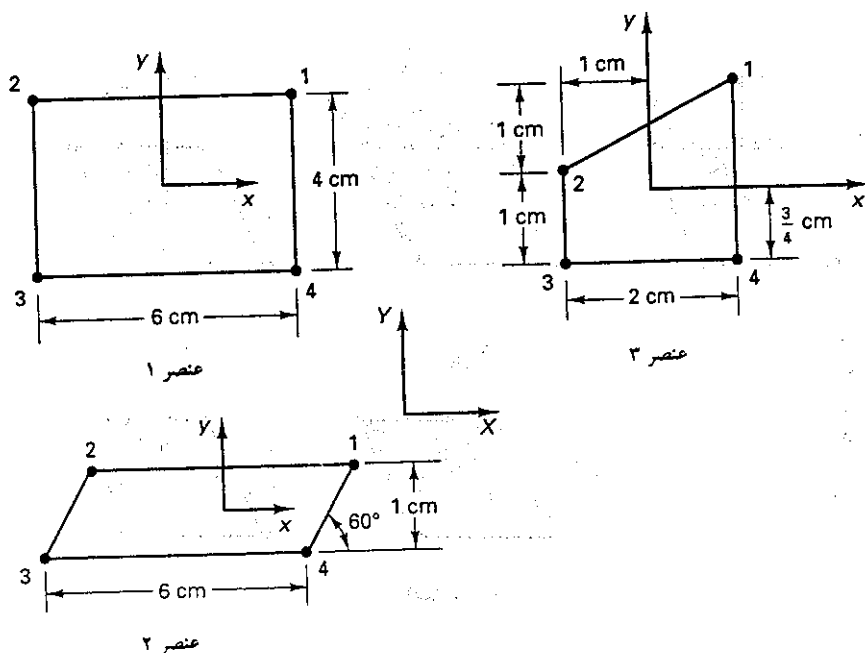
همچنین برای عنصر ۳ داریم:

$$x = \frac{1}{4}[(1+r)(1+s)(1) + (1-r)(1+s)(-1) + (1-r)(1-s)(-1) + (1+r)(1-s)(+1)]$$

$$y = \frac{1}{4}[(1+r)(1+s)(\frac{3}{4}) + (1-r)(1+s)(\frac{1}{4}) + (1-r)(1-s)(-\frac{3}{4}) + (1+r)(1-s)(-\frac{1}{4})]$$

از اینرو داریم:

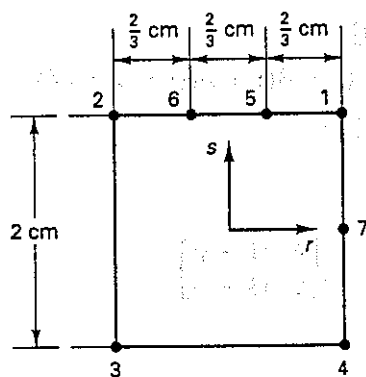
$$\mathbf{J} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 4 & (1+s) \\ 0 & (3+r) \end{bmatrix}$$



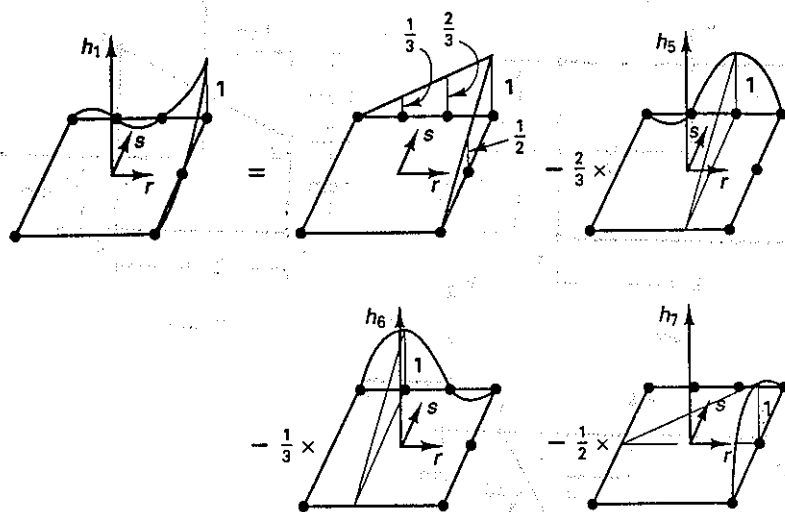
شکل ۵.۳. برخی عناصر دوبعدی

ملاحظه می‌کنیم که عملگر ژاکوبی یک عنصر مربعی 2×2 ، یک ماتریس واحد است و عناصر ماتریس عملگر J یک عنصر عمومی، میزان اعوجاج آن از عنصر مربعی 2×2 را بیان می‌کنند. از آنجا که اعوجاج در هر نقطه (r, s) عناصر ۱ و ۲ ثابت است، در نتیجه عملگر J برای این عناصر ثابت است.

مثال ۵.۴: توابع درونیابی عنصر دوبعدی نشان داده شده در شکل ۵.۴ E را ایجاد کنید.



(الف)

(ب) ایجاد h_i

شکل ۵.۴ E یک عنصر هفت گرهی

حل:

توابع انفرادی از ترکیب درون‌یابی‌های بنیادی خطی، سهموی و درجه سومی که مربوط به جهات r و s می‌باشند، به دست می‌آیند. بنابراین با استفاده از توابع ارائه شده در شکل ۵.۳ نتایج زیر حاصل می‌گردند:

$$h_5 = \left[\frac{1}{16}(-27r^3 - 9r^2 + 27r + 9) \right] \left[\frac{1}{2}(1 + s) \right]$$

$$h_6 = \left[(1 - r^2) + \frac{1}{16}(27r^3 + 7r^2 - 27r - 7) \right] \left[\frac{1}{2}(1 + s) \right]$$

$$h_2 = \left[\frac{1}{2}(1 - r) - \frac{1}{2}(1 - r^2) + \frac{1}{16}(-9r^3 + r^2 + 9r - 1) \right] \left[\frac{1}{2}(1 + s) \right]$$

$$h_3 = \frac{1}{4}(1 - r)(1 - s)$$

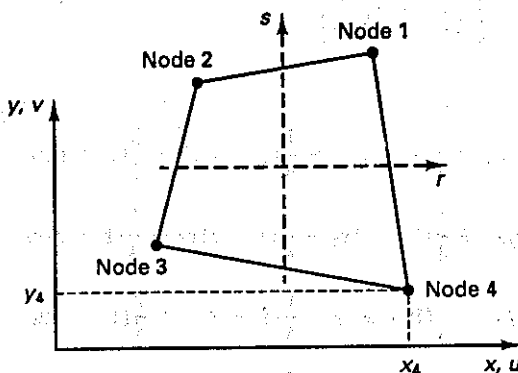
$$h_7 = \frac{1}{2}(1 - s^2)(1 + r)$$

$$h_4 = \frac{1}{4}(1 + r)(1 - s) - \frac{1}{2}h_7$$

$$h_1 = \frac{1}{4}(1 + r)(1 + s) - \frac{2}{3}h_5 - \frac{1}{3}h_6 - \frac{1}{2}h_7$$

که در آن h_7 به گونه‌ای که در یک نمای مایل / هوایی در شکل ۵.۴ نشان داده شده است، ساخته می‌شود.

مثال ۵.۵: عبارات مورد نیاز برای تعیین ماتریس سختی عنصر محدود چهارگره‌ای تک پارامتری نشان داده شده در شکل ۵.۵ را استخراج کنید. شرایط تنش مسطح یا کرنش مسطح را فرض کنید.



شکل ۵.۵ عنصر دوبعدی چهارگره‌ای

حل:

برای این عنصر با استفاده از توابع درون‌یابی h_1 و h_2 و h_3 و h_4 تعریف شده در شکل

۵.۴، درونیابی مختصات مطابق با روابط (۵.۱۸) عبارت است از:

$$x = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)x_1 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)x_2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)x_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)x_4$$

$$y = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)y_1 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)y_2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)y_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)y_4$$

درونیابی تغییر مکان مطابق با روابط (۵.۱۹) عبارت است از:

$$u = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)u_1 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)u_2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)u_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)u_4$$

$$v = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)v_1 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)v_2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)v_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)v_4$$

گرش‌های عنصر به صورت زیر می‌باشند:

$$\epsilon^T = [\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}]$$

که در آن داریم:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

برای تعیین مشتقات تغییر مکان، ضروری است که (۵.۲۳) تعیین گردد:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = \mathbf{J} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}$$

که در آن داریم:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{1}{4}(1+s)x_1 - \frac{1}{4}(1+s)x_2 - \frac{1}{4}(1-s)x_3 + \frac{1}{4}(1-s)x_4$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = \frac{1}{4}(1+r)x_1 + \frac{1}{4}(1-r)x_2 - \frac{1}{4}(1-r)x_3 - \frac{1}{4}(1+r)x_4$$

$$\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{1}{4}(1+s)y_1 - \frac{1}{4}(1+s)y_2 - \frac{1}{4}(1-s)y_3 + \frac{1}{4}(1-s)y_4$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{1}{4}(1+r)y_1 + \frac{1}{4}(1-r)y_2 - \frac{1}{4}(1-r)y_3 - \frac{1}{4}(1+r)y_4$$

بنابراین برای هر مقدار r و s با فرض $-1 \leq r \leq 1$ و $-1 \leq s \leq 1$ ، می‌توان عملگر ژاکوبی را با استفاده از عبارات نشان داده شده برای $\partial x/\partial r$ ، $\partial x/\partial s$ و $\partial y/\partial r$ ، $\partial y/\partial s$ تشکیل داد. فرض کنید که \mathbf{J} را در $r = r_i$ و $s = s_j$ تعیین نموده و عملگر را با \mathbf{J}_{ij} و دترمینان آن را با $\det \mathbf{J}_{ij}$ نمایش می‌دهیم.

در این صورت داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}_{\substack{\text{at } r=r_i \\ s=s_j}} = \mathbf{J}_{ij}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix}_{\substack{\text{at } r=r_i \\ s=s_j}}$$

برای تعیین کرنش های عنصر از روابط زیر استفاده می کنیم:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{4}(1+s)u_1 - \frac{1}{4}(1+s)u_2 - \frac{1}{4}(1-s)u_3 + \frac{1}{4}(1-s)u_4$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1}{4}(1+r)u_1 + \frac{1}{4}(1-r)u_2 - \frac{1}{4}(1-r)u_3 - \frac{1}{4}(1+r)u_4$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{4}(1+s)v_1 - \frac{1}{4}(1+s)v_2 - \frac{1}{4}(1-s)v_3 + \frac{1}{4}(1-s)v_4$$

$$\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{1}{4}(1+r)v_1 + \frac{1}{4}(1-r)v_2 - \frac{1}{4}(1-r)v_3 - \frac{1}{4}(1+r)v_4$$

بنابراین داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix}_{\substack{\text{at } r=r_i \\ s=s_j}} = \frac{1}{4} \mathbf{J}_{ij}^{-1} \begin{bmatrix} 1+s_j & 0 & -(1+s_j) & 0 & -(1-s_j) & 0 & 1-s_j & 0 \\ 1+r_i & 0 & 1-r_i & 0 & -(1-r_i) & 0 & -(1+r_i) & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \quad (\text{الف})$$

و

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}_{\substack{\text{at } r=r_i \\ s=s_j}} = \frac{1}{4} \mathbf{J}_{ij}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1+s_j & 0 & -(1+s_j) & 0 & -(1-s_j) & 0 & 1-s_j \\ 0 & 1+r_i & 0 & 1-r_i & 0 & -(1-r_i) & 0 & -(1+r_i) \end{bmatrix} \hat{\mathbf{u}} \quad (\text{ب})$$

که در آن داریم:

$$\hat{\mathbf{u}}^T = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad u_4 \quad v_4]$$

با تعیین روابط (الف) و (ب)، می توان ماتریس تبدیل کرنش - تغییر مکان را در نقطه (r_i, s_j) ایجاد نمود؛ به عبارت دیگر، رابطه زیر را به دست می آوریم:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{ij} = \mathbf{B}_{ij} \hat{\mathbf{u}}$$

که در آن اندیس های پایین i و j دلالت بر این دارند که تبدیل کرنش - تغییر مکان در نقطه (r_i, s_j)

تعیین شده است. به عنوان مثال اگر $x = r$ و $y = s$ باشد (به عبارت دیگر ماتریس سختی یک عنصر مربعی مورد نیاز است که دارای طول اضلاع مساوی ۲ می‌باشد)، عملگر ژاکوبی، ماتریس واحد است و از اینرو داریم:

$$B_{ij} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1+s_j & 0 & -(1+s_j) & 0 & -(1-s_j) & 0 & 1-s_j & 0 \\ 0 & 1+r_i & 0 & 1-r_i & 0 & -(1-r_i) & 0 & -(1+r_i) \\ 1+r_i & 1+s_j & 1-r_i & -(1+s_j) & -(1-r_i) & -(1-s_j) & -(1+r_i) & 1-s_j \end{bmatrix}$$

حال ماتریس F_{ij} (۵.۳۰) به آسانی به صورت زیر درمی‌آید:

$$F_{ij} = B_{ij}^T C B_{ij} \det J_{ij}$$

که در آن ماتریس خواص مصالح C در جدول ۴.۳ داده شده است. در حالت شرایط تنش مسطح یا کرنش مسطح، انتگرال‌گیری در صفحه r و s انجام می‌شود و فرض می‌شود که تابع F در سرتاسر ضخامت عنصر ثابت است. بنابراین ماتریس سختی عنصر به صورت زیر می‌باشد:

$$K = \sum_{i,j} t_{ij} \alpha_{ij} F_{ij}$$

که در آن t_{ij} ضخامت عنصر در نقطه نمونه‌گیری (r_i, s_j) می‌باشد (در تحلیل کرنش مسطح $t_{ij} = 1$ است). با داشتن ماتریس‌های F_{ij} به صورتی که داده شده است و فاکتورهای وزنی α_{ij} که در دسترس می‌باشند، ماتریس سختی مورد نظر را می‌توان به آسانی تعیین نمود.

باید دانست که برای پیاده‌سازی عملی، در تعیین J_{ij} و ماتریس‌هایی که مشتقات تغییر مکان (الف) و (ب) را تعریف می‌کنند، تنها هشت مشتق ممکن توابع درون‌یابی h_1, \dots, h_4 مورد نیاز می‌باشند. بنابراین سودمند و مناسب خواهد بود که مشتقات مربوط به نقطه (r_i, s_j) یکباره در آغاز تعیین B_{ij} محاسبه شوند و سپس در هر زمانی که آنها مورد نیاز واقع می‌شوند مورد استفاده قرار گیرند.

ملاحظه این نکته ضروری است که اگر یک نقطه خاص (r_i, s_j) را در نظر بگیریم، روابط (الف) و (ب) را می‌توان به ترتیب به صورت زیر نوشت:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial x} u_i \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial y} u_i \end{aligned} \right\} \quad (\text{پ})$$

و

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial x} v_i \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \sum_{i=1}^4 \frac{\partial h_i}{\partial y} v_i \end{aligned} \right\} \quad (\text{ت})$$

بنابراین داریم:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial h_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial h_4}{\partial y} \\ \frac{\partial h_1}{\partial y} & \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} & \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_3}{\partial y} & \frac{\partial h_3}{\partial x} & \frac{\partial h_4}{\partial y} & \frac{\partial h_4}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{ث})$$

این نکته به طور ضمنی ملاحظه می‌شود که در (پ) و (ت) مشتقات در نقطه (r_i, s_j) تعیین شده‌اند، از اینرو در حقیقت در (ث)، ماتریس \mathbf{B}_{ij} را داریم.

مثال ۵.۶: عبارات مورد نیاز برای تعیین ماتریس جرم عنصر مورد نظر در مثال ۵.۵ را استخراج نمایید.

حل:

ماتریس جرم عنصر به صورت زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{M} = \sum_{i,j} \alpha_{ij} t_{ij} \mathbf{F}_{ij}$$

که در آن داریم:

$$\mathbf{F}_{ij} = \rho_{ij} \mathbf{H}_{ij}^T \mathbf{H}_{ij} \det \mathbf{J}_{ij}$$

و \mathbf{H}_{ij} ماتریس درونیابی تغییر مکان می‌باشد. توابع درونیابی تغییر مکان برای u و v عنصر چهارگرمی در مثال ۵.۵ داده شده‌اند و از اینرو داریم:

$$\mathbf{H}_{ij} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1+r_i)(1+s_j) & 0 & (1-r_i)(1+s_j) & 0 \\ 0 & (1+r_i)(1+s_j) & 0 & (1-r_i)(1+s_j) \\ (1-r_i)(1-s_j) & 0 & (1+r_i)(1-s_j) & 0 \\ 0 & (1-r_i)(1-s_j) & 0 & (1+r_i)(1-s_j) \end{bmatrix}$$

دترمینان عملگر ژاکوبی، $\det \mathbf{J}_{ij}$ در مثال ۵.۵ داده شد و ρ_{ij} چگالی جرمی در نقطه نمونه‌گیری (r_i, s_j) است. بنابراین تمام متغیرهای مورد نیاز برای تعیین ماتریس جرم تعریف شده‌اند.

مثال ۵.۷: عبارات مورد نیاز برای تعیین بردار نیروی جسمی \mathbf{R}_B و بردار تنش اولیه \mathbf{R}_I عنصر مورد نظر در مثال ۵.۵ را استخراج نمایید.

حل:

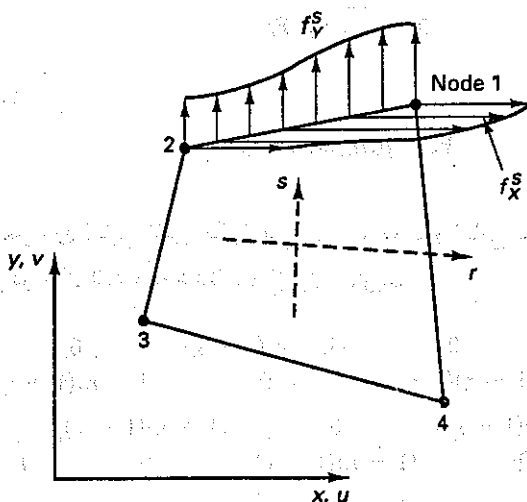
این بردارها با استفاده از ماتریس‌های H_{ij} ، B_{ij} و J_{ij} تعریف شده در مثال‌های ۵.۵ و ۵.۶ به دست می‌آیند، به عبارت دیگر داریم:

$$R_B = \sum_{i,j} \alpha_{ij} t_{ij} H_{ij}^T f_{ij}^B \det J_{ij}$$

$$R_I = \sum_{i,j} \alpha_{ij} t_{ij} B_{ij}^T \tau_{ij}^I \det J_{ij}$$

که در آن f_{ij}^B و τ_{ij}^I بردار نیروی جسمی و بردار تنش اولیه می‌باشند که در نقاط نمونه‌گیری انتگرال‌گیری تعیین شده‌اند.

مثال ۵.۸: عبارات مورد نیاز در محاسبه بردار نیروی سطحی R_s را استخراج کنید در صورتی که لبه ۱-۲ عنصر تک‌پارامتری چهارگره‌ای مورد نظر در مثال ۵.۵ به صورتی که در شکل ۵.۸ نشان داده شده است بارگذاری شود.



شکل ۵.۸: نیروی سطحی توزیع شده در امتداد لبه ۱-۲ یک عنصر چهارگره‌ای

حل:

نخستین مرحله در فرمول‌بندی، ایجاد درون‌یابی‌های تغییر مکان می‌باشد. از آنجاکه در لبه ۱-۲، $s = +1$ است، از اینرو با استفاده از توابع درون‌یابی داده شده در مثال ۵.۵ داریم:

$$u^s = \frac{1}{2}(1+r)u_1 + \frac{1}{2}(1-r)u_2$$

$$v^s = \frac{1}{2}(1+r)v_1 + \frac{1}{2}(1-r)v_2$$

بنابراین برای تعیین R_s در (۵.۳۴) می‌توانیم از روابط زیر استفاده کنیم:

$$H^s = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1+r) & 0 & \frac{1}{2}(1-r) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1+r) & 0 & \frac{1}{2}(1-r) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$f^s = \begin{bmatrix} f_x^s \\ f_y^s \end{bmatrix}$$

که در آن f_x^s و f_y^s مؤلفه‌های x و y نیروی سطحی وارده می‌باشند. این مؤلفه‌ها را می‌توان به عنوان تابعی از r نیز تعریف نمود.

برای تعیین انتگرال موجود در (۵.۳۴) همچنین ضروری است که ناحیه سطحی دیفرانسیلی dS را در دستگاه مختصات طبیعی r و s بیان کنیم. اگر t_r ضخامت باشد، در این صورت $dS = t_r dl$ ، که در آن dl یک طول دیفرانسیلی است.

$$dl = \det J^s dr; \quad \det J^s = \left[\left(\frac{\partial x}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r} \right)^2 \right]^{1/2}$$

اما مشتقات $\partial x / \partial r$ و $\partial y / \partial r$ در مثال ۵.۵ داده شده‌اند. در این حالت با استفاده از $s = +1$ داریم:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{x_1 - x_2}{2}; \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \frac{y_1 - y_2}{2}$$

اگرچه در این حالت بردار R_s را می‌توانستیم در یک راه حل تحلیلی بسته فرم به دست آوریم (به شرط اینکه توابع مورد استفاده در f^s ساده باشند)، ولی برای حفظ حالت کاربرد عمومی در یک برنامه کامپیوتری که R_s را محاسبه می‌نماید، استفاده از انتگرال‌گیری عددی روش مناسب و سودمندی است. بدین طریق، عناصر با تعداد متغیر گره را می‌توان با ظرافتی خاص در یک برنامه کامپیوتری پیاده‌سازی نمود. بنابراین، با استفاده از نمادگذاری تعریف شده در این بخش داریم:

$$R_s = \sum_i \alpha_i t_r F_i$$

$$F_i = H_i^T f_i^s \det J^s$$

یادآوری می‌شود که در این حالت تنها انتگرال‌گیری عددی یک بعدی مورد نیاز است زیرا s یک متغیر نیست.

مثال ۵.۹: شرح دهید که چگونه هنگامی که عنصر مورد نظر یک عنصر متقارن محوری است، عبارات داده شده در مثال ۵.۵ الی ۷.۵ باید اصلاح شوند؟
حل:

در این حالت دوگونه اصلاح ضروری است: اولاً یک رادیان از سازه را در نظر می‌گیریم. بنابراین ضخامت مورد استفاده در تمامی انتگرال‌گیری‌ها متناظر با یک رادیان است، این بدان معنی است که ضخامت در یک نقطه انتگرال‌گیری مساوی شعاع در آن نقطه می‌باشد:

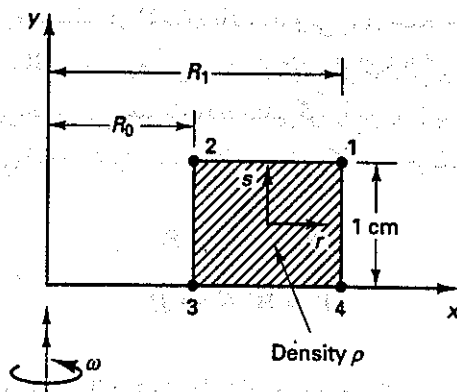
$$t_{ij} = \sum_{k=1}^4 h_k \bigg|_{r_i, s_j} x_k \quad (\text{الف})$$

ثانیاً ملاحظه می‌شود که در این حالت کرنش‌ها و تنش‌های محیطی نیز ایجاد می‌گردند (ر.ک. به: جدول ۴.۲). بنابراین یک سطر را باید به ماتریس کرنش - تغییر مکان برای کرنش حلقوی u/R افزود، به عبارت دیگر داریم:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{h_1}{t} & 0 & \frac{h_2}{t} & 0 & \frac{h_3}{t} & 0 & \frac{h_4}{t} & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

که در آن سه سطر نخست پیشتر در مثال ۵.۵ تعریف شده‌اند و t مساوی شعاع است. برای به دست آوردن ماتریس کرنش - تغییر مکان. در یک نقطه انتگرال‌گیری (i, j) ، از (الف) برای تعیین t استفاده نموده و در (ب) جایگذاری می‌کنیم.

مثال ۵.۱۰: نیروهای نقاط گرهی عنصر محدود متقارن محدود چهار گرهی نشان داده شده در شکل ۵.۱۰ را محاسبه کنید، در صورتی که عنصر تحت اثر بارگذاری گریز از مرکز باشد.



شکل ۵.۱۰ عنصر متقارن محوری چهار گرهی که با سرعت زاویه‌ای ω (rad/sec) دوران می‌کند.

حل:

در این جا می خواهیم که R_B را با استفاده از رابطه زیر به دست آوریم:

$$R_B = \int_V H^T f^B dV$$

که در آن داریم:

$$f_x^B = \rho \omega^2 R; \quad f_y^B = 0$$

$$R = \frac{1}{2}(1-r)R_0 + \frac{1}{2}(1+r)R_1$$

$$H = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 \end{bmatrix}; \quad J = \begin{bmatrix} \frac{R_1 - R_0}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

و توابع h_i در شکل ۵.۴ تعریف شده اند. همچنین با در نظر گرفتن یک رادیان داریم:

$$dV = \det J \, dr \, ds \, R = \left(\frac{R_1 - R_0}{4} \right) dr \, ds \left(\frac{R_1 + R_0}{2} + \frac{R_1 - R_0}{2} r \right)$$

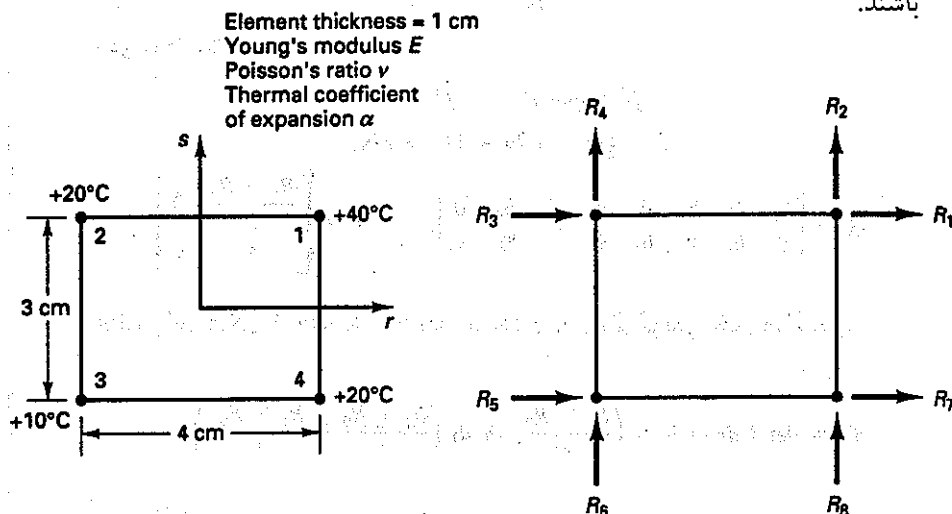
بنابراین داریم:

$$R_B = \frac{\rho \omega^2 (R_1 - R_0)}{64} \int_{r=-1}^{+1} \int_{s=-1}^{+1} \begin{bmatrix} (1+r)(1+s) & 0 \\ 0 & (1+r)(1+s) \\ (1-r)(1+s) & 0 \\ 0 & (1-r)(1+s) \\ (1-r)(1-s) & 0 \\ 0 & (1-r)(1-s) \\ (1+r)(1-s) & 0 \\ 0 & (1+r)(1-s) \end{bmatrix} [(R_1 + R_0) + (R_1 - R_0)r]^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} dr \, ds$$

اگر فرض کنیم که $A = R_1 + R_0$ و $B = R_1 - R_0$ ، در این صورت داریم:

$$R_B = \frac{\rho \omega^2 B}{64} \begin{bmatrix} \frac{2}{3}(6A^2 + 4AB + 2B^2) \\ 0 \\ \frac{2}{3}(6A^2 - 4AB + 2B^2) \\ 0 \\ \frac{2}{3}(6A^2 - 4AB + 2B^2) \\ 0 \\ \frac{2}{3}(6A^2 + 4AB + 2B^2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

مثال ۵.۱۱: عنصر تنش مسطح چهار گرهی نشان داده شده در شکل ۵.۱۱ E تحت اثر توزیع دمای معلومی قرار دارد. اگر θ_0 دمای متناسب با حالت بدون تنش باشد، در این صورت نیروهای نقاط گرهی وارد بر عنصر را به گونه‌ای تعیین کنید که تغییر مکان‌های نقاط گرهی صفر باشند.



شکل ۵.۱۱ نیروهای نقاط گرهی ناشی از توزیع دمای اولیه

حل:

در این حالت، تنش‌های کلی ناشی از کرنش‌های کلی ϵ و کرنش‌های حرارتی ϵ^{th} به صورت زیر می‌باشند:

$$\tau = C(\epsilon - \epsilon^{th}) \quad (\text{الف})$$

که در آن $\epsilon_{xx}^{th} = \alpha(\theta - \theta_0)$ و $\epsilon_{yy}^{th} = \alpha(\theta - \theta_0)$ و $\gamma_{xy}^{th} = 0$. اگر تغییر مکان‌های نقاط گرهی صفر باشند، داریم: $\epsilon = 0$ و تنش‌های ناشی از کرنش‌های حرارتی را می‌توان به عنوان تنش‌های اولیه تلقی نمود. بنابراین نیروهای نقاط گرهی عبارتند از:

$$R_i = \int_V B^T \tau' dV$$

$$\tau' = -\frac{E\alpha}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \left\{ \left(\sum_{i=1}^4 h_i \theta_i \right) - \theta_0 \right\}$$

و توابع h_i ، توابع درونیابی تعریف شده در شکل ۵.۴ می‌باشند. همچنین داریم:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1.5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}; \quad \det \mathbf{J} = 3$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1+s}{8} & 0 & -\frac{1+s}{8} & 0 & -\frac{1-s}{8} & 0 & \frac{1-s}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1+r}{6} & 0 & \frac{1-r}{6} & 0 & -\frac{1-r}{6} & 0 & -\frac{1+r}{6} \\ \frac{1+r}{6} & \frac{1+s}{8} & \frac{1-r}{6} & -\frac{1+s}{8} & -\frac{1-r}{6} & -\frac{1-s}{8} & -\frac{1+r}{6} & \frac{1-s}{8} \end{bmatrix}$$

بنابراین داریم:

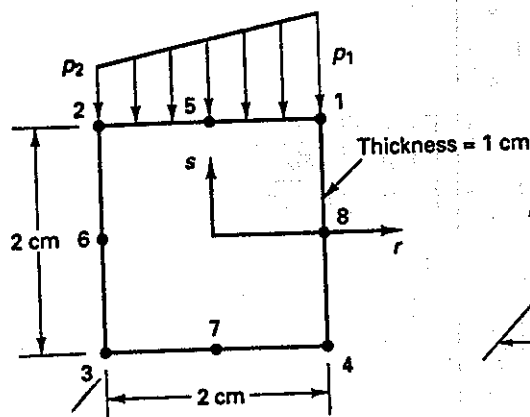
$$\mathbf{R}_I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} - \begin{bmatrix} \frac{1+s}{8} & 0 & \frac{1+r}{6} \\ 0 & \frac{1+r}{6} & \frac{1+s}{8} \\ -\frac{1+s}{8} & 0 & \frac{1-r}{6} \\ 0 & \frac{1-r}{6} & -\frac{1+s}{8} \\ -\frac{1-s}{8} & 0 & -\frac{1-r}{6} \\ 0 & -\frac{1-r}{6} & -\frac{1-s}{8} \\ \frac{1-s}{8} & 0 & -\frac{1+r}{6} \\ 0 & -\frac{1+r}{6} & \frac{1-s}{8} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+\nu \\ 1+\nu \\ 0 \end{bmatrix} \frac{E\alpha}{1-\nu^2}$$

$$[2.5(s+3)(r+3) - \theta_0] 3 \, dr \, ds$$

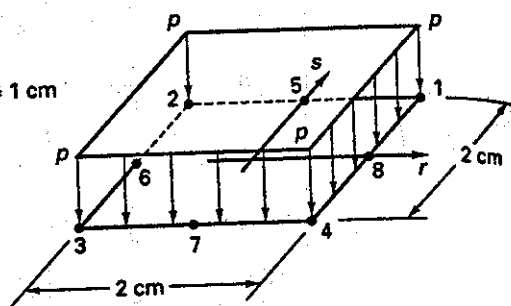
$$\mathbf{R}_I = -\frac{E\alpha}{(1-\nu)} \begin{bmatrix} 37.5 - 1.5\theta_0 \\ 50 - 2\theta_0 \\ -37.5 + 1.5\theta_0 \\ 40 - 2\theta_0 \\ -30 + 1.5\theta_0 \\ -40 + 2\theta_0 \\ +30 - 1.5\theta_0 \\ -50 + 2\theta_0 \end{bmatrix}$$

محاسبه بردار نیروهای ناشی از تنش‌های اولیه، بگونه‌ای که در این مثال انجام گردید، یک مرحله اساسی در تحلیل تنش حرارتی می‌باشد. در یک تحلیل تنش حرارتی، دماها همان‌طور که در بخش ۷.۲ توصیف خواهد گردید، محاسبه می‌شوند و بردارهای بار ناشی از اثرات حرارتی بگونه‌ای که در این مثال نشان داده شد، تعیین می‌گردند و سپس از حل معادلات تعادل (۴.۱۷) مربوط به مجموعه کامل همبسته عناصر، تغییر مکان‌های نقاط گرهی حاصل می‌شوند. کرنش‌های کلی ϵ از تغییر مکان‌های نقاط گرهی بدست می‌آیند و سپس با استفاده از (الف) تنش‌های نهایی عنصر محاسبه می‌گردند.

مثال ۵.۱۲: عناصر نشان داده شده در شکل ۵.۱۲ E را در نظر بگیرید. نیروهای نقاط گرهی سازگار متناظر با بارگذاری سطحی را تعیین کنید (با این فرض که نیروهای نقاط گرهی هنگامی مثبت می‌باشند که در جهت فشار عمل کنند).



(الف) عنصر دوبعدی که تحت اثر فشار متغیر خطی در امتداد یک ضلع قرار دارد.



(ب) سطح تخت عنصر سه‌بعدی که تحت اثر فشار ثابت P قرار دارد.

شکل ۵.۱۲ E عناصر دوبعدی و سه‌بعدی تحت اثر بارگذاری فشاری

حل:

در این جا می‌خواهیم که R_s را با استفاده از رابطه زیر تعیین کنیم:

$$R_s = \int_s H^s \mathbf{f}^s dS$$

نخست عنصر دوبعدی را در نظر می گیریم. از آنجا که در لبه ۱-۲، $s = +1$ می باشد، با استفاده از توابع درونیابی برای عنصر هشت گرهی داریم (ر.ک. به: شکل ۵.۴):

$$h_3 = \frac{1}{2}(1 - r^2)(1 + s)|_{s=+1} = 1 - r^2$$

$$h_1 = \frac{1}{4}(1 + r)(1 + s)(r + s - 1)|_{s=+1} = \frac{1}{2}r(1 + r)$$

$$h_2 = \frac{1}{4}(1 - r)(1 + s)(s - r - 1)|_{s=+1} = -\frac{1}{2}r(1 - r)$$

که مساوی با توابع درونیابی میله سه گرهی نشان داده شده در شکل ۵.۲ E می باشند. بنابراین داریم:

$$\begin{bmatrix} u^s \\ v^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}r(1+r) & 0 & -\frac{1}{2}r(1-r) & 0 & (1-r^2) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}r(1+r) & 0 & -\frac{1}{2}r(1-r) & 0 & (1-r^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

همچنین داریم:

$$f^s = \begin{bmatrix} f_r^s \\ f_s^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2}(1+r)p_1 + \frac{1}{2}(1-r)p_2 \end{bmatrix}; \quad \det J^s = 1$$

بنابراین:

$$R_s = \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} r(1+r) & 0 \\ 0 & r(1+r) \\ -r(1-r) & 0 \\ 0 & -r(1-r) \\ 2(1-r^2) & 0 \\ 0 & 2(1-r^2) \end{bmatrix} \frac{1}{2} \left[(1+r)p_1 + (1-r)p_2 \right] dr$$

$$R_s = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ p_1 \\ 0 \\ p_2 \\ 0 \\ 2(p_1 + p_2) \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

برای عنصر سه بعدی نیز طریقه مشابهی را اختیار می کنیم. چون سطحی که بار به آن وارد می شود، تخت بوده و بارگذاری، عمود بر آن می باشد، در نتیجه تنها نیروهای نقاط گرهی عمود

بر سطح، غیرصفر هستند [ر.ک. به: (الف)]. همچنین با استفاده از تقارن می‌دانیم که نیروها در نقاط ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و نقاط ۵ و ۶ و ۷ و ۸ به ترتیب با همدیگر مساوی هستند. با استفاده از توابع درونیابی شکل ۵.۴، برای محاسبه نیرو در گره ۱ داریم:

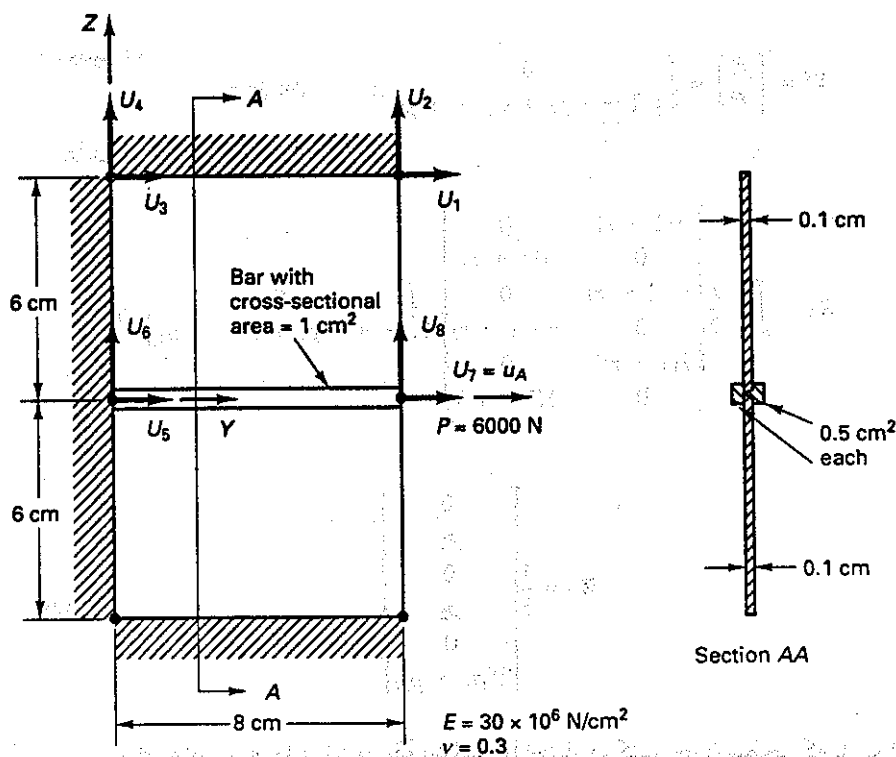
$$R_1 = p \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{4} (1+r)(1+s)(r+s-1) dr ds = -\frac{1}{3} p$$

و برای تعیین نیرو در گره ۵ داریم:

$$R_5 = p \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \frac{1}{2} (1-r^2)(1+s) dr ds = \frac{4}{3} p$$

کل بارگذاری فشاری در سطح $4p$ است که اگر کنترل کنیم مشاهده می‌نماییم که برابر مجموع نیروهای نقاط گرهی است. با وجود این، باید دانست که، نیروهای نقاط گرهی سازگار در گوشه‌های عنصر در جهت مخالف فشار عمل می‌کنند.

مثال ۵.۱۳: تغییر مکان u_A مدل سازه‌ای نشان داده شده در شکل ۵.۱۳ را محاسبه نمایید.



یک مدل ساده سازه‌ای E.۵.۱۳ در صورت شکل ۵.۱۳

حل:

به علت تقارن و شرایط مرزی، ضروری است که تنها ضریب سختی متناظر با u_A تعیین گردد. در این جا برای عنصر چهار گرهی داریم:

$$J = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; \quad B = \frac{1}{48} \begin{bmatrix} \dots & 3(1-s) & \dots \\ \dots & 0 & \dots \\ \dots & -4(1+r) & \dots \end{bmatrix}$$

$$k_{77} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left(\frac{1}{48} \right)^2 \frac{E}{1-\nu^2} [3(1-s) \mid 0 \mid -4(1+r)] \begin{bmatrix} 3(1-s) \\ 3\nu(1-s) \\ -2(1-\nu)(1+r) \end{bmatrix} dr ds \quad (12)(0.1)$$

$$k_{77} = 1,336,996.34 \text{ N/cm}$$

یا

همچنین سختی خریا AE/L است و یا:

$$k = \frac{(1)(30 \times 10^6)}{8} = 3,750,000 \text{ N/cm}$$

بنابراین داریم:

$$k_{\text{total}} = 6.424 \times 10^6 \text{ N/cm}$$

و

$$u_A = 9.34 \times 10^{-4} \text{ cm}$$

مثال ۵.۱۴: عنصر پنج گرهی نشان داده شده در شکل ۵.۱۴ را در نظر بگیرید. نیروهای سازگار نقاط گرهی متناظر با تنش های داده شده را تعیین کنید.

حل:

با استفاده از توابع درون یابی ارائه شده در شکل ۵.۴، می توان ماتریس کرنش - تغییر مکان عنصر را تعیین نمود:

$$B = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} (1+s) & 0 & -s(1+s) & 0 & s(1-s) \\ 0 & 2(1+r) & 0 & 2(1-r)(1+2s) & 0 \\ 2(1+r) & (1+s) & 2(1-r)(1+2s) & -s(1+s) & -2(1-r)(1-2s) \\ 0 & (1-s) & 0 & -2(1-s^2) & 0 \\ -2(1-r)(1-2s) & 0 & -2(1+r) & 0 & -8(1-r)s \\ s(1-s) & -2(1+r) & (1-s) & -8(1-r)s & -2(1-s^2) \end{bmatrix}$$

که در آن از عملگر ژاکوبی زیر استفاده کردیم:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

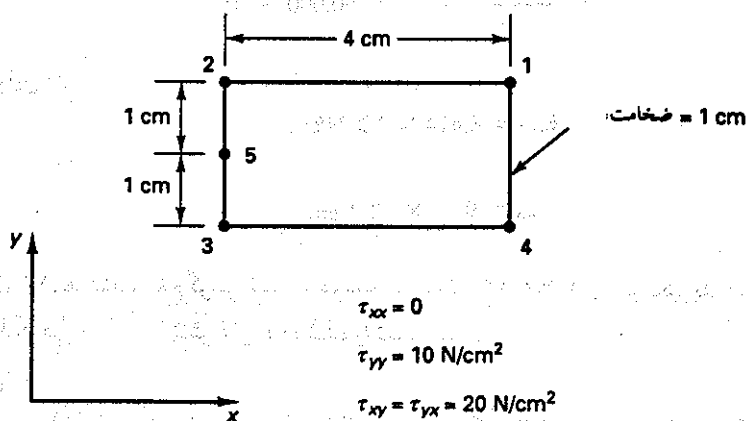
حال نیروهای نقاط گرهی مورد نیاز را می‌توان با استفاده از (۵.۳۵) تعیین نمود؛ از اینرو داریم:

$$\mathbf{R}_i = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{B}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 10 \\ 20 \end{bmatrix} (2) dr ds$$

که نتیجه زیر را به دست می‌دهد:

$$\mathbf{R}_i^T = [40 \quad 40 \quad 40 \quad \frac{40}{3} \quad -40 \quad -\frac{80}{3} \quad -40 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{80}{3}]$$

باید دانست که نیروهای موجود در این بردار همچنین با نیروهای سازگار نقاط گرهی مساوی‌اند. نیروهای سازگار مزبور متناظر با نیروهای سطحی (ثابت) می‌باشند که با تنش‌های داخلی داده شده در شکل E ۵.۱۴ در تعادل‌اند.



شکل E ۵.۱۴ عنصر پنج گرهی با تنش‌های داده شده

پیش از این به اختصار به امکان استفاده از عناصر زیر پارامتری اشاره نمودیم. در این حالت هندسه عنصر با درجه پایین‌تر از درجه تغییر مکان‌ها درونیابی می‌شود. در مثال‌های بالا، گره‌های مربوط به توابع درونیابی از مرتبه بالاتر (گره‌های ۵ و بیشتر برای عناصر دوبعدی) همواره در موقعیت‌های «طبیعی» خود قرار داشتند، به گونه‌ای که اگر برای درونیابی هندسه عنصر تنها توابع «بنیادی» از مرتبه پایین‌تر مورد استفاده قرار می‌گرفتند، در این صورت ماتریس

ژاکوبی مشابهی به دست می‌آید. بنابراین در حالت عنصر دوبعدی زیر پارامتری هنگامی که تنها از چهار گره گوشه برای درونیابی هندسهٔ عنصر استفاده می‌شود، ماتریس‌های مشابه حالت عنصر تک‌پارامتری به دست می‌آیند. به عنوان مثال در مثال ۵.۱۴ اگر تنها از توابع بنیادی درونیابی چهار گرهی استفاده می‌کردیم ماتریس ژاکوبی J مشابهی به دست می‌آمد، از اینرو بردار R_T برای عنصر زیر پارامتری (با استفاده از چهار گره گوشه برای درونیابی هندسه و پنج گره برای درونیابی تغییر مکان) مشابه برداری خواهد بود که برای عنصر پنج‌گرهی تک‌پارامتری حاصل شده است.

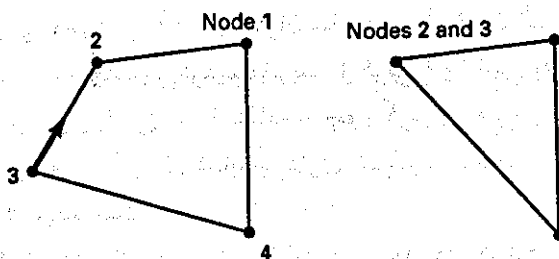
در حالی که استفاده از عناصر زیر پارامتری تا حدودی کوشش مورد نیاز محاسباتی را کاهش می‌دهد، با وجود این کاربرد آن عناصر عمومیّت گسسته‌سازی عناصر محدود را کمتر کرده و نیز در تحلیل غیرخطی هندسی، روش‌های حل را به طور قابل توجهی پیچیده می‌کند (که در آن هندسهٔ جدید عنصر از طریق افزودن تغییر مکان‌ها به هندسهٔ پیشین به دست می‌آید، ر.ک. به: فصل ششم).

۵.۳.۲ عناصر مثلثی

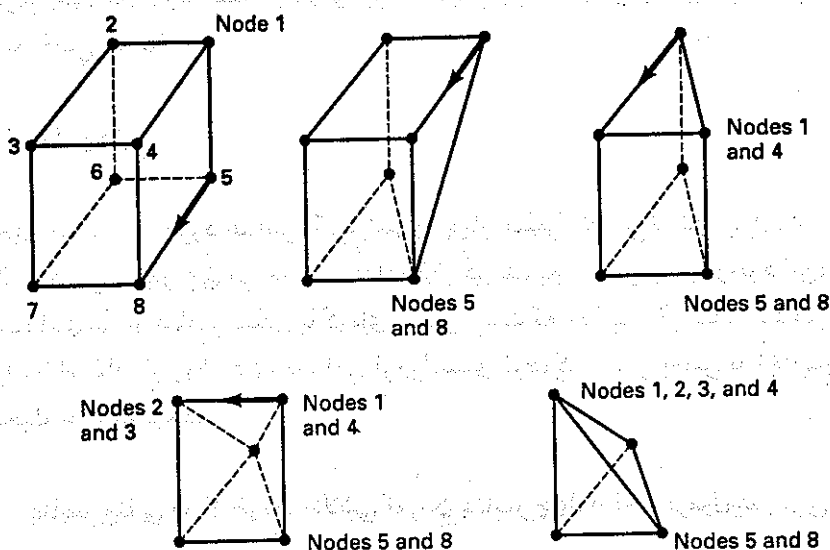
در بخش پیشین، در مورد عناصر تک‌پارامتری چهار ضلعی که می‌توانند برای مدل نمودن اشکال هندسی بسیار عمومی مورد استفاده قرار گیرند، بحث نمودیم. با وجود این، در برخی حالات، استفاده از عناصر مثلثی یا گوه‌ای ممکن است که جلب نظر کند. عناصر مثلثی را می‌توان با استفاده از روش‌های مختلفی فرمول‌بندی کرد، که در این بخش به اختصار در مورد آنها بحث خواهیم نمود.

عناصر مثلثی که از طریق تلاشی نمودن عناصر چهارضلعی فرمول‌بندی می‌شوند.

از آنجا که عناصر مورد بحث در بخش ۵.۳.۱، همانگونه که به عنوان مثال در شکل ۵.۲ نشان داده شد، می‌توانند دارای اعوجاج باشند، از اینرو به نظر می‌رسد که یک طریقهٔ طبیعی ایجاد عناصر مثلثی، اعوجاج‌دار نمودن عنصر چهارضلعی بنیادی برای ایجاد شکل مثلثی مورد نیاز باشد (ر.ک. به: شکل ۵.۷). در عمل نیل به هدف مذکور از طریق اختصاص دادن یک گره مشابه در مختصات کلی، به دو گره گوشه عنصر حاصل می‌گردد. این روش را در مثال زیر نشان می‌دهیم.



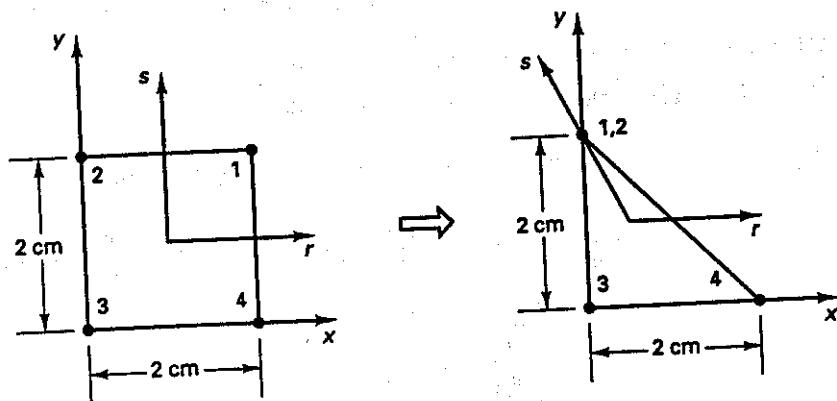
(الف) "متلاشی نمودن عنصر دوبعدی چهارگره‌ی برای
ایجاد عنصر سه‌گره‌ی"



(ب) متلاشی نمودن فرم‌های عنصر سه‌بعدی هشت‌گره‌ی

شکل ۵.۷ متلاشی نمودن فرم‌های عناصر چهارگره‌ی و هشت‌گره‌ی نشان داده شده در شکل‌های ۵.۴ و ۵.۵.

مثال ۵.۱۵: نشان دهید که از متلاشی نمودن ضلع ۱-۲ عنصر چهارضلعی چهارگره‌ی نشان داده شده در شکل ۵.۱۵ E یک عنصر مثلثی با کرنش ثابت به دست می‌آید.



شکل ۵.۱۵ متلاشی نمودن یک عنصر چهار گرهی تنش مسطح برای ایجاد یک عنصر مثلثی

حل:

با استفاده از توابع درون یابی شکل ۵.۴، داریم:

$$x = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)x_1 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)x_2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)x_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)x_4$$

$$y = \frac{1}{4}(1+r)(1+s)y_1 + \frac{1}{4}(1-r)(1+s)y_2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)y_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)y_4$$

بنابراین با استفاده از شرایط $x_1 = x_2$ و $y_1 = y_2$ نتیجه زیر حاصل می گردد:

$$x = \frac{1}{2}(1+s)x_2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)x_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)x_4$$

$$y = \frac{1}{2}(1+s)y_2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)y_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)y_4$$

از اینرو با مختصات گرهی داده شده در شکل ۵.۱۵ داریم:

$$x = \frac{1}{2}(1+r)(1-s)$$

$$y = 1+s$$

نتیجه می شود که:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \frac{1}{2}(1-s) \quad \frac{\partial y}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = -\frac{1}{2}(1+r) \quad \frac{\partial y}{\partial s} = 1$$

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (1-s) & 0 \\ -(1+r) & 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{1-s} & 0 \\ \frac{1+r}{1-s} & 1 \end{bmatrix}$$

با استفاده از فرض تک پارامتری، همچنین داریم:

$$u = \frac{1}{2}(1+s)u_2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)u_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)u_4$$

$$v = \frac{1}{2}(1+s)v_2 + \frac{1}{4}(1-r)(1-s)v_3 + \frac{1}{4}(1+r)(1-s)v_4$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{4}(1-s)u_3 + \frac{1}{4}(1-s)u_4; \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{4}(1-s)v_3 + \frac{1}{4}(1-s)v_4$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{1}{2}u_2 - \frac{1}{4}(1-r)u_3 - \frac{1}{4}(1+r)u_4; \quad \frac{\partial v}{\partial s} = \frac{1}{2}v_2 - \frac{1}{4}(1-r)v_3 - \frac{1}{4}(1+r)v_4$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \end{bmatrix}$$

بنابراین داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{1-s} & 0 \\ \frac{1+r}{1-s} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{4}(1-s) & 0 & \frac{1}{4}(1-s) & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4}(1-r) & 0 & -\frac{1}{4}(1+r) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

به طور مشابه داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

در این صورت نتیجه زیر حاصل می‌گردد:

$$\mathbf{\epsilon} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{bmatrix}$$

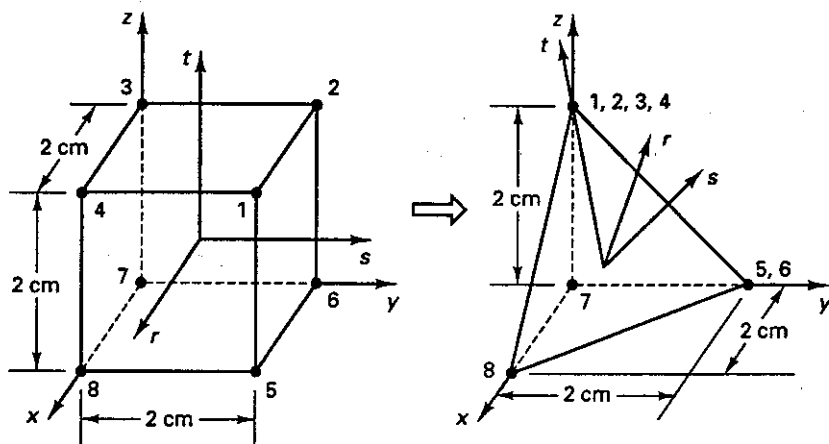
به‌ازای کلیه مقادیر u_2, v_2, u_3, v_3 و نیز مقادیر u_4, v_4 بردار کرنش ثابت بوده و مستقل از r و s است. بنابراین عنصر مثلثی یک مثلث کرنش ثابت می‌باشد.

در مثال پیشین تنها یک حالت خاص را در نظر گرفتیم. با وجود این با استفاده از روشی مشابه به نظر می‌رسد که تلاشی نمودن هر ضلعی از عنصر تنش مسطح چهارضلعی یا عنصر کرنش مسطح چهارضلعی همواره موجب ایجاد یک مثلث کرنش ثابت خواهد شد.

اگر فرایند تلاشی نمودن یک ضلع عنصر را در نظر بگیریم، جالب توجه است که در فرمول‌بندی مورد استفاده در مثال ۵.۱۵، ماتریس J در $s = +1$ تکین بود، ولی هنگامی که ماتریس کرنش - تغییر مکان محاسبه می‌شود این حالت تکینی ناپدید می‌گردد. نتیجه عملی نکته مذکور این است که اگر در یک برنامه کامپیوتری، فرمول‌بندی عمومی عنصر چهارگره‌ای برای ایجاد یک مثلث کرنش ثابت به کار گرفته شود (مانند مثال ۵.۱۵)، در این صورت تنش‌ها نباید در دو گره محلی که به آنها یک گره در مختصات کلی اختصاص داده شده است، محاسبه شوند. (از آنجا که تنش‌ها در سرتاسر عنصر ثابت‌اند، به آسانی در مرکز عنصر، یعنی در $r = 0$ و $s = 0$ تعیین می‌گردند).

روش مشابهی را نیز می‌توان در تحلیل سه بعدی برای به دست آوردن عناصر گوه‌ای یا چهار وجهی از عنصر بنیادی هشت گره‌ای به کار برد. این روش در شکل ۵.۷ و مثال زیر نشان داده می‌شود.

مثال ۵.۱۶: نشان دهید که عنصر چهار وجهی سه بعدی ایجاد شده در شکل ۵.۱۶ از یک عنصر آجری سه بعدی هشت گره‌ای، یک عنصر کرنش ثابت می‌باشد.



شکل ۵.۱۶ E تلاشی نمودن یک عنصر آجری هشت گره‌ای برای ایجاد یک عنصر چهاروجهی

حل:

در این جا نیز مانند مثال ۵.۱۵ عمل می‌کنیم. بنابراین با استفاده از توابع درونیابی عنصر
آجری (ر.ک. به: شکل ۵.۵) و جایگذاری مختصات نقاط گرهی چهاروجهی نتایج زیر حاصل
می‌شوند:

$$x = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)(1-t)$$

$$y = \frac{1}{2}(1+s)(1-t)$$

$$z = 1+t$$

بنابراین داریم:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}(1-s)(1-t) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{4}(1+r)(1-t) & \frac{1}{2}(1-t) & 0 \\ -\frac{1}{4}(1+r)(1-s) & -\frac{1}{2}(1+s) & 1 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{(1-s)(1-t)} & 0 & 0 \\ \frac{2(1+r)}{(1-s)(1-t)} & \frac{2}{1-t} & 0 \\ \frac{2(1+r)}{(1-s)(1-t)} & \frac{1+s}{1-t} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

با استفاده از توابع درونیابی یکسانی برای u و با داشتن شرایط $u_1 = u_2 = u_3 = u_4$ و
 $u_5 = u_6$ ، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$u = h_4^* u_4 + h_5^* u_5 + h_7^* u_7 + h_8^* u_8$$

با:

$$h_4^* = \frac{1}{2}(1+t); \quad h_5^* = \frac{1}{4}(1+s)(1-t);$$

$$h_7^* = \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t); \quad h_8^* = \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t)$$

به طور مشابه، همچنین داریم:

$$v = h_4^* v_4 + h_5^* v_5 + h_7^* v_7 + h_8^* v_8$$

$$w = h_4^* w_4 + h_5^* w_5 + h_7^* w_7 + h_8^* w_8$$

حال با تعیین مشتقات تغییر مکان‌های u و v و نسبت به r و s و t و با استفاده از \mathbf{J}^{-1} در (الف)،
نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_4 \\ v_4 \\ w_4 \\ \text{---} \\ u_5 \\ v_5 \\ w_5 \\ \text{---} \\ u_7 \\ v_7 \\ w_7 \\ \text{---} \\ u_8 \\ v_8 \\ w_8 \end{bmatrix}$$

بنابراین، کرنش‌ها به ازای هر تغییر مکان نقاط گرهی ثابت می‌باشند و این بدان معنی است که عنصر مذکور تنها می‌تواند نمایشگر شرایط کرنش ثابت باشد.

فرایند متلاشی نمودن یک ضلع عنصر، یا چند عنصر در یک تحلیل سه بعدی ممکن است که مستقیماً موجب ایجاد یک عنصر مطلوب شود، ولی هنگامی که عناصر دوبعدی یا سه بعدی از مرتبه بالاتر به کار می‌روند، در نظر گرفتن برخی ملاحظات خاص در ارتباط با توابع درونیابی مورد استفاده ممکن است ضروری باشد. بویژه، هنگامی که عناصر از مرتبه پایین‌تر، که در شکل ۵.۷ نمایش داده شدند، به کار گرفته می‌شوند، عناصر مثلثی ایزوتروپیک فضایی یا عناصر گوه‌ای به طور خودکار ایجاد می‌گردند، ولی این حالت ضرورتاً در هنگام استفاده از عناصر از مرتبه بالاتر پیش نمی‌آید.

به عنوان مثال، عنصر دوبعدی مثلثی شش گرهی را که از طریق متلاشی نمودن یک ضلع عنصر هشت گرهی حاصل شده است بگونه‌ای که در شکل ۵.۸ نشان داده شده است در نظر می‌گیریم. اگر عنصر مثلثی دارای اضلاع مساوی باشد، در این صورت ممکن است بخواهیم که عنصر به طور فضایی ایزوتروپیک باشد، به عبارت دیگر، شاید بخواهیم که تغییر مکان‌های داخلی عنصر u و v به ترتیب برای هر تغییر مکان نقاط گرهی گوشه‌ای و هر تغییر مکان نقاط گرهی میانی اضلاع به طور یکسان تغییر کنند. با وجود این، توابع درونیابی ایجاد شده برای عنصر مثلثی، در هنگام متلاشی نمودن ضلع ۵-۲-۱ عنصر مربعی، این شرط را که بتوانیم شماره‌گذاری رئوس مثلث را بدون اعمال تغییری در فرض‌های تغییر مکان تغییر دهیم، برآورده نمی‌سازد. برای تأمین این شرط، تصحیح‌هایی باید در توابع درونیابی گره‌های ۳ و ۴ و ۷ به

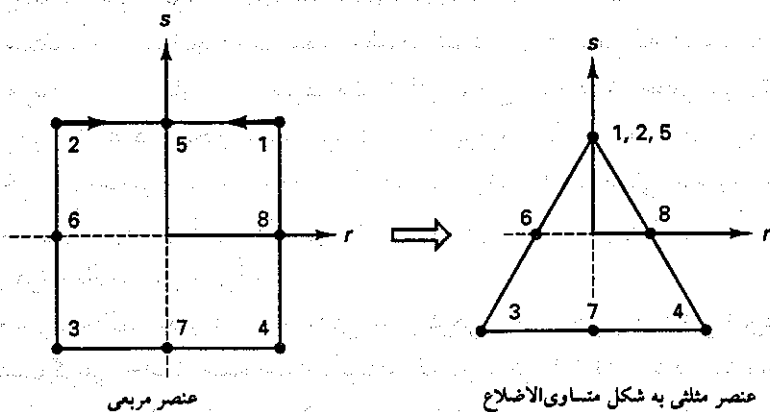
عمل آیند تا توابع درونیابی نهایی h_i^* عنصر مثلثی به صورت زیر به دست آیند (ر.ک. به: تمرین ۵.۲۵):

$$\begin{aligned} h_1^* &= \frac{1}{2}(1+s) - \frac{1}{2}(1-s^2) \\ h_3^* &= \frac{1}{4}(1-r)(1-s) - \frac{1}{4}(1-s^2)(1-r) - \frac{1}{4}(1-r^2)(1-s) + \Delta h \\ h_4^* &= \frac{1}{4}(1+r)(1-s) - \frac{1}{4}(1-r^2)(1-s) - \frac{1}{4}(1-s^2)(1+r) + \Delta h \\ h_6^* &= \frac{1}{2}(1-s^2)(1-r) \\ h_7^* &= \frac{1}{2}(1-r^2)(1-s) - 2\Delta h \\ h_8^* &= \frac{1}{2}(1-s^2)(1+r) \end{aligned} \quad (5.36)$$

که در آن، تصحیحات را به توابع ارائه شده در شکل ۵.۴ اعمال نموده‌ایم و Δh عبارت است از:

$$\Delta h = \frac{(1-r^2)(1-s^2)}{8} \quad (5.37)$$

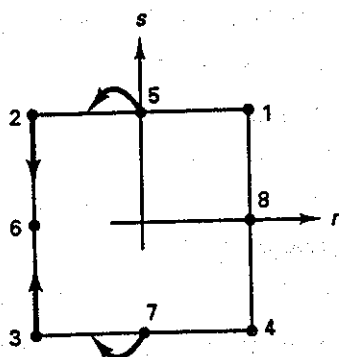
بنابراین برای ایجاد عناصر مثلثی از مرتبه بالاتر به وسیلهٔ متلاشی نمودن اضلاع عناصر مربعی، شاید تصحیح توابع درونیابی مورد استفاده ضروری باشد.



شکل ۵.۸ متلاشی نمودن یک عنصر هشت گرهی برای ایجاد یک عنصر مثلثی شش گرهی

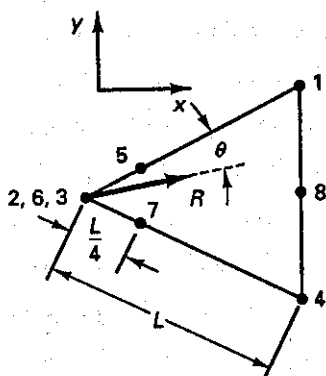
عناصر مثلثی در مکانیک شکست

در ملاحظات پیشین، فرض نمودیم که یک عنصر ایزوتروپیک فضایی مطلوب است، زیرا این عنصر در یک مجموعهٔ همبستهٔ عناصر محدود به کار می‌رود که برای پیش‌بینی میدان تنش



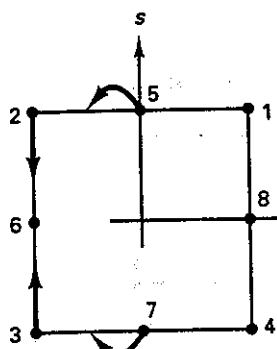
فضای طبیعی

گره‌های ۵ و ۷ را به نقاط
یک‌چهارم تغییر وضعیت
دهید، ضلع ۲-۶-۳ را
متلاشی کنید تا یک گره
ایجاد شود



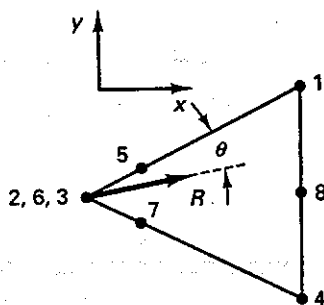
فضای فیزیکی واقعی

(الف) عنصر مثلثی با نقاط یک‌چهارم و با تکیه کرنشی $1/\sqrt{R}$ در گره (۲-۶-۳)



فضای طبیعی

گره‌های ۵ و ۷ را به نقاط
یک‌چهارم تغییر
وضعیت دهید، ضلع
۲-۶-۳ را متلاشی کنید
ولی سه گره ۲ و ۶ و ۳ را
حفظ نمایید



فضای فیزیکی واقعی

(ب) عنصر مثلثی با نقاط یک‌چهارم و با تکیه‌های $1/R$ و $1/\sqrt{R}$ در گره‌های ۲ و ۶ و ۳

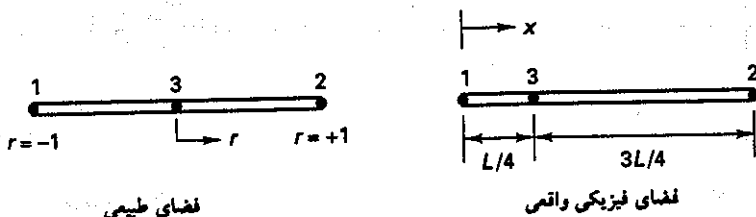
شکل ۵.۹ عناصر تک پارامتری اعوجاج‌دار دوبعدی (با نقطه یک‌چهارم) که در مکانیک شکست سودمند می‌باشند. تکیه‌های کرنش در درون هر عنصر به ازای هر زاویه θ وجود دارند. [توجه شود که در (الف) یک گره (۲-۶-۳)، دارای دو درجه آزادی است و در (ب) گره (۲ و ۶ و ۳) هر کدام دارای دو درجه آزادی می‌باشند.]

تقریباً همگن مورد استفاده قرار می‌گیرد. با وجود این در برخی حالات، تغییرات تنش بسیار خاصی باید پیش‌بینی گردند و در چنان تحلیل‌هایی یک عنصر غیرایزوتروپیک فضایی ممکن است که مؤثرتر باشد. مکانیک شکست حوزه‌ای از تحلیل است که در آن عناصر

غیرایزوتروپیک فضایی به کار می‌روند، در این حوزه مشخص است که تکینگی‌های خاص تنش در لبه‌های ترک وجود دارند و برای محاسبه فاکتورهای شدت تنش یا بارهای حدی، استفاده از عناصر محدودی که شامل تکینگی‌های تنش مورد نیاز باشند می‌تواند مؤثر باشد. عناصر متنوعی از این نوع طراحی شده‌اند، اما عناصر بسیار ساده و جالبی را می‌توان از طریق اعوجاج‌دار کردن عناصر تک پارامتری از مرتبه بالاتر به دست آورد (ر.ک. به: R. S. Barsoum [A, B] و R. D. Henshell and K. G. Shaw [A]).

۵.۹ دو عنصر تک پارامتری دوبعدی را نشان می‌دهد که با موفقیت کامل در مکانیک شکست خطی و غیرخطی به کار برده شده‌اند، زیرا آنها به ترتیب شامل تکینگی‌های کرنش $1/\sqrt{r}$ و $1/\sqrt{R}$ می‌باشند. ذکر این نکته لازم است که این عناصر دارای توابع درونیابی مشخص شده در (۵.۳۶) می‌باشند، ولی در آنها $\Delta h = 0$ است. همچنین برای ایجاد تکینگی‌های مورد نیاز می‌توان از روش‌های ارائه شده تغییر جای گرهی و متلاشی نمودن اضلاع، با عناصر سه بعدی از مرتبه بالاتر استفاده نمود. در مثال زیر، روش تغییر جای گرهی را برای ایجاد یک تکینگی کرنش نشان خواهیم داد:

مثال ۵.۱۷: عنصر خربایی سه گرهی را در شکل ۵.۱۷ E در نظر بگیرید. نشان دهید هنگامی که گره ۳ به نقطه یک چهارم تغییر وضعیت می‌دهد، کرنش دارای یک تکینگی $1/\sqrt{x}$ در گره ۱ است.



شکل ۵.۱۷ E عنصر یک بعدی با نقطه یک چهارم

حل:

پیشتر یک عنصر خربایی سه بعدی را در مثال ۵.۲ ملاحظه نمودیم. حال اگر به همان طریق پیشین عمل کنیم، خواهیم داشت:

$$x = \frac{r}{2}(1+r)L + (1-r^2)\frac{L}{4}$$

یا

$$x = \frac{L}{4}(1+r)^2 \quad (\text{الف})$$

بنابراین داریم:

$$J = \left[\frac{L}{2} + \frac{r}{2} L \right]$$

و ماتریس کرنش - تغییر مکان عبارت است از [با استفاده از (ب) در مثال ۵.۲]:

$$B = \left[\frac{1}{L/2 + rL/2} \right] \left[\left(-\frac{1}{2} + r \right) \left(\frac{1}{2} + r \right) - 2r \right] \quad (\text{ب})$$

برای نشان دادن تکینگی $1/\sqrt{x}$ ، نیاز داریم که r را برحسب x بیان کنیم. با استفاده از (الف) داریم:

$$r = 2\sqrt{\frac{x}{L}} - 1$$

از جایگذاری این مقدار r در (ب) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$B = \left[\left(\frac{2}{L} - \frac{3}{2\sqrt{L}} \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left(\frac{2}{L} - \frac{1}{2\sqrt{L}} \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \left(\frac{2}{\sqrt{L}} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{4}{L} \right) \right]$$

بنابراین در $x = 0$ ، نقطه یک چهارم عنصر در شکل ۵.۱۷ دارای تکینگی کرنش از مرتبه $1/\sqrt{x}$ می‌باشد.

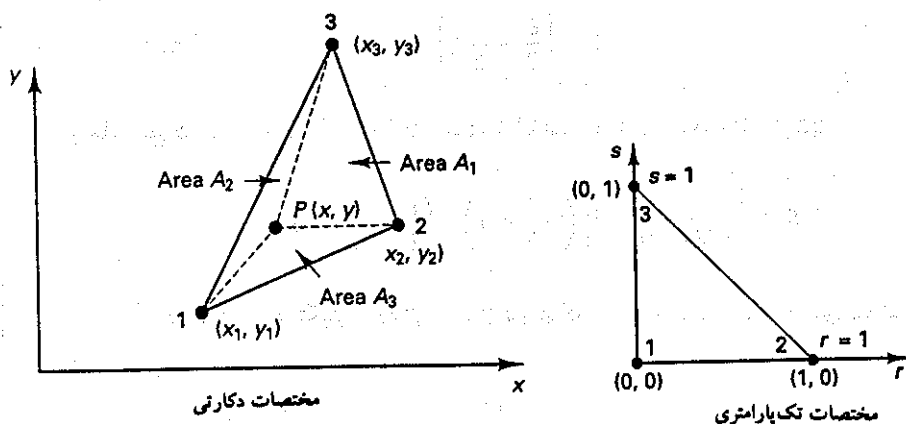
عناصر مثلثی با مختصات سطحی

اگرچه روش اعوجاج‌دار کردن یک عنصر تک پارامتری مستطیلی برای ایجاد یک عنصر مثلثی می‌تواند در برخی حالات، بگونه‌ای که در بالا گفته شد مؤثر باشد، با وجود این عناصر مثلثی (و به ویژه عناصر ایزوتروپیک فضایی) را می‌توان مستقیماً با استفاده از مختصات سطحی ایجاد نمود. برای مثلث شکل ۵.۱۰، موقعیت یک نقطه داخلی نمونه P با مختصات x و y ، به وسیله مختصات سطحی به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$L_1 = \frac{A_1}{A}; \quad L_2 = \frac{A_2}{A}; \quad L_3 = \frac{A_3}{A} \quad (۵.۳۸)$$

که در آن سطوح A_i و $i = 1, 2, 3$ در شکل تعریف شده‌اند و A مساحت کل مثلث است. بنابراین داریم:

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad (۵.۳۹)$$



شکل ۵.۱۰ توصیف یک عنصر مثلثی سه گرهی

از آنجا که کرنش‌های عنصری از طریق مشتق‌گیری نسبت به مختصات دکارتی به دست می‌آیند، از اینرو نیاز به رابطه‌ای داریم که مختصات سطحی را برحسب مختصات x و y به دست دهد. در این‌جا داریم:

$$x = L_1 x_1 + L_2 x_2 + L_3 x_3 \quad (5.40)$$

$$y = L_1 y_1 + L_2 y_2 + L_3 y_3 \quad (5.41)$$

زیرا این روابط در نقاط ۱ و ۲ و ۳ صادق است و x و y این نقاط به طور خطی تغییر می‌کنند. با استفاده از (۵.۳۹) الی (۵.۴۱) داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} \quad (5.42)$$

که نتیجه زیر را به دست می‌دهد:

$$L_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y); \quad i = 1, 2, 3$$

که در آن داریم:

$$2A = x_1 y_2 + x_2 y_3 + x_3 y_1 - y_1 x_2 - y_2 x_3 - y_3 x_1$$

$$\begin{aligned}
 a_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2; & a_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3; & a_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \\
 b_1 &= y_2 - y_3; & b_2 &= y_3 - y_1; & b_3 &= y_1 - y_2 \\
 c_1 &= x_3 - x_2; & c_2 &= x_1 - x_3; & c_3 &= x_2 - x_1
 \end{aligned} \quad (5.43)$$

همانگونه که باید انتظار داشت، این L_i ها مساوی توابع درونیابی یک مثلث کرنش ثابت می باشند. بنابراین، در یک جمع بندی، برای عنصر مثلثی سه گرهی شکل ۵.۱۰ داریم:

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{i=1}^3 h_i u_i; & x &= \sum_{i=1}^3 h_i x_i \\
 v &= \sum_{i=1}^3 h_i v_i; & y &= \sum_{i=1}^3 h_i y_i
 \end{aligned} \quad (5.44)$$

که در آن $h_i = L_i$ و $i = 1, 2, 3$ و توابع مختصات x و y می باشند. با استفاده از روابط (۵.۴۴)، انواع مختلف ماتریس های عناصر محدود (۵.۲۷) الی (۵.۳۵) را می توان مستقیماً تعیین نمود. با این حال، مانند فرمول بندی عناصر چهار ضلعی (ر.ک. به: ۵.۳.۱)، در عمل، غالباً استفاده از فضای مختصات طبیعی برای توصیف مختصات عنصر و تغییر مکان سودمند و مناسب است. با استفاده از دستگاه مختصات طبیعی که در شکل ۵.۱۰ نشان داده شده است داریم:

$$h_1 = 1 - r - s; \quad h_2 = r; \quad h_3 = s \quad (5.45)$$

و حالا تعیین ماتریس های عنصر شامل یک تبدیل ژاکوبی نیز است. همچنین تمامی انتگرال گیری ها در روی مختصات طبیعی انجام می شوند، به عبارت دیگر، انتگرال گیری های r از ۰ تا ۱ و انتگرال گیری های s نیز از ۰ الی $(1-r)$ خواهند بود.

مثال ۵.۱۸: با استفاده از دستگاه مختصات طبیعی تک پارامتری شکل ۵.۱۰ ماتریس های درونیابی تغییر مکان و کرنش - تغییر مکان یک عنصر مثلثی سه گرهی را با داشتن فرض های زیر ایجاد نمایید:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0; & x_2 &= 4; & x_3 &= 1 \\
 y_1 &= 0; & y_2 &= 0; & y_3 &= 3
 \end{aligned}$$

حل:

در این حالت با استفاده از (۵.۴۴) داریم:

$$x = 4r + s$$

$$y = 3s$$

بنابراین با استفاده از (۵.۲۳) داریم:

$$J = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$$

نتیجه می‌شود که:

$$H = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} (1-r-s) & 0 & r & 0 & s & 0 \\ 0 & (1-r-s) & 0 & r & 0 & s \end{array} \right]$$

$$B = \frac{1}{12} \left[\begin{array}{cc|cc|cc} -3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & 4 \\ -3 & -3 & -1 & 3 & 4 & 0 \end{array} \right]$$

مانند فرمول‌بندی عناصر چهارضلعی از مرتبه بالاتر، عناصر مثلثی از مرتبه بالاتر را نیز می‌توان مستقیماً فرمول‌بندی نمود. با استفاده از دستگاه مختصات طبیعی ارائه شده در شکل ۵.۱۰ که به صورت زیر درمی‌آیند:

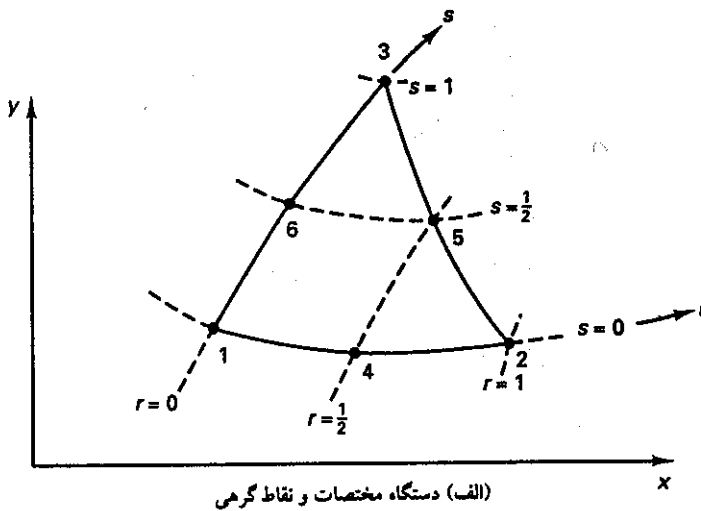
$$L_1 = 1 - r - s; \quad L_2 = r; \quad L_3 = s \quad (5.46)$$

که در آن L_i مختصات سطحی «مثلث واحد» می‌باشند، توابع درونیابی یک عنصر با تعداد متغیر ۳ الی ۶ گره در شکل ۵.۱۱ داده شده‌اند. این توابع به طریق معمول ایجاد می‌شوند، به عنوان مثال، h_i در گره i باید واحد بوده و در سایر گره‌ها مساوی صفر باشد (ر.ک. به مثال (۵.۱) (۲)). توابع درونیابی عناصر مثلثی از مرتبه باز هم بالاتر نیز به طریقه مشابهی به دست می‌آیند. در این صورت «تابع حباب درجه سومی» $L_1 L_2 L_3$ نیز به کار می‌رود.

حال با استفاده از این روش، می‌توان مستقیماً توابع درونیابی عناصر چهاروجهی سه بعدی را ایجاد نمود. نخست یادآوری می‌کنیم که اینک مشابه (۵.۴۶)، مختصات حجمی را به کار می‌بریم:

$$\begin{aligned} L_1 &= 1 - r - s - t; & L_2 &= r \\ L_3 &= s; & L_4 &= t \end{aligned} \quad (5.47)$$

(۲) جالب توجه است که توابع مثلث شش گرهی شکل ۵.۱۱ کاملاً مانند آن توابعی هستند که در (۵.۳۶) داده شده‌اند، البته بشرط اینکه متغیرهای r و s در شکل ۵.۱۱ به ترتیب بوسیله $(1-s)(1+r)$ و $\frac{1}{2}(1+s)$ جایگزین شوند تا اینکه دستگاه‌های مختصات طبیعی مختلفی در نظر گرفته شوند. بنابراین تصحیح Δh در (۵.۳۶) را می‌توان از توابع ارائه شده در شکل ۵.۱۱ تعیین نمود.



(الف) دستگاه مختصات و نقاط گرهی

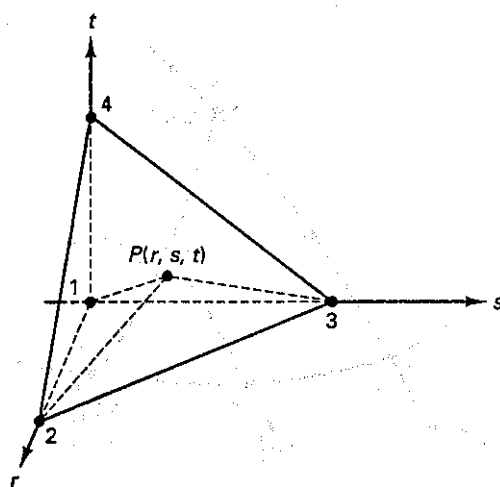
تنها هنگامی شامل می شوند که گره i تعریف شود

		$i = 4$	$i = 5$	$i = 6$
$h_1 =$	$1 - r - s$	$-\frac{1}{2} h_4$		$-\frac{1}{2} h_6$
$h_2 =$	r	$-\frac{1}{2} h_4$	$-\frac{1}{2} h_5$	
$h_3 =$	s		$-\frac{1}{2} h_5$	$-\frac{1}{2} h_6$
$h_4 =$	$4r(1 - r - s)$			
$h_5 =$	$4rs$			
$h_6 =$	$4s(1 - r - s)$			

(ب) توابع درونیایی

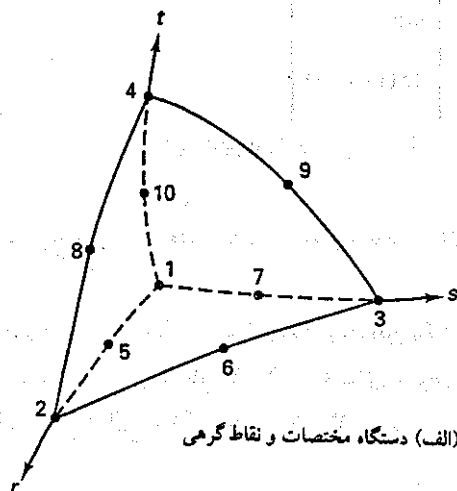
شکل ۵.۱۱ توابع درونیایی عنصر مثلثی دوبعدی با تعداد متغیر سه الی ۶ گره

که در آن می توان کنترل نمود که $L_1 + L_2 + L_3 + L_4 = 1$. این L_i ها در (۵.۴۷) توابع درونیایی عنصر چهار گرهی نشان داده شده در شکل ۵.۱۲ در فضای طبیعی می باشند. توابع درونیایی عنصر سه بعدی با تعداد متغیر ۴ الی ۱۰ گره در شکل ۵.۱۳ داده شده اند.



شکل ۵.۱۲ دستگاه مختصات طبیعی عنصر چهاروجهی

برای تعیین ماتریس‌های عنصری، ضروری است که تبدیل ژاکوبی بگونه‌ای که در (۵.۲۴) داده شده است در تحلیل وارد شود و انتگرال‌گیری‌های r از ۰ تا ۱، انتگرال‌گیری‌های s از ۰ تا $(1-r)$ و انتگرال‌گیری‌های t از ۰ تا $(1-r-s)$ انجام گیرند. مانند حالت عناصر چهار ضلعی، این انتگرال‌گیری‌ها به طور مؤثری در تحلیل عمومی با استفاده از انتگرال‌گیری عددی انجام می‌شوند، ولی قواعد انتگرال‌گیری مورد استفاده با قواعد به کار رفته برای عناصر چهار ضلعی متفاوت می‌باشند (ر.ک. به: بخش ۵.۵.۴).



(الف) دستگاه مختصات و نقاط گرهی

شکل ۵.۱۳ توابع درونیابی عنصر چهاروجهی سه‌بعدی با تعداد متغیر چهار الی ده گره

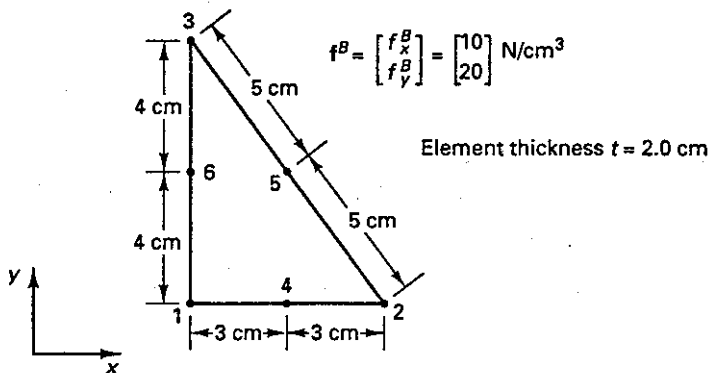
تنها هنگامی شامل می‌شوند که گره i تعریف شود.

$h_1 =$	$1 - r - s - t$	$i = 5$	$i = 6$	$i = 7$	$i = 8$	$i = 9$	$i = 10$
$h_2 =$	r	$-\frac{1}{2}h_5$	$-\frac{1}{2}h_5$	$-\frac{1}{2}h_7$	$-\frac{1}{2}h_7$		$-\frac{1}{2}h_{10}$
$h_3 =$	s	$-\frac{1}{2}h_5$	$-\frac{1}{2}h_5$	$-\frac{1}{2}h_7$	$-\frac{1}{2}h_7$	$-\frac{1}{2}h_9$	
$h_4 =$	t				$-\frac{1}{2}h_7$	$-\frac{1}{2}h_9$	$-\frac{1}{2}h_{10}$
$h_5 =$	$4r(1 - r - s - t)$						
$h_6 =$	$4rs$						
$h_7 =$	$4s(1 - r - s - t)$						
$h_8 =$	$4rt$						
$h_9 =$	$4st$						
$h_{10} =$	$4t(1 - r - s - t)$						

(ب) توابع درونیابی

شکل ۵.۱۳ (ادامه)

مثال ۵.۱۹: عنصر مثلثی نشان داده شده در شکل ۵.۱۹ E تحت اثر بردار نیروی جسمی \mathbf{f}^B در واحد حجم می‌باشد. بردار نیروی نقاط گرهی سازگار را محاسبه کنید.



شکل ۵.۱۹ E عنصر مثلثی شش گرهی

حل:

فرض کنید که از بردار تغییر مکان زیر استفاده می‌کنیم:

$$\hat{\mathbf{u}}^T = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad \dots \quad v_6]$$

بنابراین، بردار بار مربوط به بارگذاری نیروی جسمی وارده عبارت است از:

$$\mathbf{R}_B = \int_V \begin{bmatrix} h_1 & f_x^B \\ h_1 & f_y^B \\ \vdots & \vdots \\ h_6 & f_y^B \end{bmatrix} dV$$

همچنین داریم:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

و یادآوری می‌شود که ماتریس ژاکوبی قطری و ثابت بوده و $\det \mathbf{J}$ مساوی دو برابر مساحت مثلث است. انتگرال‌گیری شامل عبارت زیر برای گره i می‌باشد:

$$f_i = \int_{r=0}^1 \int_{s=0}^{1-r} h_i t \det \mathbf{J} \, ds \, dr$$

که نتیجه $f_1 = f_2 = f_3 = 0$ را بدست می‌دهد و $f_4 = f_5 = f_6 = (t/6) \det \mathbf{J}$. بنابراین نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{R}_B^T = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 160 \quad 320 \quad 160 \quad 320 \quad 160 \quad 320] \quad (\text{الف})$$

که در آن نیروهای گرهی سازگار در گره‌های گوشه صفر می‌باشند. توجه شود که کل بار وارده به طور ایستا هم‌ارز با نیروهای گرهی درج شده در (الف) است.

۵.۳.۳ ملاحظات همگرایی

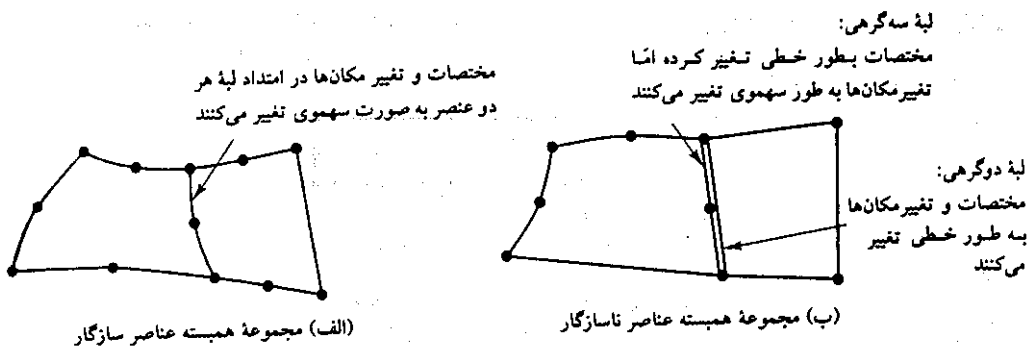
در بخش ۴.۳ در مورد شرایط همگرایی یکنوای یک گسسته‌سازی عناصر محدود بحث کردیم. از آنجا که عناصر تک‌پارامتری به طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند، ضروری است که در مورد برخی مسائل مهم همگرایی برای این عناصر بحث نماییم.

شرایط اساسی همگرایی

دو شرط اساسی برای همگرایی یکنوا، سازگار و کامل بودن عناصر (یا شبکه) می‌باشد. برای بررسی سازگاری یک مجموعه همبسته عناصر نیاز داریم که لبه‌ها و یا وجوه بین

عناصر مجاور هم را در نظر بگیریم. برای تأمین شرط سازگاری ضروری است که مختصات و تغییر مکان‌های عناصر در وجه مشترک یکسان باشند. یادآوری می‌کنیم که در این جا برای عناصر مورد نظر، مختصات و تغییر مکان‌ها در یک وجه عنصر تنها با گره‌ها و درجات آزادی گرهی در آن وجه مشخص می‌شوند. بنابراین هنگامی شرط سازگاری تأمین می‌گردد که عناصر دارای گره‌های یکسانی در وجه مشترک بوده و مختصات و تغییر مکان‌ها در وجه مشترک و در هر عنصر به وسیله توابع درونیابی یکسانی تعریف شوند.

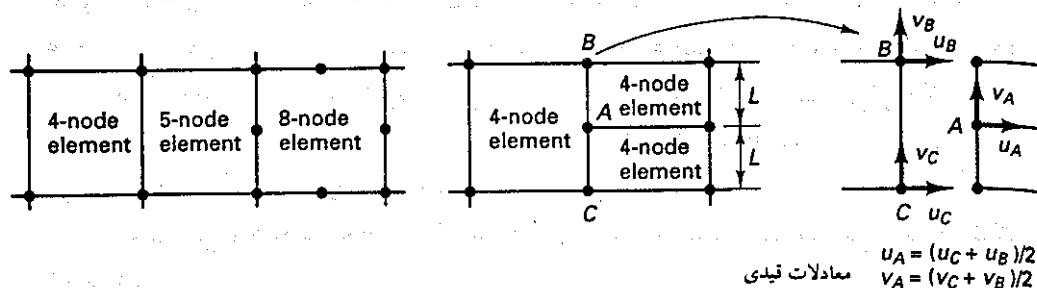
مثال‌هایی از عناصر مجاور هم که شرط سازگاری را حفظ می‌کنند (یا نمی‌کنند) در شکل ۵.۱۴ نشان داده شده‌اند.



شکل ۵.۱۴ مجموعه همبسته عناصر دوبعدی سازگار و ناسازگار

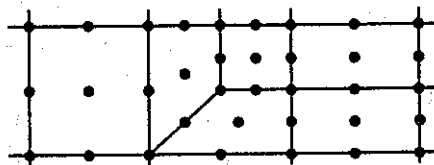
در عمل غالباً درجه‌بندی شبکه ضروری است (ر.ک. به: بخش ۴.۳) و عناصر تک پارامتری، انعطاف‌پذیری خاصی را در نیل به شبکه‌های مدرج سازگار نشان می‌دهند (ر.ک. به: شکل ۵.۱۵). کامل بودن ایجاب می‌کند که تغییر مکان‌های صلب جسمی و حالات کرنش ثابت امکان‌پذیر باشند. یک روش برای بررسی اینکه آیا این معیارها برای یک عنصر تک پارامتری تأمین می‌شوند یا نه، در نظر گرفتن ملاحظات ارائه شده در بخش ۴.۳.۲ می‌باشد. با وجود این، اکنون می‌خواهیم فهم بیشتری در مورد شرایط خاصی که مربوط به فرمول‌بندی تک پارامتری یک عنصر محیط پیوسته می‌باشند، به دست آوریم. برای نیل به این هدف، در بحث زیر یک عنصر سه بعدی محیط پیوسته را در نظر می‌گیریم، زیرا عناصر یک بعدی و دوبعدی را می‌توان به عنوان حالات خاصی از این ملاحظات سه بعدی تلقی نمود. برای امکان‌پذیر بودن حالات صلب جسمی و کرنش ثابت، فرمول‌بندی تک پارامتری باید تغییر مکان‌های زیر را که در دستگاه مختصات محلی عنصر تعریف می‌شوند، دربرگیرد:

$$\left. \begin{aligned} u &= a_1 + b_1x + c_1y + d_1z \\ v &= a_2 + b_2x + c_2y + d_2z \\ w &= a_3 + b_3x + c_3y + d_3z \end{aligned} \right\} \quad (5.48)$$



(الف) ناحیه انتقال از عنصر ۴ گرهی به عنصر ۸ گرهی

(ب) ناحیه انتقال از یک عنصر ۴ گرهی به عنصر ۴ گرهی؛ از یک لایه به دو لایه



(پ) ناحیه انتقال از یک عنصر ۹ گرهی به عنصر ۹ گرهی؛ از یک لایه به دو لایه

شکل ۵.۱۵. برخی نواحی انتقال با آرایش‌های عناصر سازگار

که در آنها a_j, b_j, c_j و $d_j, j = 1, 2, 3$ مقادیر ثابت می‌باشند. تغییر مکان‌های نقاط گرهی متناظر با این میدان تغییر مکان عبارتند از:

$$\left. \begin{aligned} u_i &= a_1 + b_1 x_i + c_1 y_i + d_1 z_i \\ v_i &= a_2 + b_2 x_i + c_2 y_i + d_2 z_i \\ w_i &= a_3 + b_3 x_i + c_3 y_i + d_3 z_i \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

که در آنها $i = 1, \dots, q$ و q شماره گره‌ها است.

حال آزمون کامل بودن عنصر به صورت زیر می‌باشد: نشان دهید هنگامی که تغییر مکان‌های نقاط گرهی عنصر به وسیله (۵.۴۹) داده می‌شوند، تغییر مکان‌های (۵.۴۸) نیز در حقیقت در درون عنصر به دست می‌آیند. به عبارت دیگر باید پیداکنیم که با تغییر مکان‌های نقاط گرهی (۵.۴۹)، تغییر مکان‌ها در درون عنصر در حقیقت آن تغییر مکان‌هایی هستند که به وسیله (۵.۴۸) مشخص می‌شوند.

در فرمول بندی تک پارامتری، توابع درونیابی تغییر مکان عبارتند از:

$$u = \sum_{i=1}^q h_i u_i; \quad v = \sum_{i=1}^q h_i v_i; \quad w = \sum_{i=1}^q h_i w_i$$

که با استفاده از (۵.۴۹) به صورت زیر درمی آیند:

$$\left. \begin{aligned} u &= a_1 \sum_{i=1}^q h_i + b_1 \sum_{i=1}^q h_i x_i + c_1 \sum_{i=1}^q h_i y_i + d_1 \sum_{i=1}^q h_i z_i \\ v &= a_2 \sum_{i=1}^q h_i + b_2 \sum_{i=1}^q h_i x_i + c_2 \sum_{i=1}^q h_i y_i + d_2 \sum_{i=1}^q h_i z_i \\ w &= a_3 \sum_{i=1}^q h_i + b_3 \sum_{i=1}^q h_i x_i + c_3 \sum_{i=1}^q h_i y_i + d_3 \sum_{i=1}^q h_i z_i \end{aligned} \right\} \quad (5.50)$$

از آنجا که در فرمول بندی تک پارامتری، مختصات مشابه تغییر مکان ها درونیابی می شوند، از اینرو می توان از (۵.۱۸) استفاده نمود تا روابط زیر از (۵.۵۰)، به دست آیند:

$$\left. \begin{aligned} u &= a_1 \sum_{i=1}^q h_i + b_1 x + c_1 y + d_1 z \\ v &= a_2 \sum_{i=1}^q h_i + b_2 x + c_2 y + d_2 z \\ w &= a_3 \sum_{i=1}^q h_i + b_3 x + c_3 y + d_3 z \end{aligned} \right\} \quad (5.51)$$

با وجود این تغییر مکان های تعریف شده در (۵.۵۱) مشابه تغییر مکان های داده شده در (۵.۴۸) می باشند، البته به شرط اینکه برای هر نقطه در عنصر داشته باشیم:

$$\sum_{i=1}^q h_i = 1 \quad (5.52)$$

رابطه (۵.۵۲) شرطی در توابع درونیابی است که برای تأمین شرایط کامل بودن لازم است. یادآوری می کنیم که (۵.۵۲) مطمئناً در گره های یک عنصر تأمین می شود، زیرا تابع درونیابی h_i بگونه ای ایجاد شده است که در گره i مساوی یک بوده ولی سایر توابع درونیابی h_j و $i \neq j$ زدر آن گره مساوی صفر می باشند، ولی برای اینکه یک عنصر تک پارامتری به طور مناسبی ایجاد شود، شرط مذکور باید برای تمامی نقاط در عنصر تأمین شود.

در بحث پیشین یک عنصر سه بعدی محیط پیوسته را در نظر گرفتیم. اما نتایج حاصله مستقیماً برای سایر فرمول بندی های عناصر تک پارامتری محیط پیوسته قابل کاربرد می باشند. برای عناصر یک بعدی یا دوبعدی محیط پیوسته، صرفاً توابع درونیابی مناسب تغییر مکان و مختصات را در روابط (۵.۴۸) الی (۵.۵۲) وارد می کنیم. ملاحظات همگرایی را در مثال زیر نشان می دهیم:

مثال ۵.۲۰: بررسی کنید که آیا شرایط همگرایی یکنوا برای عناصر با تعداد گره متغیر در شکل‌های ۵.۴ و ۵.۵ تأمین می‌شوند یا نه.

حل:

سازگاری بین لبه‌های عناصر در تحلیل دوبعدی و وجوه عناصر در تحلیل سه بعدی به شرطی حفظ می‌شود که تعداد گره‌های یکسانی در لبه‌ها و وجود اتصالی به کار روند. یک آرایش عناصر سازگار نمونه در شکل (الف) ۵.۱۴ نشان داده شده است.

شرط دوم برای همگرایی یکنوا، شرط کامل بودن است. اگر در ابتدا عنصر بنیادی دوبعدی چهار گرهی را در نظر بگیریم، ملاحظه می‌کنیم که استدلال‌هایی که منجر به شرط (۵.۵۲) می‌شوند مستقیماً قابل کاربرد هستند، البته به شرط اینکه تنها مختصات x و y و تغییر مکان‌های u و v در نظر گرفته می‌شوند.

با تعیین $\sum_{i=1}^4 h_i$ برای عنصر، درمی‌یابیم که:

$$\frac{1}{4}(1+r)(1+s) + \frac{1}{4}(1-r)(1+s) + \frac{1}{4}(1-r)(1-s) + \frac{1}{4}(1+r)(1-s) = 1$$

بنابراین عنصر بنیادی چهار گرهی، کامل است. حال توابع درونیابی ارائه شده در شکل ۵.۴ برای عناصر با تعداد گره متغیر را مطالعه می‌کنیم و درمی‌یابیم سهمی که به توابع بنیادی درونیابی چهار گرهی افزوده می‌شود، همواره به ازای هر گره اضافی که در عنصر وارد می‌شود صفر است. بنابراین هر کدام از عناصر ممکن که با تعداد گره متغیر در شکل ۵.۴ تعریف می‌شوند کامل‌اند. اثبات استدلال‌های مذکور برای عناصر سه بعدی در شکل ۵.۵ به طریقه مشابهی انجام می‌گیرد. بنابراین نتیجه می‌شود که عناصر محیط پیوسته با تعداد گره متغیر، شرایط همگرایی یکنوا را تأمین می‌کنند.

مرتبه همگرایی، اثر اعوجاجات عناصر

شرایط اساسی برای همگرایی یکنوا، یعنی سازگاری و کامل بودن، به گونه‌ای که بدان اشاره شد، به وسیله عناصر تک پارامتری با شکل هندسی عمومی (ولی قابل قبول) تأمین می‌شوند. بنابراین عناصر مذکور همواره این قابلیت را دارند که مدهای صلب جسمی و حالات کرنش ثابت را به نمایش بگذارند و از اینرو همگرایی تضمین می‌شود.

در بخش ۴.۳.۵ در مورد مرتبه‌های همگرایی گسسته‌سازی‌های عناصر محدود بحث نمودیم و این فرض‌ها را در نظر گرفتیم که فرمول‌بندی عناصر بر مبنای بسط‌های چند جمله‌ای استوار می‌باشند و شبکه‌های یکنواختی از عناصر با بُعد مشخصه h به کار می‌روند. در بحث پیشین از مثلث Pascal برای نمایش عبارات چند جمله‌ای موجود در عناصر مختلف استفاده

نمودیم. چند جمله‌ای کامل از بالاترین مرتبه در مثلث Pascal مرتبه همگرایی را تعیین می‌کند. فرض کنید که این درجه (حالا برای t و s و k باشد که k مرتبه همگرایی است. اگر جواب کامل u به اندازه کافی هموار باشد و شبکه‌های یکنواخت مورد استفاده قرار گیرند، در این صورت مرتبه همگرایی جواب تحلیل عناصر محدود u_h با استفاده از رابطه زیر تعیین می‌گردد [ر.ک. به: (۴.۱۰۲)]:

$$\|u - u_h\| \leq c h^k \quad (۵.۵۳)$$

مقدار ثابت c مستقل از h بوده ولی به جواب کامل مدل ریاضی و خواص مصالح بستگی دارد. در تحلیل عناصر محدود عمومی عملی، جواب کامل مدل ریاضی هموار نیست (به عنوان مثال به دلیل تغییرات سریع بار و تغییرات در خواص مصالح) و مرتبه همگرایی با شبکه‌های یکنواخت کاهش زیادی پیدا می‌کند. بنابراین باید درجه‌بندی شبکه‌ای با استفاده از گسسته‌سازی‌های ریز در نواحی با توزیع تنش غیرهموار و گسسته‌سازی‌های درشت در سایر نواحی به کار رود. در این صورت شبکه‌ها غیریکنواخت خواهند بود و در آنها از عناصری استفاده می‌شود که از نظر هندسی دارای اعوجاج می‌باشند، به عنوان مثال در تحلیل دوبعدی از عناصر عمومی چهار ضلعی و مثلثی استفاده می‌گردد [ر.ک. به: شکل ۵.۱۶ که یک عنصر چهار ضلعی نه گرهی را نشان می‌دهد].

در این صورت هدف از چنین نحوه ایجاد شبکه، استفاده از شبکه‌هایی است که در آنها چگالی خطای حل (تقریباً) در میدان مورد نظر ثابت باشد و نیز هدف دیگر استفاده از شبکه‌های منظم^(۳) است. موقعی که شبکه‌های منظم مورد استفاده قرار می‌گیرند، نرخ همگرایی باز هم به وسیله رابطه‌ای نظیر (۵.۵۳) تعیین می‌شود [ر.ک. به: (پ ۴.۱۰۱)]، به عنوان مثال:

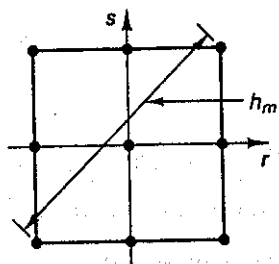
$$\|u - u_h\|_1^2 \leq c \sum_m h_m^{2k} \|u\|_{k+1,m}^2$$

که در آن h_m ، بزرگترین بُعد عنصر m را نمایش می‌دهد [ر.ک. به: شکل ۵.۱۶]. یادآوری می‌کنیم که اساساً در این رابطه، خطاهای درونیابی در روی تمامی عناصر با همدیگر جمع می‌شوند تا خطای کلی درونیابی به دست آید که در این صورت این خطای کلی کران معمول در روی خطای واقعی حل را به دست خواهد داد.

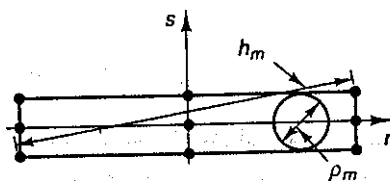
البته چگالی (تقریباً) ثابت خطای حل را می‌توان عموماً تنها با استفاده از درجه‌بندی شبکه‌ای مناسب و تعریف قابل تطبیق شبکه به دست آورد، زیرا شبکه مورد استفاده بستگی به جواب کامل (و مجهول) دارد. در عمل، تعریف یک شبکه براساس تخمین خطای محلی که از

(۳) منظور از «شبکه منظم»، «یک شبکه از دنباله‌ای از شبکه‌ها که منظم است» می‌باشد.

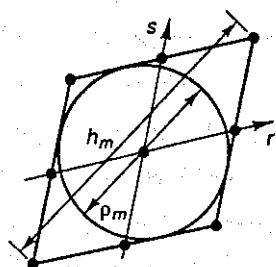
جواب به دست آمده (با یک شبکه درشت‌تر) محاسبه می‌شود، ایجاد می‌گردد.



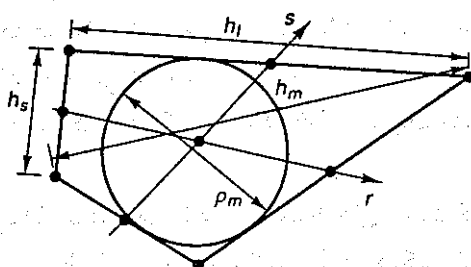
(الف) بافتار بدون اعوجاج مورد استفاده در شبکه‌های یکنواخت



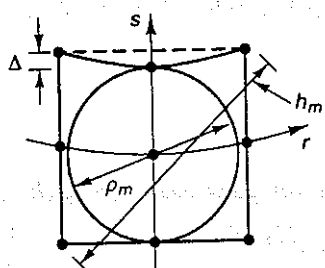
(ب) اعوجاج نسبت عرض به طول



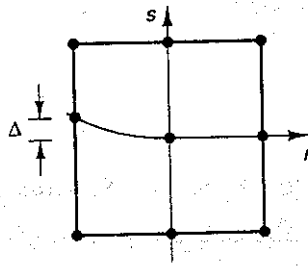
(ج) اعوجاج متوازی الاضلاع



(د) اعوجاج زاویه‌ای



(ه) اعوجاج لبه با انحنا



(و) اعوجاج در گره میانی

شکل ۵.۱۶ رده‌بندی اعوجاجات برای عنصر دو بعدی ۹ گرهی؛ برای حالات (الف) تا (ث) تمامی گره‌های میانی اضلاع و داخلی در موقعیت‌های «طبیعی» خود قرار گرفته‌اند. مقدار Δ باید کوچکتر از h_m^2 برای (۵.۵۳) باشد تا قابل به کارگیری گردد. یک اعوجاج واقعی در عمل ترکیبی از اعوجاجات نشان داده شده خواهد بود.

جهت معرفی یک معیار برای منظم بودن شبکه، از پارامتر هندسی عنصر σ_m استفاده می‌شود که عبارت است از:

$$\sigma_m = \frac{h_m}{\rho_m}$$

که در آن h_m بزرگترین بُعد و ρ_m قطر بزرگترین دایره‌ای (یا کره‌ای) است که می‌توان در عنصر m محاط نمود (ر.ک. به؛ شکل ۵.۱۶). دنباله‌ای از شبکه‌ها منظم است اگر برای تمامی عناصر m و شبکه‌های مورد استفاده $\sigma_m \leq \sigma_0$ باشد و σ_0 یک مقدار مثبت تثبیت شده است. همچنین هنگامی که از شبکه‌های حاوی عناصر چهارضلعی در تحلیل دوبعدی و عناصر شش وجهی در تحلیل سه بعدی استفاده می‌شود، ضروری است که برای هر عنصر نسبت بزرگترین طول ضلع به کوچکترین طول ضلع (h_1/h_s در شکل ۵.۱۶) کوچکتر از یک عدد مثبت معقول باشد. این شرایط مانع از ایجاد نسبت‌های نامعقول عرض به طول و اعوجاجات هندسی بیش از اندازه می‌گردند. با مراجعه به شکل ۵.۱۶ عناصر نشان داده شده در (ب) و (پ) و مخصوصاً (ت) به طور گسترده‌ای در شبکه‌های منظم مورد استفاده قرار می‌گیرند^(۴).

درجه‌بندی شبکه‌ای مزبور را می‌توان عموماً با عناصری که دارای اضلاع مستقیم‌اند به دست آورد، و گره‌های غیر گوشه‌ای را می‌توان معمولاً در موقعیت‌های طبیعی خود قرار داد (به عبارت دیگر در مکان‌های x_0, y_0, z_0 فیزیکی متناسب با فاصله‌های x_0, y_0, z_0 از گره‌های گوشه‌ای)؛ و عنصری که استفاده از آن عمومیت زیادی دارد، عنصر چهارضلعی در شکل (ت) ۵.۱۶ است. ولی هنگامی که مدل نمودن مرزهای با انحنا ضروری باشد، اضلاع عنصر با انحنا خواهند بود (ر.ک. به؛ شکل (ث) ۵.۱۶)، و در این صورت این سؤال مطرح می‌شود که تمامی این اعوجاجات هندسی چه اثری در مرتبه همگرایی دارند.

حالات ارائه شده در شکل‌های (الف) ۵.۱۶ الی (ث) ۵.۱۶ به طور وسیعی در طراحی‌های شبکه مورد استفاده قرار می‌گیرند، با این حال باید از کاربرد عنصر اعوجاج‌دار نشان داده شده در شکل (ج) ۵.۱۶ اجتناب کرد، مگر اینکه ضروری باشد که اثرات ویژه تنش، نظیر آنچه که در مکانیک شکست رخ می‌دهد، مدل شوند (که در آن حتی از اعوجاجات بزرگتر از آنچه که در شکل (ج) ۵.۱۶ نشان داده شده‌اند استفاده می‌شود؛ ر.ک. به؛ شکل ۵.۹). همچنین اعوجاج نشان داده شده در شکل (ج) ۵.۱۶ ممکن است که در تحلیل غیرخطی هندسی نیز رخ دهد.

P. G. Ciarlet [A] و P. G. Ciarlet and P. -A. Raviart [A] در تحلیل‌های

(۴) همچنین می‌توان دنباله‌ای از شبکه‌ها را تعریف نمود که شبه یکنواخت باشد. در چنین دنباله‌ای علاوه بر شرط منظم بودن می‌توانیم شرط دیگری را نیز بدین صورت تعریف کنیم که نسبت ماکزیمم h_m در یک شبکه به مینیمم h_m در همان شبکه برای تمامی شبکه‌ها باید کوچکتر از یک عدد مثبت معقول باقی بماند. بنابراین در حالی که شرط منظم بودن مجاز می‌دارد که نسبت اندازه‌های عنصر هر مقداری باشد، شرط شبه یکنواختی اندازه نسبتی مجاز را محدود می‌نماید. بنابراین هنگامی که دنباله‌ای شبه یکنواخت از شبکه‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد، معیار خطا در (پ ۴.۱.۱) همچنان معتبر می‌باشد.

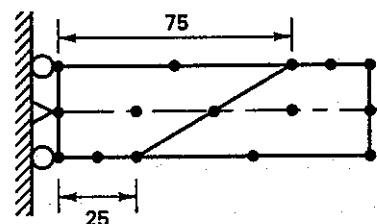
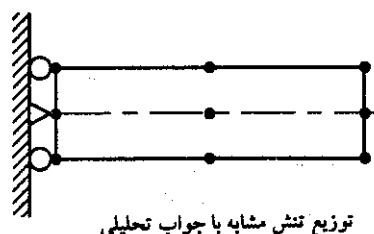
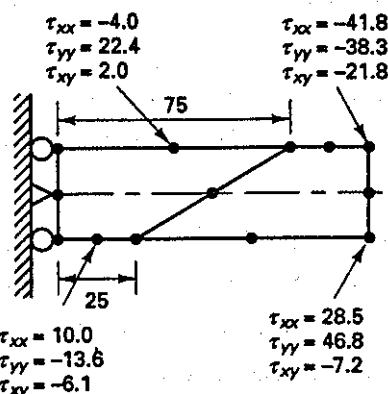
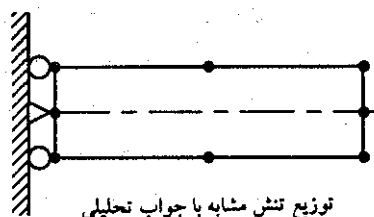
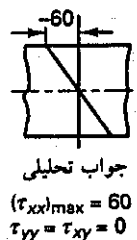
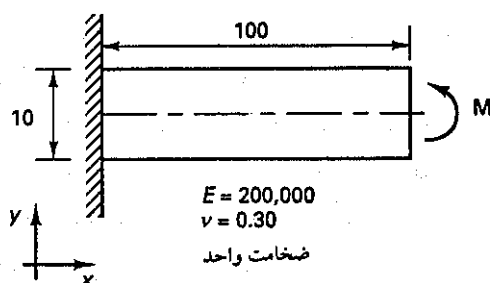
ریاضی خود نشان داده‌اند که مرتبه همگرایی دنباله‌ای از شبکه‌های منظم با اضلاع مستقیم را باز هم با استفاده از (۵.۵۳) می‌توان به دست آورد (اگرچه، به عنوان مثال، در تحلیل دوبعدی، از چهارضلعی‌های عمومی با اضلاع مستقیم به جای عناصر مربعی استفاده می‌شود) و نیز آنان نشان داده‌اند که باز هم می‌توان با استفاده از (۵.۵۳) مرتبه همگرایی را برای عناصر با اضلاع انحنا دار و هنگامی که گره‌های غیر گوشه‌ای در موقعیت‌های طبیعی خود قرار نگرفته‌اند به دست آورد، البته به شرط اینکه این اعوجاجات در مقایسه به اندازه عنصر کوچک باشند. برای عنصر نشان داده شده در شکل ۵.۱۶ اعوجاجات باید $O(h^2)$ باشند. بنابراین اعوجاجات عنصری به علت اضلاع با انحنا و به دلیل گره‌های داخلی که در موقعیت طبیعی خود قرار نگرفته‌اند، باید کوچک باشند و در فرایند تعریف، اعوجاجات باید بسیار سریعتر از اندازه عنصر کاهش پیدا کنند. مرتبه همگرایی در (۵.۵۳) مستقیماً هنگامی که جواب کامل u هموار است، حاصل می‌گردد؛ و موقعی که جواب کامل غیر هموار است، درجه‌بندی شبکه‌ای الزامی می‌باشد (برای تأمین این شرط که چگالی خطای جواب در میدان جواب باید (تقریباً) ثابت باشد). در بخش ۵.۵.۵ برخی جواب‌ها را ارائه خواهیم داد که شماری از این نتایج را نشان می‌دهند (ر.ک. به: شکل ۵.۳۹) (۵).

البته دقت واقعی حاصل از یک شبکه معلوم به وسیله مقدار ثابت c در (۵.۵۳) نیز تعیین می‌گردد. این مقدار ثابت بستگی به عناصر خاص مورد استفاده (با چند جمله‌ای کامل از درجه k) و نیز به اعوجاجات هندسی عناصر دارد. باید ذکر شود، که اگر مقدار ثابت c بزرگ باشد، در این صورت مرتبه همگرایی ممکن است که مهم نباشد، زیرا احتمالاً عبارت h^k خطا را به اندازه کافی تنها در مقادیر بسیار کوچک h کاهش دهد.

نکات مذکور مربوط به مرتبه همگرایی به دست آمده در هنگام استفاده از عناصر با اندازه‌های کوچک می‌باشند. با وجود این نکات جالبی نیز در ارتباط با مطالعه ظرفیت پیش‌بینی کنندگی عناصر با اندازه‌های بزرگ مطرح می‌گردند. به عنوان مثال اعوجاجات هندسی عنصری می‌توانند اثر قابل توجهی در ظرفیت‌های پیش‌بینی کنندگی عناصر داشته باشند.

به عنوان یک مثال برای نشان دادن امکان از بین رفتن ظرفیت پیش‌بینی کنندگی عناصر تک‌پارامتری که دارای اعوجاج هندسی می‌باشند، نتایج ارائه شده در شکل ۵.۱۷ را در نظر بگیرید. یک عنصر منفرد هشت گرهی بدون اعوجاج، جواب کامل (مطابق نظریه تیر) را برای مسأله خمش تیر به دست می‌دهد. با وجود این هنگامی که دو عنصر اعوجاج‌دار مورد استفاده قرار می‌گیرند، خطاهای حل قابل توجهی به دست می‌آیند. از سوی دیگر هنگامی که همان مسأله با عناصر نه گرهی تحلیل می‌شود، شبکه عناصر اعوجاج‌دار نتیجه صحیحی را به دست می‌دهد.

(۵) این جواب‌های تحلیل در بخش ۵.۵.۵ داده شده‌اند، زیرا ماتریس‌های عناصر دارای اعوجاج با استفاده از انتگرال‌گیری عددی تعیین می‌شوند و اثر خطای انتگرال‌گیری عددی را نیز باید در نظر گرفت.



شکل ۵.۱۷ مثالی که نمایشگر اثر اعوجاجات عناصر در ظرفیت پیش‌بینی کنندگی عناصر است

این مثال نشان می‌دهد که در شبکه‌های درشت، ظرفیت پیش‌بینی کنندگی (تنش) عناصر معینی می‌تواند به طور قابل ملاحظه‌ای تحت تأثیر اعوجاجات هندسی قرار گیرد. در عمل از آنجا که اغلب، شبکه‌های نسبتاً درشت مورد استفاده قرار می‌گیرند و مطالعات کامل همگرایی انجام نمی‌شود، مطمئناً استفاده از عناصری رجحان دارد که کمترین حساسیت به اعوجاجات هندسی را از خود نشان می‌دهند.

در مطالعه علت از دست دادن ظرفیت پیش‌بینی کنندگی عناصر، درمی‌یابیم که این اثر ناشی از عناصری است که دیگر نمی‌توانند بعد از اعوجاج هندسی نمایشگر مرتبه مشابهی از چندجمله‌ای در مختصات فیزیکی x و y باشند که بدون اعوجاج هندسی نمایش می‌دادند. به عنوان مثال، عنصر عمومی نه گرهی چهارضلعی که در شکل (ت) ۵.۱۶ نشان داده شده است، می‌تواند تغییرات x^2 و xy و y^2 تغییر مکان را به طور کامل به نمایش گذارد، در حالی که عنصر چهارضلعی هشت گرهی نمی‌تواند نمایشگر چنان تغییراتی باشد. بنابراین عنصر عمومی هشت گرهی چهارضلعی شامل عبارات درجه دومی در مثلث Pascal مختصات فیزیکی نمی‌باشد.

این نکته نتایج ارائه شده در شکل ۵.۱۷ را شرح می‌دهد و بررسی در مورد این پدیده برای اعوجاجات معمول در عناصری که عموماً مورد استفاده قرار می‌گیرند جالب توجه است. در چنین مطالعه‌ای، از بین رفتن ظرفیت پیش‌بینی کنندگی عناصر را می‌توان با شناسایی عباراتی، در مختصات فیزیکی مثلث Pascal که دیگر نمی‌تواند به طور کامل نمایش داده شوند، تعیین نمود (ر.ک. به: [A] N. S. Lee and K. J. Bathe).

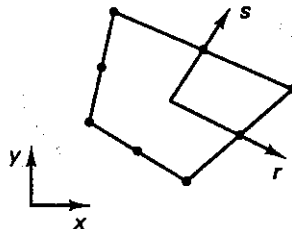
به عنوان مثال عنصر دوبعدی در شکل ۵.۱۶ را در نظر بگیرید. برای عناصری با بافتارهای بدون اعوجاج و یا با تنها اعوجاجات نسبت عرض به طول، مختصات فیزیکی x و y به طور خطی به مختصات تک‌پارامتری r و s ارتباط پیدا می‌کنند، به عبارت دیگر داریم: $x = c_1 r + c_2 s$ که در آن c_1 و c_2 مقادیر ثابت می‌باشند. بنابراین عبارات مثلث Pascal در مختصات فیزیکی صرفاً عبارات r و s هستند که از توابع درونیابی N_i به دست آمده که به ترتیب به جای x و y جایگذاری شده‌اند.

اثرات اعوجاجات متوازی‌الاضلاع، زاویه‌ای عمومی و لبه‌های با انحنا نشان داده شده در شکل‌های (پ) ۵.۱۶ الی (ث) ۵.۱۶ را می‌توان بدین گونه مطالعه نمود که در آغاز تغییرات مختصات فیزیکی با درونیابی‌های مختصات (۵.۱۸) را برای این حالات خاص ایجاد نمود و سپس این پرسش را مطرح کرد که کدام عبارات چندجمله‌ای در x و y در عبارات چندجمله‌ای r و s مربوط به تغییرات ارائه شده در (۵.۱۹) برای تغییر مکان‌ها در نظر گرفته شده‌اند (ر.ک. به: مثال ۵.۲۱).

جدول ۵.۱ نتایج حاصل از چنان مطالعه‌ای را برای عناصر چهارضلعی دوبعدی به اختصار نشان می‌دهد (ر.ک. به: [A] N. S. Lee and K. J. Bathe). ستون نخست جدول ۵.۱، عباراتی در مثلث Pascal را برای حالتی به دست می‌دهد که عنصر بدون اعوجاج بوده و یا تحت تأثیر تنها یک اعوجاج نسبت عرض به طول عنصر یا اعوجاج متوازی‌الاضلاع می‌باشد. عبارات زیر خط چین تنها هنگامی وجود دارند که عنصر بدون اعوجاج بوده و یا تنها تحت تأثیر یک اعوجاج نسبت عرض به طول عنصر است و نیز بدون دوران می‌باشد. به ویژه جدول ۵.۱ نشان می‌دهد که یک اعوجاج زاویه‌ای عمومی به طور قابل توجهی در ظرفیت پیش‌بینی کشندگی عناصر ۸ گرهی و ۱۲ گرهی اثر می‌گذارد، به عبارت دیگر با چنان اعوجاجاتی، عناصر می‌توانند تنها تغییرات خطی

از سوی دیگر، اعوجاجات لبه با انحنا، مرتبه چندجمله‌ای‌های تغییر مکانی را که می‌توانند بطور کامل برای تمامی عناصر مورد نظر در جدول ۵.۱ نمایش داده شوند، کاهش می‌دهند؛ و در حقیقت با چنان اعوجاجاتی تنها عنصر ۲۵ گرهی دو درجه دومی می‌تواند باز هم میدان تغییر مکان سهموی را به طور کامل به نمایش گذارد. اطلاعات داده شده در جدول ۵.۱ به روشنی نشان می‌دهند که عناصر لاگرانژی بر عناصر ۸ گرهی و ۱۲ گرهی از نکته نظر ظرفیت پیش‌بینی کنندگی برتری دارند، البته ذکر این نکته نیز ضروری است که عناصر لاگرانژی از نکته نظر محاسباتی تا حدودی پرهزینه‌تراند و مرتبه همگرایی برای شبکه‌های ریز، یکسان است [اگرچه مقدار ثابت c در (۵.۵۳) متفاوت می‌باشد].

روش تحلیل برای یافتن اطلاعات ارائه شده در جدول ۵.۱ را در مثال زیر نشان می‌دهیم. مثال ۵.۲۱: عنصر هشت گرهی نشان داده شده در شکل ۵.۲۱ E را که دارای اعوجاج زاویه‌ای عمومی می‌باشد در نظر بگیرید. عبارات مثلث Pascal در y و x را برای این عنصر تعیین کنید.



شکل ۵.۲۱ E عنصر تک پارامتری هشت ضلعی با اعوجاج زاویه‌ای

حل:

تغییرات مختصات فیزیکی را می‌توان با استفاده از توابع درونیابی ارائه شده در شکل ۵.۴ به دست آورد که برای این عنصر با گره‌های میانی اضلاع که در وسط فاصله بین گره‌های گوشه قرار دارند، نتایج زیر را به دست می‌دهد:

$$x = \gamma_1 + \gamma_2 r + \gamma_3 s + \gamma_4 rs \quad (\text{الف})$$

$$y = \delta_1 + \delta_2 r + \delta_3 s + \delta_4 rs \quad (\text{ب})$$

که در آنها $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ و $\delta_1, \dots, \delta_4$ مقادیر ثابت می‌باشند. از (الف) و (ب) استفاده می‌کنیم تا مشخص کنیم که درونیابی‌های تغییر مکان زیر شامل کدام عبارات x و y می‌باشند:

$$u = \sum_{i=1}^8 h_i u_i \quad (\text{پ})$$

$$v = \sum_{i=1}^8 h_i v_i \quad (\text{ت})$$

که در آنها h_i همان توابع درون یابی می باشند که در شکل ۵.۴ ارائه شده اند.

درون یابی تغییر مکان u را در نظر بگیرید. واضح است که (پ) شامل مقدار ثابت و عبارات x و y در (الف) و (ب) می باشد، زیرا (پ)، Π را بر حسب توابع $(1, r, s, r^2, rs, s^2, r^2s, rs^2)$ در مقادیر ثابت ضرب می شوند درون یابی می کند. در مورد این واقعیت هنگامی که شرایط همگرایی را در نظر می گرفتیم، بحث نمودیم.

با وجود این، حالا اگر عبارت x^2 را در نظر بگیریم، مشاهده می کنیم که عبارت $[r^2s^2]$ که از طرق جذرگیری از سمت راست (ب) به دست می آید در (پ) وجود ندارد. به طور مشابه عبارات xy^2 ، y^2 و xy^2 درون یابی تغییر مکان (پ) وجود ندارند.

مشخص است که تحلیل برای درون یابی تغییر مکان v نیز به همین گونه است. بنابراین هنگامی که یک عنصر تک پارامتری هشت گرهی تحت تأثیر یک اعوجاج عمومی زاویه ای قرار دارد، ظرفیت پیش بینی کنندگی عنصر، در آن تغییرات درجه دومی تغییر مکان در x و y کاهش پیدا می کند و این تغییرات نمی توانند به طور کامل نمایش داده شوند (ر.ک. به: جدول ۵.۱).

همچنین این تحلیل نشان می دهد که تغییرات درجه دومی تغییر مکان در x و y ، هنگامی که عنصر مبتنی بر تغییر مکان نه گرهی در معرض همان اعوجاجات زاویه ای قرار می گیرد، حفظ می شوند.

این استنتاجات، نتایج نشان داده شده در شکل ۵.۱۶ را شرح می دهند.

۵.۳.۴ ماتریس های عنصری در دستگاه مختصات کلی

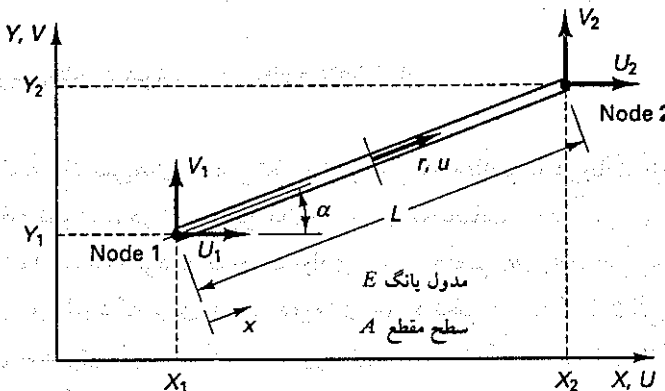
تاکنون محاسبه ماتریس های عنصر تک پارامتری را که متناظر با درجات آزادی محلی عنصر بودند ملاحظه نمودیم. در تعیین این ماتریس ها از مختصات محلی x و y و هر کدام که قابل کاربرد باشند، استفاده نموده و درجات آزادی محلی عنصر u_i و v_i را به کار بردیم. با وجود این، یادآوری می شود که برای عنصر دوبعدی مورد نظر در مثال ۵.۵ الی ۵.۷ می توانستیم ماتریس های عنصری را با استفاده از متغیرهای مختصات کلی X و Y و مؤلفه های تغییر مکان کلی U_i و V_i تعیین کنیم. در حقیقت در محاسبات ارائه شده، نیاز داشتیم که مختصات کلی X و Y و مؤلفه های تغییر مکان کلی U و V را به ترتیب به جای مختصات محلی x و y و مؤلفه های تغییر مکان محلی u و v جایگزین نماییم. در این صورت ماتریس های حاصل مستقیماً متناظر با

مؤلفه‌های تغییر مکان کلی خواهند بود.

در حالت کلی محاسبه ماتریس‌های عنصری باید با استفاده از مؤلفه‌های تغییر مکان کلی در دستگاه مختصات کلی انجام گیرند، البته در صورتی که تعداد متغیرهای مختصات طبیعی مساوی تعداد متغیرهای کلی باشند. عناصر دوبعدی تعریف شده در سطح کلی و عنصر سه بعدی شکل ۵.۵ مثال‌های نمونه‌ای از این نوع‌اند. در چنین حالاتی، عملگر ژاکوبی (۵.۲۴) یک ماتریس مربعی است که می‌توان معکوس آن را بگونه‌ای که در (۵.۲۵) مورد نیاز است، به دست آورد؛ در این صورت ماتریس‌های عناصر مستقیماً متناظر با مؤلفه‌های تغییر مکان کلی خواهند بود.

معمولاً در حالاتی که مرتبه دستگاه مختصات کلی بالاتر از مرتبه دستگاه مختصات طبیعی باشد، مناسب و سودمند خواهد بود که نخست ماتریس‌های عنصر را در دستگاه مختصات محلی و متناظر با مؤلفه‌های تغییر مکان محلی محاسبه کرد. بعد از آن، ماتریس‌ها به روش معمول باید به دستگاه تغییر مکان‌های کلی تبدیل گردند. عنصر خربایی یا عنصر تنش مسطح مثال‌هایی از این نوع می‌باشند که به طور دلخواه در فضای سه بعدی قرار گرفته‌اند. در یک روش جایگزین، تبدیل به مؤلفه‌های تغییر مکان کلی مستقیماً در فرمول‌بندی اعمال می‌شود. در این روش، تبدیلی که در درونیابی تغییر مکان، تغییر مکان‌های نقاط گرهی محلی را برحسب مؤلفه‌های کلی بیان می‌کند در فرمول‌بندی وارد می‌شود.

مثال ۵.۲۲: ماتریس سختی عنصر خربایی نشان داده شده در شکل ۵.۲۲ را با استفاده مستقیم از تغییر مکان‌های نقاط گرهی کلی تعیین کنید.



شکل ۵.۲۲: عنصر خربایی در دستگاه مختصات کلی

حل:

ماتریس سختی عنصر در (۵.۲۷) داده شده است، به عبارت دیگر داریم:

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV$$

که در آن \mathbf{B} ماتریس کرنش - تغییر مکان و \mathbf{C} ماتریس تنش - کرنش می‌باشند. برای عنصر خریایی مورد نظر داریم:

$$u = [\cos \alpha \quad \sin \alpha] \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1-r)U_1 + \frac{1}{2}(1+r)U_2 \\ \frac{1}{2}(1-r)V_1 + \frac{1}{2}(1+r)V_2 \end{bmatrix}$$

در این صورت با استفاده از $\epsilon = \partial u / \partial x$ که در دستگاه مختصات طبیعی به صورت $\epsilon = (2/L) \partial u / \partial r$ بیان می‌شود (ر.ک. به: بخش ۵.۲)، می‌توان تبدیل کرنش - تغییر مکان را متناظر با بردار تغییر مکان $\mathbf{U}^T = [U_1 \quad V_1 \quad U_2 \quad V_2]$ بصورت زیر نوشت:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{L} [\cos \alpha \quad \sin \alpha \quad \cos \alpha \quad \sin \alpha] \begin{bmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \text{zeros} \\ & & 1 & \\ \text{zeros} & & & 1 \end{bmatrix}$$

همچنین همانگونه که در بخش ۵.۲ ارائه شده است، داریم:

$$dV = \frac{Al}{2} dr \quad \text{and} \quad \mathbf{C} = E$$

از جایگذاری \mathbf{B} و \mathbf{C} و dV در رابطه مربوط به \mathbf{K} و تعیین انتگرال، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{K} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha & -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha \\ \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha \\ -\cos^2 \alpha & -\cos \alpha \sin \alpha & \cos^2 \alpha & \cos \alpha \sin \alpha \\ -\sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$

۵.۳.۵ عناصر مبتنی بر تغییر مکان / فشار برای محیط‌های تراکم‌ناپذیر

در بخش ۴.۴.۳ در مورد این واقعیت بحث کردیم که عناصر مبتنی بر تغییر مکان صرف برای تحلیل محیط‌های تراکم‌ناپذیر (یا تقریباً تراکم‌ناپذیر) مؤثر نیستند و نیز دو نوع فرمول‌بندی تغییر مکان / فشار را معرفی نمودیم. در فرمول‌بندی u/p ، فشار به طور انفرادی برای هر عنصر درونیابی می‌شود و (در حالت تقریباً تراکم‌ناپذیر) می‌تواند پیش از فرایند به هم سوار نمودن

عناصر به طور ایستا حذف شود (چگالش ایستایی)، در حالی که در فرمول‌بندی $u/p-c$ فشارهای عنصری به وسیله متغیرهای گرهی تعریف می‌شوند که مانند حالت تغییر مکان‌ها، مربوط به عناصر مجاور هم می‌باشند. عناصر مؤثر مختلفی با این فرمول‌بندی‌ها ارائه شدند (ر.ک. به: جداول ۴.۶ و ۴.۷) و مورد بحث قرار گرفتند (ر.ک. به: بخش ۴.۵).

مانند عناصر مبتنی بر تغییر مکان صرف، در فصل چهارم فرض کردیم که ماتریس‌های درونیابی تغییر مکان و فشار نیز با استفاده از روش مختصات تعمیم یافته ایجاد می‌شوند. حال به نظر می‌رسد که این ماتریس‌ها را می‌توان مستقیماً با استفاده از فرمول‌بندی تک‌پارامتری به دست آورد.

در فرمول‌بندی u/p ، همانگونه که در فرمول‌بندی تغییر مکان صرف عمل کردیم، برای یک عنصر از درونیابی‌های مختصات و تغییر مکان یکسانی استفاده نمودیم [ر.ک. به: (۵.۱۸)] و (۵.۱۹) و فشار را با استفاده از رابطه زیر درونیابی می‌کنیم:

$$p = p_0 + p_1 r + p_2 s + p_3 t + \dots \quad (5.54)$$

که در آن p_0, p_1, p_2, \dots پارامترهای فشار هستند که باید محاسبه شوند و r و s و t مختصات تک‌پارامتری هستند. البته به عنوان یک روش جایگزین می‌توانستیم فشار را با استفاده از رابطه زیر نیز درونیابی کنیم:

$$p = p_0 + p_1 x + p_2 y + p_3 z + \dots$$

که در آن x و y و z همان مختصات دکارتی می‌باشند.

در فرمول‌بندی $u/p-c$ ، همانگونه که در فرمول‌بندی تغییر مکان صرف عمل کردیم، از درونیابی‌های مختصات و تغییر مکان استفاده می‌کنیم و رابطه زیر را نیز به کار می‌بریم:

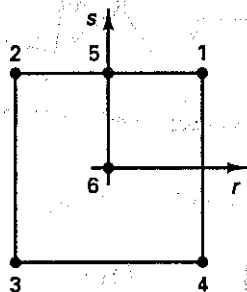
$$p = \sum_{i=1}^{q_p} \bar{h}_i \bar{p}_i \quad (5.55)$$

که در آن $\bar{h}_i, i=1, \dots, q_p$ ، توابع درونیابی فشار نقاط گرهی بوده و \bar{p}_i فشارهای گرهی مجهول می‌باشند. یادآوری می‌کنیم که \bar{h}_i متفاوت از h_i می‌باشند که به عنوان درونیابی‌های تغییر مکانی و مختصات مورد استفاده قرار گرفتند. به عنوان مثال برای عنصر دوبعدی $c-4/9$ ، درونیابی‌های تغییر مکان و مختصات، همان توابع ارائه شده در جدول ۵.۴ برای نه گره عنصری می‌باشند، در حالی که توابع متناظر با چهار گره گوشه عنصر هستند.

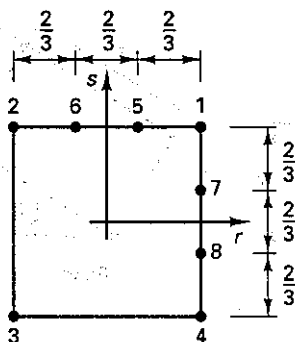
در عمل فرمول‌بندی تک‌پارامتری عناصر u/p و $u/p-c$ مؤثر می‌باشد، زیرا عمومیت داشته و استفاده از عناصر غیرمستطیلی و با انحنای نیز امکان‌پذیر می‌سازد (ر.ک. به: شکل ۴.۲۱ و [A, B] T. Sussman and K. J. Bathe).

۵.۳.۶ تمرین‌ها

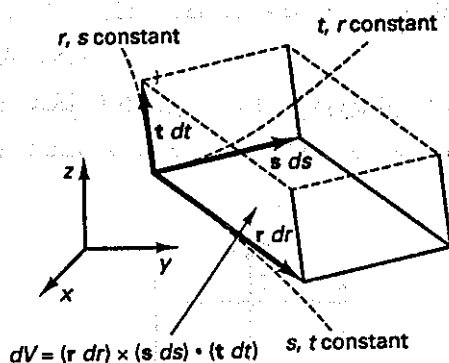
- ۵.۱. از روش ارائه شده در مثال ۵.۱ استفاده نموده و درستی توابع داده شده در شکل ۵.۳ برای عنصر خربایی چهارگرهی را ثابت کنید.
- ۵.۲. از روش ارائه شده در مثال ۵.۱ استفاده نموده درستی توابع داده شده در شکل ۵.۴ برای عنصر دوبعدی را ثابت کنید.
- ۵.۳. از توابع ارائه شده در شکل ۵.۴ برای ایجاد توابع درونیابی عنصر شش‌گرهی نشان داده شده در زیر استفاده نمایید. توابع درونیابی را در یک نمای مایل / هوایی رسم نمایید (مانند مثال ۵.۴).



- ۵.۴. ثابت کنید که از ایجاد توابع درونیابی ارائه شده در شکل ۵.۵، توابع صحیحی برای عنصر سه بعدی به دست می‌آیند.
- ۵.۵. تابع درونیابی h_i برای عنصر نشان داده شده در زیر را جهت استفاده در یک شبکه عناصر محدود سازگار تعیین کنید.



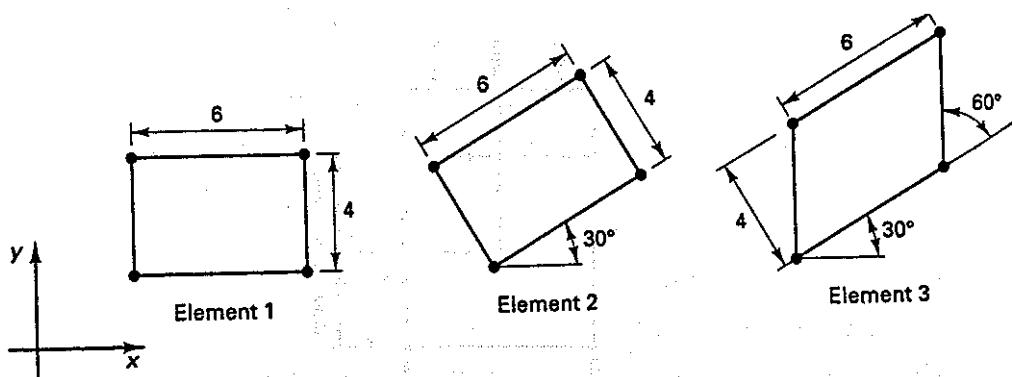
۵.۶. در محاسبه ماتریس‌های عنصر تک پارامتری، انتگرال‌گیری در روی مختصات طبیعی r و s و t انجام می‌گیرد، از اینرو تبدیل ۵.۲۸ را ایجاب می‌کند. این تبدیل را با استفاده از حجم بنیادی $dV = (r dr) \times (s ds) \cdot (t dt)$ که در شکل زیر نشان داده شده است به دست آورید:



در این جا بردارهای r و s و t به صورت زیر داده می‌شوند:

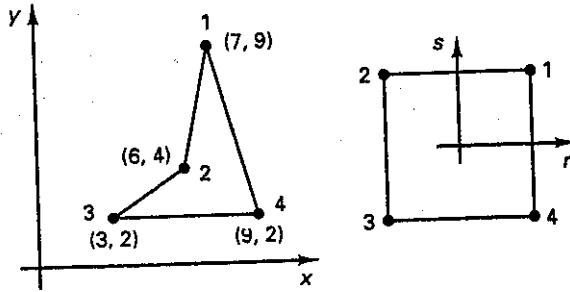
$$r = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial r} \end{bmatrix}; \quad s = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} \\ \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial z}{\partial s} \end{bmatrix}; \quad t = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial t} \\ \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix}$$

۵.۷. ماتریس‌های ژاکوبی را برای عناصر چهارگرهی زیر تعیین کنید:

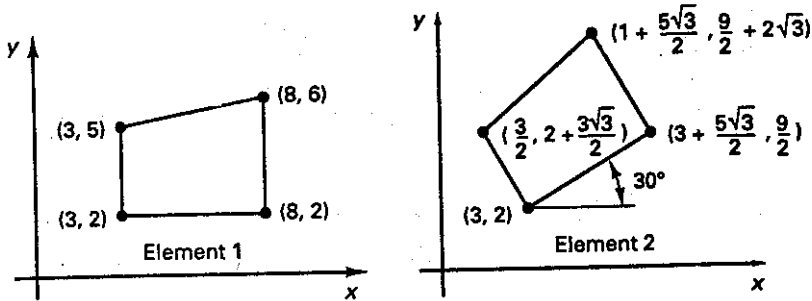


به طور صریح نشان دهید که ماتریس‌های ژاکوبی عناصر ۲ و ۳ شامل ماتریس دورانی است که نمایشگر یک چرخش ۳۰ درجه می‌باشد.

۵.۸. ماتریس ژاکوبی عنصر نشان داده شده برای تمامی r و s ها را محاسبه کنید. مقادیر r و s را برای حالتی که ماتریس ژاکوبی تکیه است، مشخص نمایید.



۵.۹. ماتریس‌های ژاکوبی J را برای عناصر چهارگرمی زیر تعیین کنید:



نشان دهید که چگونه ماتریس ژاکوبی J عنصر ۲ را می‌توان با اعمال یک ماتریس دوران به ماتریس ژاکوبی عنصر ۱ به دست آورد. ماتریس دوران را تعیین کنید.

۵.۱۰. عناصر تک پارامتری را که به وسیله روابط زیر داده شده‌اند در نظر بگیرید:

(الف) حالت ۱:

$$x = \sum_{i=1}^8 h_i x_i; \quad x_1 = 12, x_2 = 4, x_3 = 4, x_4 = 12, x_5 = 9, x_6 = 5, x_7 = 8, x_8 = 11$$

$$y = \sum_{i=1}^8 h_i y_i; \quad y_1 = 12, y_2 = 8, y_3 = 2, y_4 = 2, y_5 = 8, y_6 = 5, y_7 = 1, y_8 = 7$$

(ب) حالت ۲:

$$x = \sum_{i=1}^6 h_i^* x_i; \quad x_1 = 8, x_2 = 2, x_3 = 1, x_4 = 9, x_5 = 5, x_6 = 5$$

$$y = \sum_{i=1}^6 h_i^* y_i; \quad y_1 = 10, y_2 = 8, y_3 = 3, y_4 = 1, y_5 = 9, y_6 = 2$$

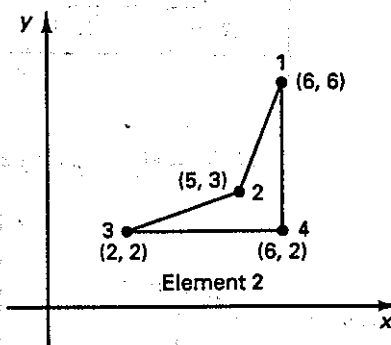
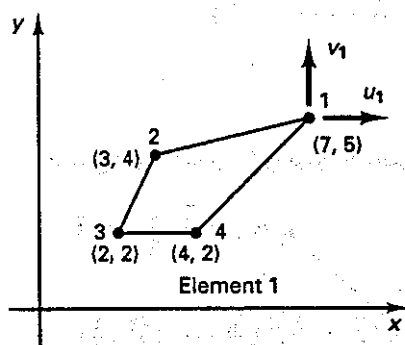
عناصر را به طور دقیق در کاغذ رسم کشیده و موقعیت‌های فیزیکی خطوط $r = \frac{1}{2}$ و $r = -\frac{1}{4}$ و $s = \frac{2}{3}$ و $s = -\frac{1}{3}$ را برای هر حالت نشان دهید (همچنین می‌توانید یک برنامه کامپیوتری کوچک را برای انجام این کار بنویسید).

۵.۱۱. عناصر محدود تک پارامتری نشان داده شده در زیر را در نظر بگیرید. حالات زیر را برای هر عنصر رسم نمایید.

(الف) خطوطی که s در آنها متغیر بوده و $r = -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ ثابت می‌باشند.

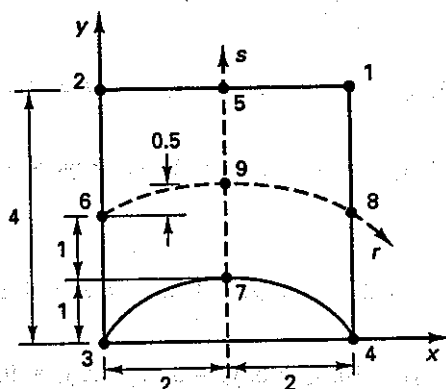
(ب) خطوطی که r در آنها متغیر بوده و $s = -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ ثابت می‌باشند.

(پ) دترمینان ژاکوبی در روی عنصر ۱ (در یک نمای مایل / هوایی).

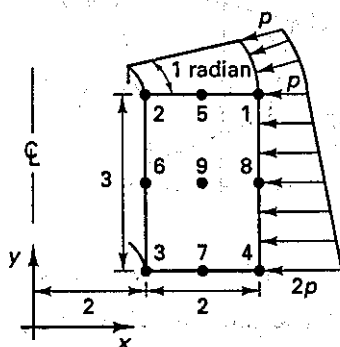


۵.۱۲. ثابت کنید که برای هر عنصر تک پارامتری با شکل متوازی‌الاضلاع، دترمینان ژاکوبی ثابت می‌باشد. همچنین ثابت کنید هنگامی که عنصر مربعی، مستطیلی یا به شکل متوازی‌الاضلاع نباشد، دترمینان ژاکوبی بر حسب r و s خواهد بود.

۵.۱۳. عنصر تک پارامتری نشان داده شده زیر را در نظر بگیرید. مختصات x و y هر نقطه‌ای از عنصر را به صورت تابعی از r و s محاسبه کرده و ماتریس ژاکوبی را ایجاد نمایید.



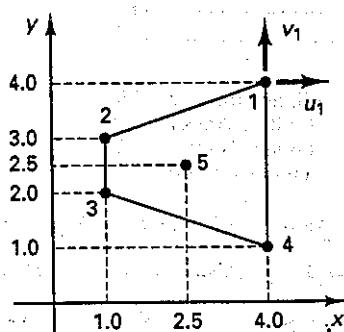
۵.۱۴. نیروهای نقاط گرهی متناظر با بارگذاری سطحی را که در روی عنصر متقارن محوری نشان داده شده در زیر وارد می‌شوند محاسبه کنید (یک رادیان را در نظر بگیرید).



۵.۱۵. عنصر تک پارامتری کرنش مسطح پنج گرهی نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید.

(الف) توابع درونیابی مناسب $i = 1$ الی 5 را تعیین کنید.

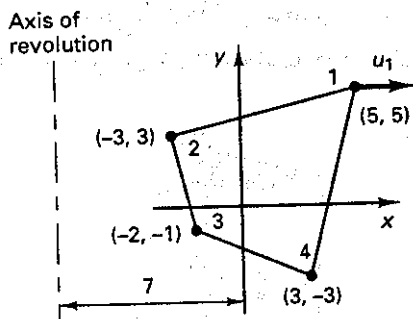
(ب) ستونی در ماتریس کرنش - تغییر مکان را که مربوط به تغییر مکان u_1 در نقطه $x = 2/5$ و $y = 2/5$ می‌باشد تعیین کنید.



۵.۱۶. عنصر محدود دوبعدی متقارن محوری تک پارامتری را که در شکل زیر نشان داده شده است در نظر بگیرید.

(الف) ماتریس ژاکوبی J را ایجاد نمایید.

(ب) عبارت تحلیلی ستونی را در ماتریس کرنش - تغییر مکان $B(r, s)$ که مربوط به تغییر مکان u_1 می‌باشد به دست آورید.



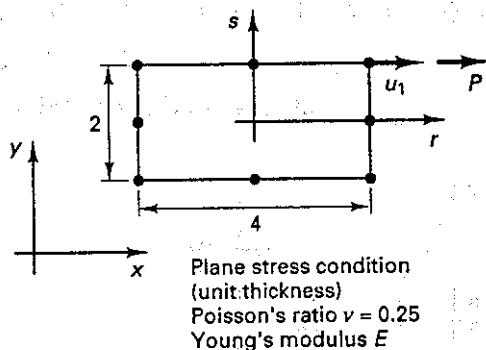
۵.۱۷. در عنصر تک پارامتری هشت گرهی نشان داده شده در شکل زیر تمامی تغییر مکان‌های

نقاط گرهی به جز u_1 مقید به صفر شده‌اند. عنصر تحت اثر یک بار متمرکز P در u_1 قرار دارد.

(الف) تغییر مکان‌های مربوط به بار P را محاسبه کرده و رسم نمایید.

(ب) تمامی تنش‌های عنصری را که مربوط به بافتار تغییر شکل یافته می‌باشند رسم

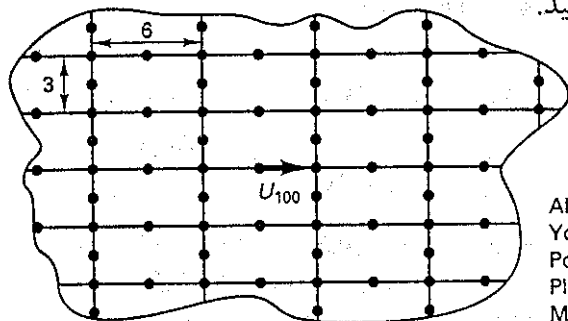
کنید. از یک نمای مایل / هوایی برای رسم‌های خود استفاده کنید.



۵.۱۸. مجموعه همبسته عناصر نشان داده شده در شکل زیر در یک تحلیل عناصر محدود به

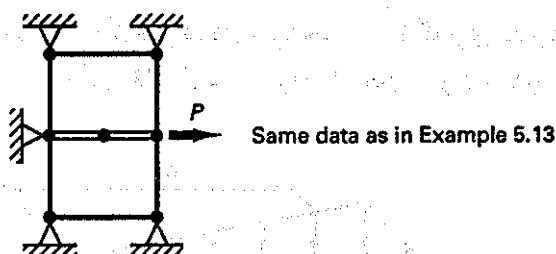
کار می‌رود. عناصر قطری ماتریس سختی و ماتریس جرم سازگار را که متناظر با درجه

آزادی U_{100} می‌باشند محاسبه کنید.



All elements of equal size
Young's modulus E
Poisson's ratio $\nu = 0.3$
Plane stress analysis, thickness = 0.5
Mass density ρ

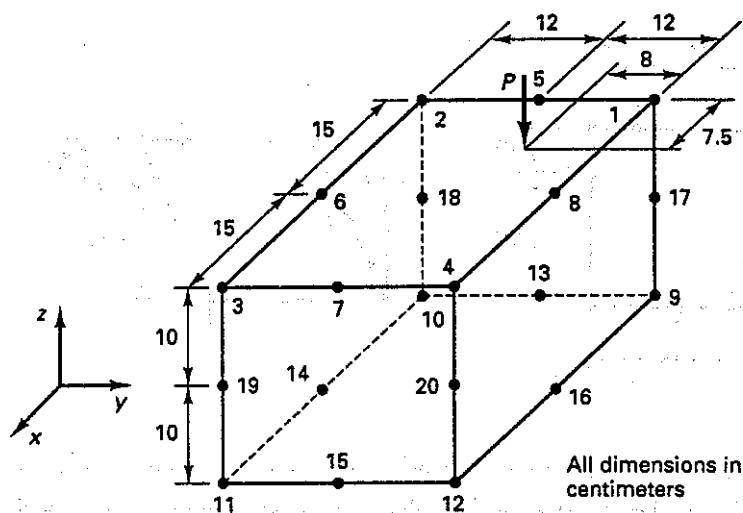
۵.۱۹. مسأله ارائه شده در مثال ۵.۱۳ با استفاده از دو عنصر تنش مسطح پنج گرهی و یک عنصر میله‌ای سه گرهی مدل می‌شود:



(الف) تمامی ماتریس‌های استفاده شده در فرمول‌بندی معادلات تعادل حاکم را با جزییات کامل ایجاد کنید ولی انتگرال‌گیری را انجام ندهید.

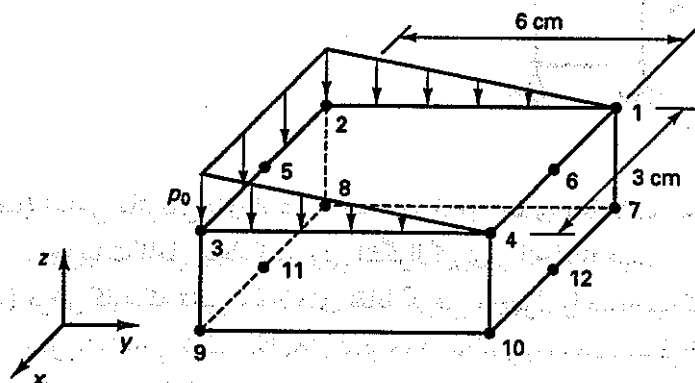
(ب) فرض کنید که تغییر مکان‌های نقاط گرهی مجهول را محاسبه کرده‌اید. در این صورت تمامی تغییر مکان‌ها و تنش‌ها در عناصر را به صورت گرافیک در یک نمای مایل/هوایی ارائه نمایید.

۵.۲۰. عنصر آجری شکل زیر تحت اثر یک بار تمرکز در مکان نشان داده شده قرار دارد. بارهای نقاط گرهی سازگار را محاسبه نمایید.



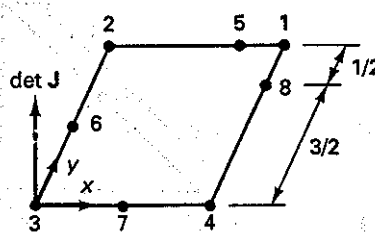
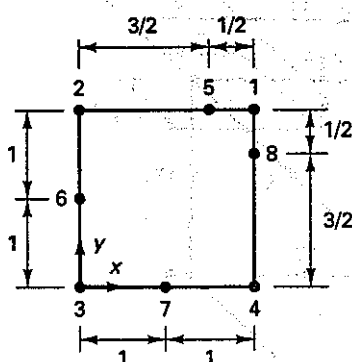
۵.۲۱. از عنصر ارائه شده در مثال ۵.۲۰ در یک تحلیل دینامیکی استفاده می‌شود. یک ماتریس جرم متمرکز معقول را برای عنصر مذکور ایجاد نمایید، از $\rho = 7.8 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$ استفاده کنید.

۵.۲۲. عنصر سه بعدی ۱۲ گرهی شکل زیر تحت اثر بارگذاری فشاری نشان داده شده قرار دارد. بردار بار سازگار نقاط گرهی را برای گره‌های ۱ و ۲ و ۷ و ۸ محاسبه کنید.

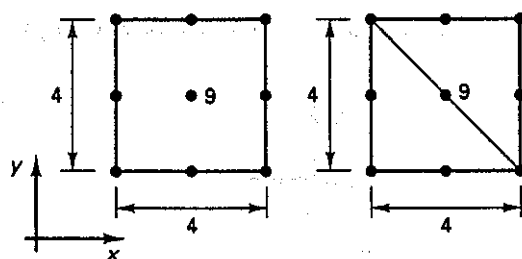


Pressure loading varies linearly with y and is constant in x

۵.۲۳. ماتریس ژاکوبی J عناصر زیر را به صورت تابعی از x و y تعیین کنید و $\det J$ را در «روی» عنصر (در نمای مایل / هوایی) رسم نمایید.



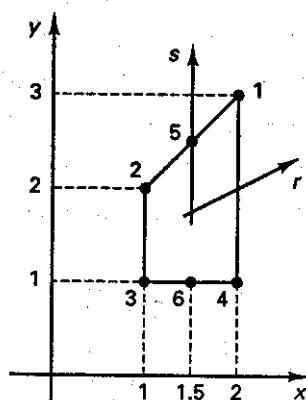
۵.۲۴. برای گره ۹، توابع درونیابی تغییر مکان و مشتقات نسبت به x آنها را برای عنصر نه گرهی و مجموعه همبسته دو عنصر مثلثی ۶ گرهی (که با استفاده از توابع درونیابی ارائه شده در شکل ۵.۱۱ تشکیل شده‌اند) رسم کنید.



۵.۲۵. ثابت کنید که توابع درونیابی (۵.۳۶)، با Δh تعریف شده در ۵.۳۷، فرض‌های تغییر مکانی مشابهی، مانند توابع شکل ۵.۱۱ را تعریف می‌کنند (توجه شود که مبدا‌های مختصات مورد استفاده در هر دو فرمول‌بندی متفاوت‌اند).

۵.۲۶. یک عنصر آجری ۲۰ گرهی را برای ایجاد یک چهاروجهی ۱۰ گرهی ایزوتروپیک فضایی متلاشی کنید (با استفاده از متلاشی نمودن اضلاع نشان داده شده در E ۵.۱۶). تعیین کنید تصحیحی را که باید به تابع درونیابی h_{16} عنصر آجری اعمال شود تا اینکه فرض تغییر مکان h_6 از چهاروجهی به دست آید (ارائه شده در شکل ۵.۱۳).

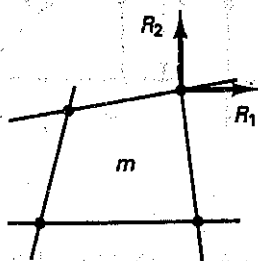
۵.۲۷. عنصر محدود کرنش مسطح تک پارامتری شش گرهی نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید:



(الف) توابع درونیابی $h_i(r, s)$ و $i = 1, \dots, 6$ عنصر را ایجاد کنید.

(ب) با جزییات مربوطه ثابت کنید عنصر محدود مذکور هنگامی که در یک مجموعه همبسته عناصر محدود سازگار مورد استفاده قرار می‌گیرد، تمامی شرایط همگرایی را تأمین می‌کند (یا نمی‌کند).

۵.۲۸. یک عنصر عمومی چهارگرهی تک‌پارامتری را در یک مجموعه همبسته عناصر بگونه‌ای که در شکل نشان داده شده است در نظر بگیرید.



Either plane strain or plane stress condition

(الف) ثابت کنید که نیروهای نقاط گرهی تعریف شده در زیر:

$$\mathbf{F}^{(m)} = \int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \boldsymbol{\sigma}^{(m)} dV^{(m)}$$

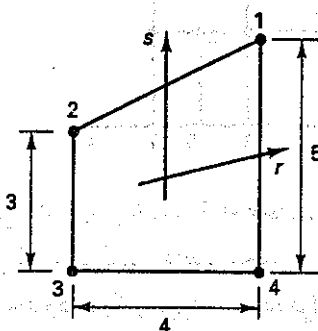
برای عنصر m در حال تعادل هستند که در آن $\boldsymbol{\sigma}^{(m)} = \mathbf{CB}^{(m)}\mathbf{U}$ محاسبه شده است.

(ب) نشان دهید که مجموع نیروهای نقاط گرهی در هر گره با بارهای خارجی وارده R_i (که شامل نیروهای سطحی نیز می‌باشند) در حال تعادل اند (راهنمایی: رک، به: بخش ۴.۲.۱، شکل ۴.۲).

۵.۲۹. جدول ۵.۱ و حالت اعوجاج زاویه‌ای را در نظر بگیرید. ثابت کنید که عبارات مندرج برای عناصر ۱۲ گرهی و ۱۶ گرهی در حقیقت صحیح می‌باشند.

۵.۳۰. جدول ۵.۱ و حالت اعوجاج لبه با انحنا را در نظر بگیرید. ثابت کنید که عبارات مندرج برای عناصر ۸، ۹، ۱۲ و ۱۶ گرهی صحیح می‌باشند.

۵.۳۱. عنصر ۴/۱ تک‌پارامتری u/p نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. تمامی ماتریس‌های مورد نیاز برای تعیین ماتریس سختی عنصر را ایجاد نمایید ولی انتگرال‌گیری را انجام ندهید.



Bulk modulus κ
Shear modulus G

۵.۴ فرمول‌بندی عناصر سازه‌ای

مفاهیم درونیابی‌های هندسی و تغییر مکان که برای فرمول‌بندی عناصر پیوسته دوبعدی و سه بعدی مورد استفاده قرار گرفتند، می‌توانند در تعیین ماتریس‌های عناصر سازه‌ای تیری، صفحه‌ای و پوسته‌ای نیز به کار روند. در فرمول‌بندی عناصر محیط پیوسته، تغییر مکان‌های u و v (هر کدام که قابل کاربرد باشند) برحسب تغییر مکان‌های نقاط گرهی از همان نوع درونیابی می‌شوند، در حالی که در فرمول‌بندی عناصر سازه‌ای تغییر مکان‌های u و v و w برحسب تغییر مکان‌ها و دوران‌های میان - سطح درونیابی می‌گردند. خواهیم دید که اساساً این روش معادل فرمول‌بندی عنصر تک پارامتری محیط پیوسته با قیدهای تغییر مکانی است. به علاوه این فرض مهم نیز البته در نظر گرفته می‌شود که تنش عمود بر میان - سطح صفر است. با توجه بدین دلایل است که عناصر سازه‌ای، عناصر تک پارامتری تباهیده نامیده شده‌اند؛ ولی اغلب به این گونه عناصر صرفاً به عنوان عناصر تک پارامتری رجوع خواهیم داد.

اگر فرمول‌بندی عناصر سازه‌ای مورد نظر باشد، باید یادآوری شویم که به طور خلاصه در بخش ۴.۲.۳ بحث کردیم که چگونه عناصر تیری، صفحه‌ای و پوسته‌ای را می‌توان با استفاده از نظریه تیر Bernoulli و نظریه صفحه Kirchhoff فرمول‌بندی کرد که در آنها از تغییر شکل‌های برشی صرف نظر می‌شود. با استفاده از نظریه Kirchhoff، تأمین پیوستگی متقابل عناصر در تغییر مکان‌ها و دوران‌های لبه دشوار است، زیرا دوران‌های صفحه (یا پوسته) با استفاده از تغییر مکان‌های جانبی محاسبه می‌شوند. همچنین با استفاده از یک مجموعه همبسته عناصر تخت برای نمایش سازه پوسته‌ای، ممکن است که نسبتاً تعداد زیادی از عناصر برای نمایش هندسه پوسته با دقت کافی مورد نیاز باشد.

هدف مورد نظر در این بخش بحث در مورد یک روش جایگزین برای فرمول‌بندی عناصر تیری، صفحه‌ای و پوسته‌ای است. مبنای این روش نظریه‌ای است که اثر تغییر شکل‌های برشی را نیز در نظر می‌گیرد. در این نظریه، تغییر مکان‌ها و دوران‌های عمود بر میان - سطح، متغیرهای مستقلی هستند و شرایط پیوستگی متقابل عناصر در این کمیت‌ها را می‌توان مستقیماً مانند تحلیل محیط‌های پیوسته، تأمین نمود. همچنین اگر مفاهیم درونیابی تک پارامتری مورد استفاده قرار گیرند، در این صورت هندسه سطوح پوسته‌ای با انحناء، درونیابی می‌شود و در نتیجه می‌تواند با دقت بالایی مدل شود. در بخش‌های بعدی، نخست در مورد فرمول‌بندی عناصر تیری و پوسته متقارن محوری بحث می‌کنیم که در آن می‌توانیم با جزییات بیشتر اصول اساسی مورد استفاده را نشان دهیم و سپس به فرمول‌بندی عناصر عمومی صفحه‌ای و پوسته‌ای خواهیم پرداخت.

۵.۴.۱ عناصر تیری و پوسته متقارن محوری

نخست در مورد برخی فرض‌های اساسی در ارتباط با فرمول‌بندی عناصر تیری بحث می‌کنیم. فرض اساسی در تحلیل خمش تیر بدون اثر تغییر شکل‌های برشی این است که عمود بر میان - سطح (محور خنثی) تیر در طی تغییر شکل مستقیم باقی می‌ماند و نیز دوران زاویه‌ای آن مساوی با شیب میان - سطح تیر می‌باشد. این فرض سینماتیک که در شکل (الف) ۵.۱۸ نشان داده شده است، مربوط به نظریه تیر Bernoulli بوده و منجر به ایجاد معادلات دیفرانسیلی مشهور تعادل خمش تیر می‌شود که در آن تنها متغیر، تغییر مکان جانبی w است (ر.ک. به: مثال ۳.۲۰). بنابراین با استفاده از عناصر تیری که با این نظریه فرمول‌بندی شده‌اند، پیوستگی تغییر مکان بین عناصر ایجاد می‌کند که w و dw/dx پیوسته باشند.

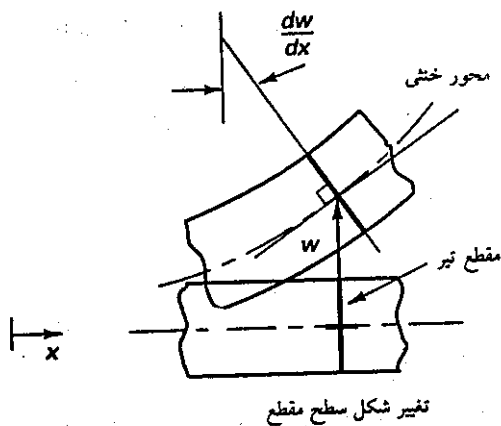
حال اگر تحلیل خمش تیر با ملاحظه اثر تغییر شکل‌های برشی را در نظر بگیریم، این فرض حفظ می‌شود که یک مقطع مسطح که در ابتدا عمود بر محور خنثی می‌باشد مسطح باقی می‌ماند ولی به دلیل تغییر شکل‌های برشی این مقطع عمود بر محور خنثی باقی نمی‌ماند. همانگونه که در شکل (ب) ۵.۱۸ نشان داده شده است، دوران کلی سطحی که در ابتدا عمود بر محور خنثی تیر می‌باشد به وسیله دوران مماس بر محور خنثی و تغییر شکل برشی زیر مشخص می‌شود:

$$\beta = \frac{dw}{dx} - \gamma \quad (5.56)$$

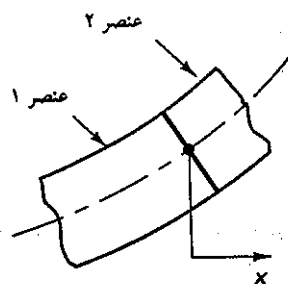
که در آن γ کرنش برشی ثابت در سرتاسر مقطع می‌باشد. این فرض سینماتیک مربوط به نظریه تیر Timoshenko است (ر.ک. به: S. H. Crandall و N. C. Dahl and T. J. Lardner [A]). از آنجا که تنش و کرنش برشی واقعی در روی مقطع تغییر می‌کند، کرنش برشی γ در (۵.۵۶)، یک کرنش ثابت تعادل یک سطح مقطع برشی A_s است:

$$\tau = \frac{V}{A_s}; \quad \gamma = \frac{\tau}{G}; \quad k = \frac{A_s}{A} \quad (5.57)$$

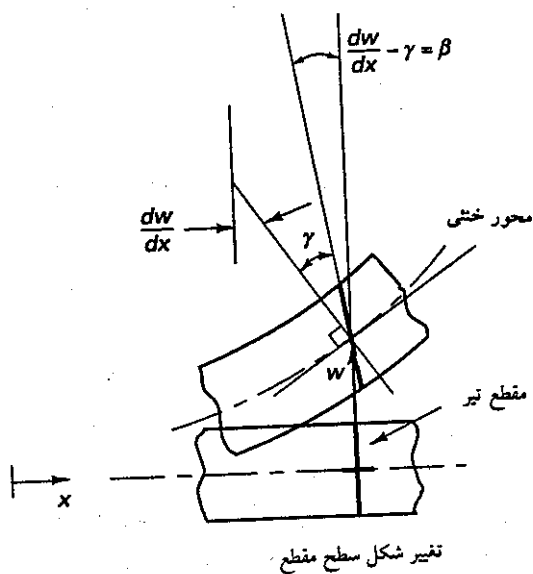
که در آن V نیروی برشی در مقطع مورد نظر است. فرض‌های مختلفی ممکن است که برای تعیین یک فاکتور معقول k مورد استفاده قرار گیرند (ر.ک. به: S. Timoshenko and J. N. Goodier [A] و K. Washizu [B]). یک روش ساده برای تعیین فاکتور تصحیح برشی، هنگامی که در A_s عمل می‌کند، استفاده از این شرط است که تنش برشی ثابت (۵.۵۷) باید منجر به همان انرژی کرنشی برشی شود که مربوط به تنش برشی واقعی (تعیین شده از نظریه تیر) است که در روی سطح مقطع واقعی A عمل می‌کند. مثال زیر را در نظر بگیرید.



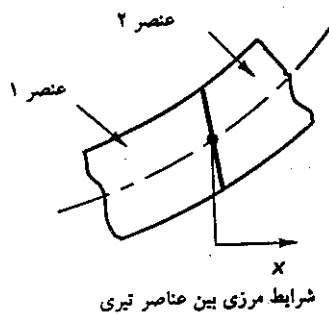
(الف) تغییر شکل‌های تیر بدون اثر برش



$$w \Big|_{x=0^-} = w \Big|_{x=0^+} ; \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0^-} = \frac{dw}{dx} \Big|_{x=0^+}$$



(ب) تغییر شکل‌های تیر با در نظر گرفتن اثر برش



$$w \Big|_{x=0^-} = w \Big|_{x=0^+}$$

$$\beta \Big|_{x=0^-} = \beta \Big|_{x=0^+}$$

شکل ۵.۱۸ فرض‌های تغییر شکل تیر

مثال ۵.۲۳: فاکتور تصحیح k را برای تیری با سطح مقطع مستطیلی با عرض b و عمق h تعیین کنید.
حل:

انرژی کرنشی U تیر در واحد طول عبارت است از:

$$U = \int_A \frac{1}{2G} \tau_a^2 dA \quad (\text{الف})$$

که در آن τ_a تنش برش واقعی بوده و G ضریب برشی و A سطح مقطع تیر می‌باشند،
 $A = bh$

در مدل عناصر محدود مورد نظر، طبق فرض، کرنش برشی در روی سطح مقطع تیر ثابت است [ر.ک. به: (۵.۵۶)]. از آنجا که در واقعیت کرنش برشی در سطح مقطع تیر تغییر می‌کند، لذا می‌خواهیم یک سطح مقطع معادل تیر A_s را برای مدل عناصر محدود مورد نظر پیدا کنیم. این هم‌ارزی براساس مساوی قرار دادن انرژی‌های کرنشی برشی استوار می‌باشد. بنابراین با استفاده از U ، که در (الف) داده شده است، و با داشتن توزیع تنش برشی واقعی، می‌توان A_s را از رابطه زیر محاسبه کرد:

$$\int_A \frac{1}{2G} \tau_a^2 dA = \int_{A_s} \frac{1}{2G} \left(\frac{V}{A_s} \right)^2 dA_s \quad (\text{ب})$$

که در آن V کل نیروی برشی در مقطع است:

$$V = \int_A \tau_a dA \quad (\text{پ})$$

اگر از $k = A_s/A$ استفاده کنیم، در این صورت از (ب) نتیجه زیر حاصل می‌گردد:

$$k = \frac{V^2}{A \int_A \tau_a^2 dA}$$

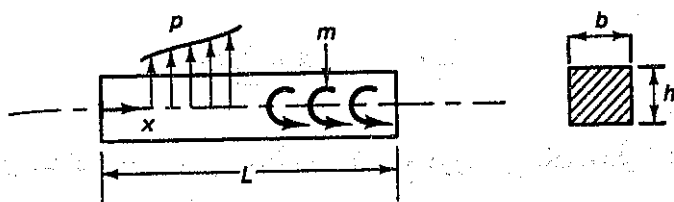
حال از (ب) و (پ) برای تیر با سطح مقطع مستطیلی استفاده می‌کنیم. نظریه مقدماتی تیر نتیجه زیر را به دست می‌دهد (ر.ک. به: [A] S. H. Crandall و N. C. Dahl and T. J. Lardner):

$$\tau_a = \frac{3}{2} \frac{V}{A} \left[\frac{(h/2)^2 - y^2}{(h/2)^2} \right]$$

که نتیجه $k = \frac{8}{5}$ حاصل می‌شود.

فرمول‌بندی عناصر محدود یک عنصر تیری با فرض (۵.۵۶)، با استفاده از عبارات بنیادی کار مجازی در (۴.۱۹) الی (۴.۲۲) به دست می‌آید. در ادامه بحث نخست با هدف توضیح روش مورد استفاده، فرمول‌بندی خاص ماتریس‌های عنصری تیری ساده دویبعی نشان

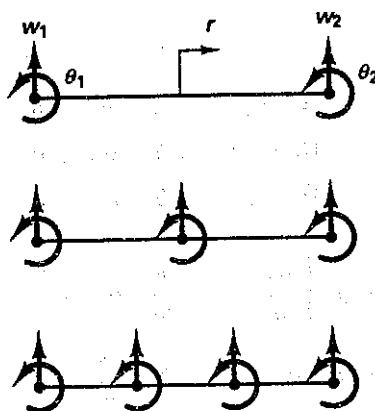
داده شده در شکل ۵.۱۹ را در نظر می‌گیریم و سپس در مورد فرمول‌بندی عناصر تیری سه بعدی عمومی و فرمول‌بندی عناصر پوسته‌ای متقارن محوری بحث می‌کنیم.



(الف) تیر با بارگذاری وارده

مدول یانگ E امدول برشی G

$$k = \frac{5}{6}; A = hb; I = \frac{bh^3}{12}$$



(ب) مدل‌های ۲ و ۳ و ۴ گرهی، $\theta_i = \beta_i, i = 1, \dots, q$ (توابع

درونیابی در شکل ۵.۳ ارائه شده‌اند)

شکل ۵.۱۹ فرمول‌بندی عنصر تیری دوبعدی

عناصر تیری مستقیم دوبعدی

شکل ۵.۱۹ عنصر تیری دوبعدی مورد نظر با سطح مقطع مستطیلی را نشان می‌دهد. با استفاده از رابطه عمومی اصل کار مجازی و با داشتن فرض‌های مذکور داریم (ر.ک. به: تمرین ۵.۳۲):

$$EI \int_0^L \left(\frac{d\beta}{dx} \right) \left(\frac{d\bar{\beta}}{dx} \right) dx + GAk \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} - \beta \right) \left(\frac{d\bar{w}}{dx} - \bar{\beta} \right) dx = \int_0^L p \bar{w} dx + \int_0^L m \bar{\beta} dx \quad (5.58)$$

که در آن p و m بار جانبی و لنگر خمشی در واحد طول می‌باشند. حال با استفاده از درونیابی‌های زیر:

$$w = \sum_{i=1}^q h_i w_i; \quad \beta = \sum_{i=1}^q h_i \theta_i \quad (5.59)$$

که در آن q مساوی تعداد گره‌های مورد استفاده و h_i توابع درونیابی یک بعدی مندرج در شکل ۵.۳ می‌باشند، می‌توان مستقیماً مفاهیم فرمول‌بندی‌های تک‌پارامتری مورد بحث در بخش ۵.۳ را برای ایجاد تمامی ماتریس‌های عنصری مربوطه به کار برد. فرض کنید که:

$$\begin{aligned} w &= \mathbf{H}_w \hat{\mathbf{u}}; & \beta &= \mathbf{H}_\beta \hat{\mathbf{u}} \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \mathbf{B}_w \hat{\mathbf{u}}; & \frac{\partial \beta}{\partial x} &= \mathbf{B}_\beta \hat{\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (5.60)$$

که در آن داریم:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{u}}^T &= [w_1 \dots w_q \quad \theta_1 \dots \theta_q] \\ \mathbf{H}_w &= [h_1 \dots h_q \quad 0 \dots 0] \\ \mathbf{H}_\beta &= [0 \dots 0 \quad h_1 \dots h_q] \end{aligned} \quad (5.61)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_w &= J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial r} & \dots & \frac{\partial h_q}{\partial r} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_\beta &= J^{-1} \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{\partial h_1}{\partial r} & \dots & \frac{\partial h_q}{\partial r} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.62)$$

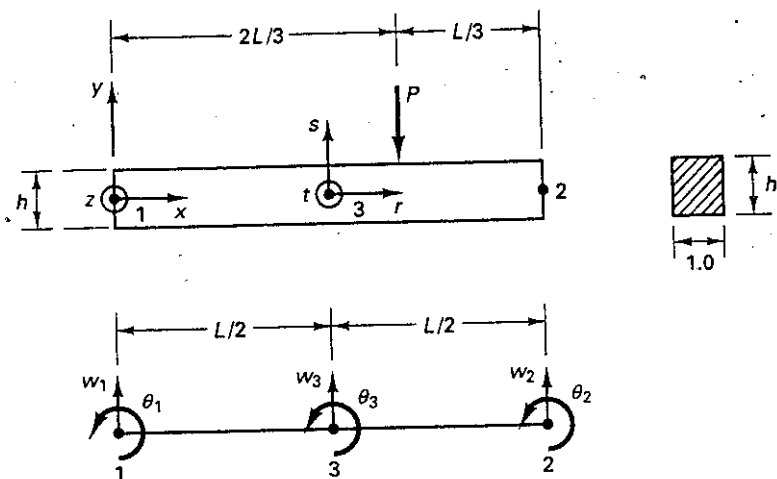
که در آن $J = \partial x / \partial r$ می‌باشد، در این صورت برای یک عنصر منفرد داریم:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= EI \int_{-1}^1 \mathbf{B}_\beta^T \mathbf{B}_\beta \det J dr + GAk \int_{-1}^1 (\mathbf{B}_w - \mathbf{H}_\beta)^T (\mathbf{B}_w - \mathbf{H}_\beta) \det J dr \\ \mathbf{R} &= \int_{-1}^1 \mathbf{H}_w^T p \det J dr + \int_{-1}^1 \mathbf{H}_\beta^T m \det J dr \end{aligned} \quad (5.63)$$

همچنین در تحلیل دینامیکی، ماتریس جرم را می‌توان با استفاده از اصل d'Alembert محاسبه نمود [ر.ک. به: (۴.۲۳)]، بنابراین داریم:

$$M = \int_{-1}^1 \begin{bmatrix} H_w \\ H_\beta \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} pbh & 0 \\ 0 & \frac{pbh^3}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_w \\ H_\beta \end{bmatrix} \det J \, dr \quad (5.64)$$

در این فرمول‌بندی‌ها از دستگاه مختصات طبیعی تیر استفاده نمودیم، زیرا روش مؤثری در فرمول‌بندی عناصر عمومی تیری، صفحه‌ای و پوسته‌ای می‌باشد. با وجود این، هنگامی که یک تیر مستقیم با سطح مقطع ثابت را در نظر می‌گیریم، انتگرال‌ها را نیز می‌توان به طور مؤثر بدون استفاده از دستگاه مختصات طبیعی، بگونه‌ای که در مثال زیر نشان داده شده است، تعیین نمود. مثال ۵.۲۴: ماتریس سختی و بردار بار عنصر تیری سه گرهی نشان داده شده در شکل ۵.۲۴ را با جزئیات مربوطه تعیین کنید.



شکل ۵.۲۴ عنصر تیری سه گرهی

حل:

توابع درونیابی مورد استفاده در شکل ۵.۳ لیست شده‌اند. این توابع برحسب \$r\$ داده شده و منجر به نتیجه زیر می‌شود:

$$x = \sum_{i=1}^3 h_i x_i$$

با استفاده از \$x_1 = 0\$، \$x_2 = L\$ و \$x_3 = L/2\$ نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$x = \frac{L}{2}(1 + r)$$

بنابراین توابع درونیابی برحسب x عبارتند از:

$$h_1 = \frac{2x^2}{L^2} - \frac{3x}{L} + 1$$

$$h_2 = \frac{2x^2}{L^2} - \frac{x}{L}$$

$$h_3 = \frac{4x}{L} - \frac{4x^2}{L^2}$$

با استفاده از نمادگذاری $\partial/\partial x \equiv ()'$ ، نتایج زیر به دست می‌آید:

$$h'_1 = \frac{4x}{L^2} - \frac{3}{L}$$

$$h'_2 = \frac{4x}{L^2} - \frac{1}{L}$$

$$h'_3 = \frac{4}{L} - \frac{8x}{L^2}$$

بنابراین با درجات آزادی بگونه‌ای که در (۵.۶۱) مرتب شده‌اند، داریم:

$$K = \frac{Eh^3}{12} \int_0^L \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ h'_1 \\ h'_2 \\ h'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & h'_1 & h'_2 & h'_3 \end{bmatrix} dx$$

$$+ \frac{5Gh}{6} \int_0^L \begin{bmatrix} h'_1 \\ h'_2 \\ h'_3 \\ -h_1 \\ -h_2 \\ -h_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h'_1 & h'_2 & h'_3 & -h_1 & -h_2 & -h_3 \end{bmatrix} dx$$

$$R^T = -P \begin{bmatrix} -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{8}{9} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

و

عنصر نشان داده شده در شکل ۵.۱۹ یک عنصر مبتنی بر تغییر مکان صرف می‌باشد (با فرض انتگرال‌گیری کامل تمامی انتگرال‌ها) و به شرطی می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد که عنصر دارای سه یا چهار گره باشد (و گره‌های داخلی به ترتیب در وسط عنصر و نقاط $\frac{1}{3}$ طول قرار گرفته باشند). با وجود این اگر عنصر دوگره‌ای به کار رود یا نقاط داخلی عناصر سه‌گره‌ای و چهارگره‌ای به ترتیب در وسط عنصر و نقاط $\frac{1}{3}$ طول قرار نگیرند، در این صورت استفاده

از این عنصر توصیه نمی‌شود، زیرا تغییر شکل‌های برشی با دقت کافی نمایش داده نمی‌شوند. این نقص به ویژه هنگامی که عنصر نازک می‌باشد بیشتر خود را نشان می‌دهد. برای اینکه فهم بیشتری در مورد رفتار این عناصر در حالت تیر نازک پیدا کنیم، یادآوری می‌کنیم که اصل کار مجازی هم‌ارز مانا بودن پتانسیل کلی است (ر.ک. به: مثال ۴.۴). برای فرمول‌بندی تیر، پتانسیل کلی عبارت است از:

$$\Pi = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d\beta}{dx} \right)^2 dx + \frac{GAk}{2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} - \beta \right)^2 dx - \int_0^L pw dx - \int_0^L m\beta dx \quad (5.65)$$

که در آن اولین و دومین انتگرال به ترتیب نشانگر انرژی‌های خمشی و کرنش برشی می‌باشند انتگرال‌های سوم و چهارم پتانسیل بارها را نشان می‌دهند. حال پتانسیل کلی Π را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\bar{\Pi} = \int_0^L \left(\frac{d\beta}{dx} \right)^2 dx + \frac{GAk}{EI} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} - \beta \right)^2 dx \quad (5.66)$$

که در آن از سهم‌های بار در (۵.۶۵) صرف‌نظر شده و بر $\frac{1}{2}EI$ تقسیم شده است. رابطه (۵.۶۶) اهمیت نسبی اثرات خمش و برش را در ماتریس سختی یک عنصر نشان می‌دهد که در آن یادآوری می‌کنیم که فاکتور GAk/EI در عبارت برشی، هنگامی که یک عنصر نازک مورد نظر باشد، می‌تواند بسیار بزرگ باشد. این فاکتور را می‌توان به عنوان یک عدد تاوان تلقی کرد (ر.ک. به: بخش ۳.۴.۱)؛ به عبارت دیگر می‌توان نوشت:

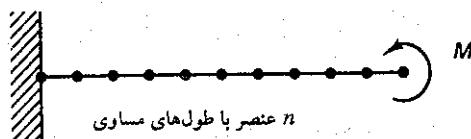
$$\bar{\Pi} = \int_0^L \left(\frac{d\beta}{dx} \right)^2 dx + \alpha \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} - \beta \right)^2 dx; \quad \alpha = \frac{GAk}{EI} \quad (5.67)$$

که در آن هنگامی که $h \rightarrow 0$ ، در این صورت $\alpha \rightarrow \infty$. این بدان معنی است که هر اندازه تیر بیشتر نازک می‌شود به قید تغییر شکل‌های برشی صفر (به عبارت دیگر $dw/dx = \beta$ با $\gamma = 0$) نزدیک می‌شویم.

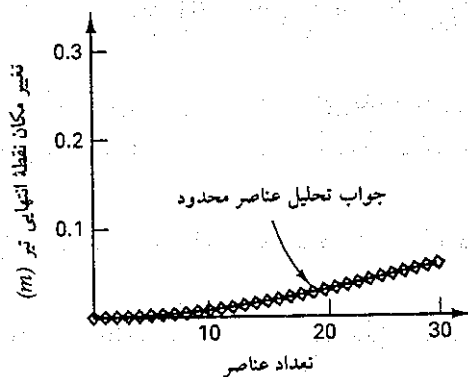
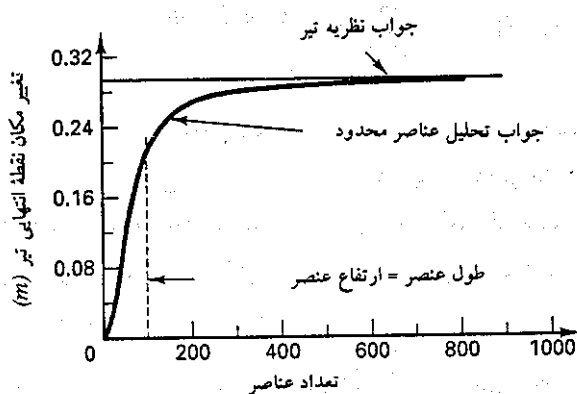
این استدلال برای مدل پیوسته واقعی نیز صادق است که در آن شرط مانا بودن $\bar{\Pi}$ حاکم می‌باشد.

حال اگر گسسته‌سازی عناصر محدود را در نظر بگیریم، این نکته حائز اهمیت است که فرض‌های تغییر مکان عناصر محدود در β و w قبول می‌کنند که به ازای مقادیر بزرگ α ، تغییر شکل‌های برشی می‌توانند در سرتاسر میدان عنصر کوچک باشند. اگر به علت فرض‌های استفاده شده در w و β ، تغییر شکل‌های برشی در هر نقطه‌ای نتوانند کوچک - و در حقیقت

صفر - باشند، در این صورت یک انرژی کرنش برشی نادرست (که در مقایسه با انرژی خمشی می‌تواند بزرگ باشد) در تحلیل وارد می‌شود. هنگامی که سازه تیری نازک است، این خطا موجب تغییر مکان‌های بسیار کوچکتر از مقادیر واقعی خواهد شد. بنابراین در چنین حالاتی مدل‌های عناصر محدود بیش از اندازه سخت می‌شوند.



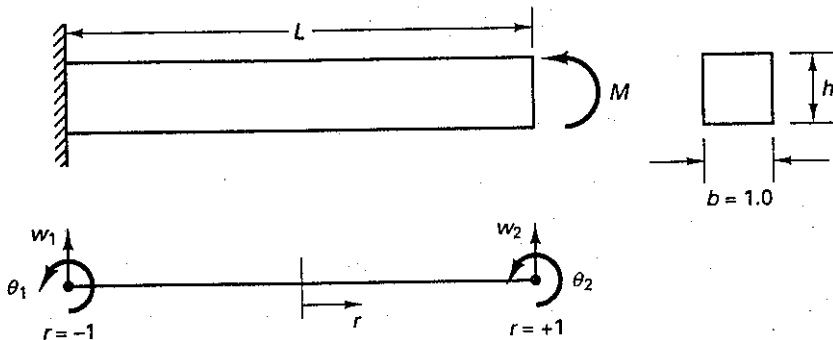
سطح مقطع مربعی، ارتفاع $m = 0.1$
 عنصر تیری دوگره‌ای (انتهای‌گیری نام)
 مدول یانگ E



شکل ۵.۲۰ جواب یک مسئله تیر طرّه‌ای، تغییر مکان نقطه انتهایی تیر در برابر تعداد عناصر مورد استفاده، نمایش
 قفل شوندگی عناصر

این پدیده هنگامی که عنصر تیری دوگرهی شکل ۵.۱۹ مورد استفاده قرار می‌گیرد، مشاهده می‌شود، از اینرو نباید در تحلیل سازه‌های شامل تیرهای نازک به کار رود؛ و این نتیجه‌گیری برای عناصر صفحه‌ای و پوسته‌ای از مرتبه پایین‌تر مبتنی بر تغییر مکان صرف که در بخش ۵.۴.۲ مورد بحث قرار خواهند گرفت نیز قابل اعمال است. رفتار بسیار سختی که عناصر نازک از خود نمایش می‌دهند، قفل شوندگی برشی عنصر نامیده می‌شود. شکل ۵.۲۰، به عنوان یک مثال، قفل شوندگی با استفاده از عنصر مبتنی بر تغییر مکان دوگرهی را نشان می‌دهد. پدیده قفل شوندگی برشی را در مثال زیر مورد مطالعه قرار می‌دهیم (ر.ک. به: بخش ۴.۵.۷).

مثال ۵.۲۵: یک عنصر تیری تک پارامتری دوگرهی را در نظر بگیرید که یک تیر طره‌ای را که تنها تحت اثر یک لنگر انتهایی قرار دارد مدل می‌کند (ر.ک. به: شکل ۵.۲۵ E). تعیین کنید چه مقادیری برای θ_2 و w_2 با فرض اینکه کرنش برشی صفر است به دست می‌آیند.



شکل ۵.۲۵ E عنصر دوگرهی که یک تیر طره‌ای را مدل می‌کند.

حل:

درون‌یابی‌های مورد استفاده برای w و β با اطلاعات داده شده، عبارتند از:

$$\beta = \frac{1+r}{2} \theta_2$$

$$w = \frac{1+r}{2} w_2$$

بنابراین کرنش برشی عبارت است از:

$$\gamma = \frac{w_2}{L} - \frac{1+r}{2} \theta_2$$

به ازای لنگر انتهایی وارده، کرنش برشی صفر خواهد بود. با اعمال این شرط نتیجه زیر

حاصل می‌شود:

$$0 = \frac{w_2}{L} - \frac{1+r}{2} \theta_2 \quad (\text{الف})$$

برای اینکه عبارت مذکور در امتداد تیر مساوی صفر باشد (به عبارت دیگر برای هر مقدار $-1 \leq r \leq +1$)، روشن است که باید داشته باشیم: $w_2 = \theta_2 = 0$. بنابراین تنها هنگامی کرنش برشی در تیر مساوی صفر خواهد بود که هیچ نوع تغییر مکانی وجود نداشته باشد! به طور مشابه اگر بخواهیم که (الف) به ازای دو نقطه گوسی $r = \pm 1/\sqrt{3}$ صادق باشد (به عبارت دیگر اگر از انتگرال‌گیری گوسی دو نقطه‌ای استفاده کنیم)، در این صورت دو معادله زیر را به دست می‌آوریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{1+1/\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1-1/\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

از آنجا که ماتریس ضریب غیرتکین است، تنها جواب ممکن $w_2 = \theta_2 = 0$ می‌باشد. البته این همان نتیجه‌ای است که پیش از این به دست آمده است، زیرا مساوی صفر قرار دادن کرنش برشی متغیر خطی در دو نقطه به معنی اعمال یک کرنش برشی صفر در سرتاسر عنصر می‌باشد. حالا می‌توان از (الف) جهت بررسی نتیجه حاصله در صورت صفر قرار دادن کرنش برشی در نقطه میانی تیر (به عبارت دیگر در $r = 0$) نیز استفاده نمود. در این حالت، از (الف) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$w_2 = \frac{\theta_2}{2} L \quad (\text{ب})$$

بنابراین اگر یک مقدار کرنش برشی ثابت به صورت زیر فرض می‌کردیم:

$$\gamma = \frac{w_2}{L} - \frac{\theta_2}{2}$$

در این صورت ممکن بود که عنصر بسیار جالب توجهی به دست آید. در واقع از این فرض در مثال ۴.۳۰ استفاده کردیم.

روش‌های متنوعی را می‌توان برای اصلاح فرمول‌بندی عنصر تیری مبتنی بر تغییر مکان صرف - و فرمول‌بندی عناصر خمش صفحه‌ای تک پارامتری مبتنی بر تغییر مکان صرف - به کار برد تا اینکه عناصری به دست می‌آیند که کارا باشند و خاصیت قفل شوندگی از خود نشان ندهند. نکته اصلی چنین فرمول‌بندی‌هایی این است که عنصر حاصله باید قابل اطمینان و کارا باشد. بدین معنی که ماتریس سختی عنصر بویژه نباید شامل مد انرژی صفر غیر واقعی باشد و

نیز عنصر باید دارای ظرفیت پیش‌بینی کنندگی بالایی تحت اثر شرایط عمومی هندسی و بارگذاری باشد. تأمین این شرایط در عناصر تیری به طور قابل ملاحظه‌ای آسانتر از تأمین آنها در عناصری عمومی صفحه‌ای و پوسته‌ای می‌باشد.

یک عنصر تیری مؤثر با استفاده از درونیابی آمیخته تغییر مکان‌ها و کرنش‌های برشی جانبی حاصل می‌گردد. این درونیابی آمیخته کاربردی از روش عمومی‌تر مورد استفاده در فرمول‌بندی عناصر خمش صفحه‌ای و پوسته‌ای می‌باشد (ر.ک. به: بخش ۵.۴.۲).

از بحث انجام شده در بخش ۵.۲۵ نتیجه می‌شود که برای حصول امکان وجود کرنش برشی جانبی صفر در عنصر، می‌توان برای یک عنصر با q گره، درونیابی‌های زیر را فرض کرد (همچنین ر.ک. به: مثال ۴.۳۰):

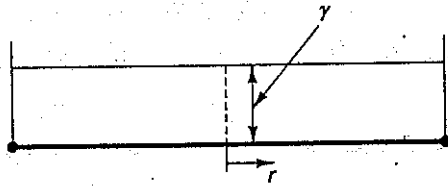
$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_{i=1}^q h_i w_i \\ \beta &= \sum_{i=1}^q h_i \theta_i \end{aligned} \right\} \quad (5.68)$$

$$\gamma = \sum_{i=1}^{q-1} h_i^* \gamma_i^{DI} \quad (5.69)$$

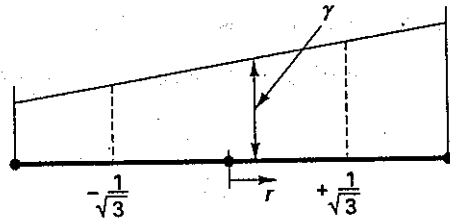
در این جا h_i توابع درونیابی تغییر مکان و دوران مقطع برای q گره و h_i^* توابع درونیابی برای کرنش‌های برشی جانبی می‌باشند. این توابع همراه با $(q-1)$ مقدار گسترده γ_i^{DI} می‌باشند و γ_i^{DI} کرنش برشی در نقطه گوسی i است که مستقیماً از درونیابی‌های تغییر مکان / دوران مقطع به دست می‌آید (به عبارت دیگر با درونیابی تغییر مکان)؛ بنابراین داریم:

$$\gamma \Big|_{g_i}^{DI} = \left(\frac{dw}{dx} - \beta \right) \Big|_{g_i} \quad (5.70)$$

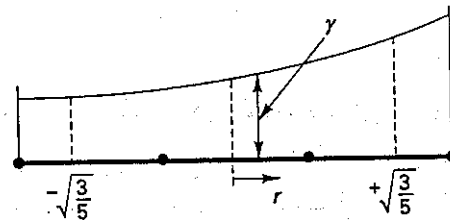
شکل ۵.۲۱ درونیابی‌های کرنش برشی مورد استفاده برای عناصر تیری دو، سه و چهار گرهی را نشان می‌دهد. این عناصر تیری که به صورت مختلط درونیابی شده‌اند، بسیار قابل اطمینان می‌باشند، زیرا خاصیت قفل شوندگی از خود نشان نمی‌دهند، رفتار همگرایی بسیار خوبی دارند و شامل هیچ نوع مدانرژی صفر غیر واقعی نیز نمی‌باشند. برای حل مسئله شکل ۵.۲۰ جهت به دست آوردن تغییر مکان و دوران نقطه انتهایی تیر تنها لازم است که یک عنصر به کار گرفته شود. این نتیجه را می‌توان به آسانی برای عنصر دوگره‌ای با ادامه تحلیل ارائه شده در مثال ۵.۲۵ به دست آورد و عناصر سه و چهار گرهی شامل درونیابی‌های عنصر دوگره‌ای می‌باشند از اینرو با استفاده از این عناصر نیز نتیجه کامل باید به دست آید. بنابراین به دلیل استفاده از درونیابی آمیخته، بهبود قابل توجهی در رفتار عنصر حاصل می‌شود.



عنصر دوگره‌ای، γ ثابت است، G_1 مربوط به $r = 0$ می‌باشد



عنصر سه‌گره‌ای، γ به طور خطی تغییر می‌کند، G_1 و G_2 مربوط به $r = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$ می‌باشند.



عنصر چهارگره‌ای، γ به صورت سهموی تغییر می‌کند، G_1 و G_2 و G_3 مربوط به $r = \pm \sqrt{\frac{3}{5}}$ و $r = 0$ می‌باشند.



شکل ۵.۲۱ درون‌یابی‌های کرنش برشی برای عناصر تیری که به صورت آمیخته درون‌یابی شده‌اند.

همچنین یک جنبه محاسباتی جالب توجهی وجود دارد: ماتریس‌های سختی این عناصر را می‌توان با کارایی خوبی از انتگرال گرفتن مدل مبتنی بر تغییر مکان با استفاده از انتگرال‌گیری گوسی یک نقطه‌ای برای عنصر دوگره‌ای، انتگرال‌گیری گوسی دو نقطه‌ای برای عنصر سه‌گره‌ای و انتگرال‌گیری گوسی سه نقطه‌ای برای عنصر چهارگره‌ای به دست آورد. به عنوان مثال با استفاده از انتگرال‌گیری یک نقطه‌ای در تعیین ماتریس سختی عنصر دوگره‌ای فرض می‌شود که کرنش برشی جانبی ثابت است و سهم تغییر شکل‌های خمشی هنوز هم به طور کامل تعیین می‌گردد. استدلال مشابهی را نیز می‌توان برای عناصر سه‌گره‌ای و چهارگره‌ای ذکر کرد. این روش محاسباتی برای تعیین ماتریس‌های سختی عناصر را می‌توان «انتگرال‌گیری کاهش یافته»

عنصر مبتنی بر تغییر مکان نامید، ولی در حقیقت «انتگرال‌گیری تام» عنصری می‌باشد که به طور آمیخته درون‌یابی شده است. تحلیل ریاضی این گونه عناصر در بخش ۴.۵.۷ ارائه می‌شود.

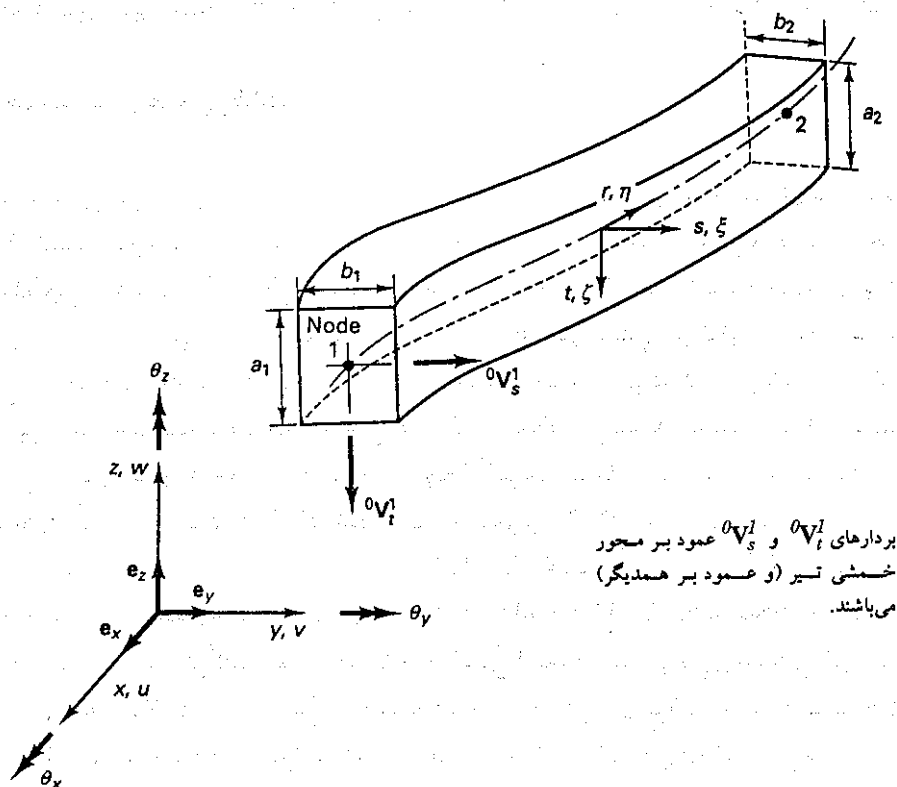
عناصر تیری عمومی بانحن

در مبحث پیشین فرض کردیم که عناصر مورد نظر مستقیم‌اند. بنابراین فرمول‌بندی براساس معادله (۵.۵۸) استوار بود. برای نیل به یک فرمول‌بندی عمومی عنصر تیری سه بعدی بانحن، روش مشابهی را دنبال می‌کنیم ولی اینک نیاز است که هندسه بانحن و تغییر مکان‌های تیری مربوط به آن را درون‌یابی کنیم. با این درون‌یابی‌ها یک عنصر مبتنی بر تغییر مکان صرف استخراج می‌شود که مانند تیرهای مستقیم بسیار سخت است و سودمند نمی‌باشد. در حالت عناصر تیری مستقیم تنها کرنش‌های برشی غیرواقعی ایجاد می‌شوند (همواره برای عنصر دوگره‌ای، و نیز برای عناصر سه گرهِی و چهار گرهِی هنگامی که گرهِ‌های داخلی در موقعیت‌های طبیعی خود قرار نگرفته‌اند؛ ر.ک. به: تمرین ۵.۳۴)، اما برای عناصر بانحن کرنش‌های غشایی غیرواقعی نیز به دست می‌آیند. بنابراین یک عنصر بانحن قفل‌شوندگی غشایی را نیز از خود نشان می‌دهد (به عنوان مثال ر.ک. به: [A] H. Stolarski and T. Bleytschko). همانگونه که پیشتر گفته شد، از طریق درون‌یابی آمیخته، عناصر تیری عمومی کارآمدی به دست می‌آیند. اینک در حالت عمل سه بعدی عمومی، کرنش‌های برشی جانبی و کرنش‌های خمشی و غشایی با استفاده از توابع ارائه شده در شکل ۵.۲۱ درون‌یابی می‌شوند. این درون‌یابی‌های کرنشی از طریق تعیین کرنش‌های مبتنی بر تغییر مکان و مساوی قرار دادن آنها با کرنش‌های فرض شده در نقاط انتگرال‌گیری گوسی، به تغییر مکان‌ها و دوران‌های نقاط گرهِی می‌پیوندند.

بنابراین نتیجه می‌گیریم که ماتریس‌های سختی عناصری را که به طور آمیخته درون‌یابی شده‌اند می‌توان به صورت عددی از طریق تعیین ماتریس‌های عناصر مبتنی بر تغییر مکان با انتگرال‌گیری گوسی در نقاط داده شده در شکل ۵.۲۱ به دست آورد.

تیر سه بعدی با سطح مقطع مستطیلی را در شکل ۵.۲۲ در نظر بگیرید و فرض کنید که نمایش صحیح صلیبت پیچشی مورد نیاز نمی‌باشد.

فرض سینماتیک اساسی در فرمول‌بندی عنصر مذکور مشابه فرضی است که در فرمول‌بندی عنصر دوبعدی شکل ۵.۱۹ مورد استفاده قرار گرفت، یعنی مقاطع مسطح که در آغاز عمود بر محور مرکزی هستند، در حین تغییر شکل مسطح و بدون اعوجاج باقی می‌مانند ولی لزوماً عمود بر محور خنثی نخواهند ماند. این فرض سینماتیک اثرات اعوجاج پیچشی را ناچیز می‌شمارد (که می‌توان با توابع تغییر مکان اضافی در فرمول‌بندی وارد نمود؛ ر.ک. به: مثال ۵.۳۷).



شکل ۵.۲۲ عنصر تیری سه بعدی

در این صورت با استفاده از مختصات طبیعی r و s و t مختصات دکارتی یک نقطه دلخواه در عنصری با q نقطه گرهی، پیش و پس از تغییر شکل عبارتند از:

$$\begin{aligned} x(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k x_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k V_{tx}^k + \frac{s}{2} \sum_{k=1}^q b_k h_k V_{sx}^k \\ y(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k y_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k V_{ty}^k + \frac{s}{2} \sum_{k=1}^q b_k h_k V_{sy}^k \\ z(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k z_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k V_{tz}^k + \frac{s}{2} \sum_{k=1}^q b_k h_k V_{sz}^k \end{aligned} \quad (5.71)$$

که در آن $h_k(r)$ توابع درون‌یابی هستند که به اختصار در شکل ۵.۳ ارائه گردیده‌اند و x, y, z = مختصات دکارتی هر نقطه در عنصر

$${}^e x_k, {}^e y_k, {}^e z_k = \text{مختصات دکارتی نقطه گرهی } k$$

$$a_k, b_k = \text{ابعاد سطح مقطع تیر در نقطه گرهی } k$$

$${}^e V_{ix}^k, {}^e V_{iy}^k, {}^e V_{iz}^k = \text{مؤلفه‌های بردار واحد } {}^e V_i^k \text{ در جهت } i \text{ در نقطه گرهی } k$$

$${}^e V_{sx}^k, {}^e V_{sy}^k, {}^e V_{sz}^k = \text{مؤلفه‌های بردار واحد } {}^e V_s^k \text{ در جهت } s \text{ در نقطه گرهی } k; {}^e V_i^k \text{ را بردارهای عمود یا بردارهای هادی در نقطه گرهی } k \text{ می‌نامیم.}$$

و اندیس بالای سمت چپ ℓ نشانگر بافتار عنصر می‌باشد، به عبارت دیگر $\ell=0$ بافتار اولیه را نشان می‌دهد در حالی که $\ell=1$ مربوط به بافتار عنصر در وضعیت تغییر شکل یافته می‌باشد.

در اینجا فرض می‌کنیم که بردارهای ${}^0 V_i^k$ و ${}^0 V_s^k$ عمود بر محور خنثای تیر بوده و بر همدیگر نیز عمود می‌باشند. با وجود این می‌توان این شرط را نادیده گرفت، همانگونه که در فرمول‌بندی عنصر پوسته‌ای نادیده گرفته می‌شود (ر.ک. به: بخش ۵.۴.۲).

مؤلفه‌های تغییر مکان در هر نقطه‌ای از عنصر عبارتند از:

$$\begin{aligned} u(r, s, t) &= {}^1 x - {}^0 x \\ v(r, s, t) &= {}^1 y - {}^0 y \end{aligned} \quad (5.72)$$

$$w(r, s, t) = {}^1 z - {}^0 z$$

و از جایگزینی (۵.۷۱) نتایج زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} u(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k u_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k V_{ix}^k + \frac{s}{2} \sum_{k=1}^q b_k h_k V_{sx}^k \\ v(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k v_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k V_{iy}^k + \frac{s}{2} \sum_{k=1}^q b_k h_k V_{sy}^k \\ w(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k w_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k V_{iz}^k + \frac{s}{2} \sum_{k=1}^q b_k h_k V_{sz}^k \end{aligned} \quad (5.73)$$

که در آن داریم:

$$\mathbf{V}_i^k = {}^1 \mathbf{V}_i^k - {}^0 \mathbf{V}_i^k; \quad \mathbf{V}_s^k = {}^1 \mathbf{V}_s^k - {}^0 \mathbf{V}_s^k \quad (5.74)$$

سرانجام بردارهای \mathbf{V}_i^k و \mathbf{V}_s^k را برحسب دوران‌های حول محورهای دکارتی x و y و z بیان می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_i^k &= \boldsymbol{\theta}_k \times {}^0 \mathbf{V}_i^k \\ \mathbf{V}_s^k &= \boldsymbol{\theta}_k \times {}^0 \mathbf{V}_s^k \end{aligned} \quad (5.75)$$

که در آن θ_k برداری است که شامل دوران‌های نقاط گرهی در نقطه گرهی k می‌باشد (ر.ک. به: شکل (۵.۲۲):

$$\theta_k = \begin{bmatrix} \theta_x^k \\ \theta_y^k \\ \theta_z^k \end{bmatrix} \quad (۵.۷۶)$$

با استفاده از (۵.۷۱) الی (۵.۷۶) تمامی معادلات اساسی مورد نیاز برای ایجاد ماتریس‌های درونیابی تغییر مکان و کرنش که در تعیین ماتریس‌های عنصر تیری به کار می‌روند، در دسترس می‌باشند.

عبارات مورد نیاز برای ایجاد ماتریس درونیابی تغییر مکان H از جایگزینی (۵.۷۵) در (۵.۷۳) به دست می‌آیند. برای تعیین ماتریس کرنش - تغییر مکان، ملاحظه می‌کنیم که برای تیر تنها مؤلفه‌های کرنش مورد نظر کرنش طولی $\epsilon_{\eta\eta}$ و کرنش‌های برشی جانبی $\gamma_{\eta\xi}$ و $\gamma_{\eta\zeta}$ می‌باشد که در آنها η و ξ و ζ محورهای مختصات (پیوسته به جسم) جابه‌جا شونده می‌باشند (ر.ک. به: شکل (۵.۲۲). بنابراین رابطه‌ای به صورت زیر مورد نظر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{\eta\eta} \\ \gamma_{\eta\xi} \\ \gamma_{\eta\zeta} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^q B_k \hat{u}_k \quad (۵.۷۷)$$

که در آن داریم:

$$\hat{u}_k^T = [u_k \ v_k \ w_k \ \theta_x^k \ \theta_y^k \ \theta_z^k] \quad (۵.۷۸)$$

و ماتریس‌های B_k و $k = 1, \dots, q$ با هم ماتریس B را تشکیل می‌دهند:

$$B = [B_1 \ \dots \ B_q] \quad (۵.۷۹)$$

حال اگر فرمول‌بندی معمول عناصر محدود تک پارامتری را دنبال کنیم، با استفاده از (۵.۷۳) خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^q \begin{bmatrix} \frac{\partial h_k}{\partial r} & [1 \ (g)_1^k \ (g)_2^k \ (g)_3^k] \\ h_k & [0 \ (\bar{g})_1^k \ (\bar{g})_2^k \ (\bar{g})_3^k] \\ h_k & [0 \ (\bar{g})_1^k \ (\bar{g})_2^k \ (\bar{g})_3^k] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \theta_x^k \\ \theta_y^k \\ \theta_z^k \end{bmatrix} \quad (۵.۸۰)$$

و مشتقات u و w نیز به آسانی از جایگزینی v و w در u به دست می‌آیند. در (۵.۸۰) به ازای u داریم، $i = 1$ و به ازای v نیز $i = 2$ و به ازای w نیز $i = 3$ ؛ و نمادگذاری زیر را به کار می‌بریم:

$$(\hat{g})^k = \frac{b_k}{2} \begin{bmatrix} 0 & -{}^0V_{sz}^k & {}^0V_{sy}^k \\ {}^0V_{sz}^k & 0 & -{}^0V_{sx}^k \\ -{}^0V_{sy}^k & {}^0V_{sx}^k & 0 \end{bmatrix} \quad (5.81)$$

$$(\bar{g})^k = \frac{a_k}{2} \begin{bmatrix} 0 & -{}^0V_{tz}^k & {}^0V_{ty}^k \\ {}^0V_{tz}^k & 0 & -{}^0V_{tx}^k \\ -{}^0V_{ty}^k & {}^0V_{tx}^k & 0 \end{bmatrix} \quad (5.82)$$

$$(g)_{ij}^k = s(g)_{ij}^k + t(\bar{g})_{ij}^k \quad (5.83)$$

برای بدست آوردن مشتقات تغییر مکان متناظر با محورهای مختصات x و y و z ، از تبدیل ژاکوبی استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial x} = J^{-1} \frac{\partial}{\partial r} \quad (5.84)$$

که در آن ماتریس ژاکوبی J شامل مشتقات مختصات x و y و z نسبت به مختصات طبیعی r و s و t می‌باشد. از جایگذاری (۵.۸۰) در (۵.۸۴) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^q \begin{bmatrix} J_{11}^{-1} \frac{\partial h_k}{\partial r} & (G1)_{11}^k & (G2)_{11}^k & (G3)_{11}^k \\ J_{21}^{-1} \frac{\partial h_k}{\partial r} & (G1)_{21}^k & (G2)_{21}^k & (G3)_{21}^k \\ J_{31}^{-1} \frac{\partial h_k}{\partial r} & (G1)_{31}^k & (G2)_{31}^k & (G3)_{31}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \theta_x^k \\ \theta_y^k \\ \theta_z^k \end{bmatrix} \quad (5.85)$$

و دوباره مشتقات v و w نیز به آسانی از جایگذاری v و w در u به دست می‌آیند. در (۵.۸۵) از نمادگذاری زیر استفاده می‌کنیم:

$$(Gm)_{in}^k = [J_{n1}^{-1}(g)_{mi}^k] \frac{\partial h_k}{\partial r} + [J_{n2}^{-1}(\bar{g})_{mi}^k + J_{n3}^{-1}(\bar{g})_{mi}^k] h_k \quad (5.86)$$

حال با استفاده از مشتقات تغییر مکان (۵.۸۵) می‌توان عناصر ماتریس کرنش - تغییر مکان را در نقاط گوسی عنصر از طریق ایجاد مؤلفه‌های کرنش متناظر با محورهای x و y و z تبدیل این مؤلفه‌ها به کرنش‌های محلی $\epsilon_{\eta\eta}$ ، $\gamma_{\eta\xi}$ و $\gamma_{\eta\zeta}$ محاسبه کرد.

قانون تنش - کرنش مربوطه که در فرمول‌بندی مورد استفاده قرار می‌گیرد عبارت است از (با استفاده از k به عنوان فاکتور تصحیح برشی):

$$\begin{bmatrix} \tau_{\eta\eta} \\ \tau_{\eta\xi} \\ \tau_{\eta\zeta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & Gk & 0 \\ 0 & 0 & Gk \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{\eta\eta} \\ \gamma_{\eta\xi} \\ \gamma_{\eta\zeta} \end{bmatrix} \quad (5.87)$$

در این صورت ماتریس سختی عنصر از طریق انتگرال‌گیری عددی با استفاده از نقاط گوسی نشان داده شده در شکل ۵.۲۱ برای انتگرال‌گیری‌های مربوط به r و s با استفاده از فرمول‌های Newton-Cotes یا Gauss برای انتگرال‌گیری‌های مربوط به t و s به دست می‌آید. جدول ۵.۲ عملکرد و کارایی عناصر با درون‌یابی آمیخته را در تحلیل تیر طره‌ای با انحنا که در شکل ۵.۲۳ نشان داده شده است ارائه می‌دهد.

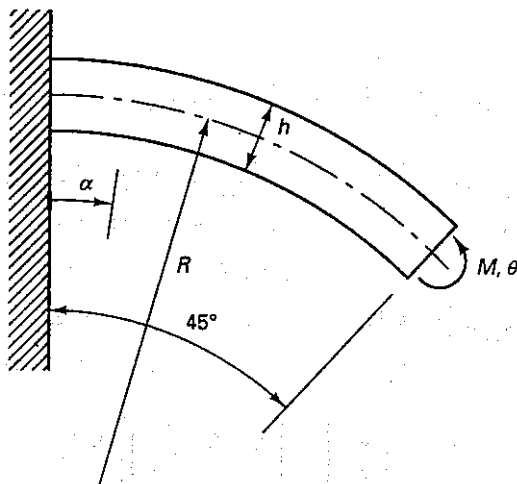
جدول ۵.۲ عملکرد عناصر تیری تک پارامتری در تحلیل مسأله ارائه شده در شکل ۵.۲۳

(الف) $\theta_{\text{finite element}}/\theta_{\text{analytical}}$ در لبه انتهایی تیر، جواب حاصل از یک عنصر سه‌گره‌ای

h/R	گره میانی در $\alpha = 22/5^\circ$		گره میانی در $\alpha = 20^\circ$	
	مبتنی بر تغییر مکان	درون‌یابی آمیخته	مبتنی بر تغییر مکان	درون‌یابی آمیخته
0.50	0.92	1.00	0.91	1.00
0.10	0.31	1.00	0.31	1.00
0.01	0.004	1.00	0.005	1.00
0.001	0.00004	1.00	0.00005	1.00

(ب) $\theta_{\text{finite element}}/\theta_{\text{analytical}}$ در لبه انتهایی تیر، جواب حاصل از یک عنصر چهارگره‌ای

h/R	گره‌های داخلی در $\alpha_1 = 15^\circ$ و $\alpha_2 = 30^\circ$		گره‌های داخلی در $\alpha_1 = 10^\circ$ و $\alpha_2 = 25^\circ$	
	مبتنی بر تغییر مکان	درون‌یابی آمیخته	مبتنی بر تغییر مکان	درون‌یابی آمیخته
0.50	1.00	1.00	0.97	0.997
0.10	0.999	1.00	0.70	0.997
0.01	0.998	1.00	0.37	0.997
0.001	0.998	1.00	0.37	0.997



شکل ۵.۲۳ مسأله تیر طره‌ای با انحنا برای آزمون عناصر تیری تک پارامتری

چنان‌که پیشتر اشاره شد این عنصر شامل اثرات اعوجاج پیچشی نمی‌باشد. این اثرات می‌توانند در عناصر تیری با سطح مقطع مستطیلی و نیز برای عناصر تیری با سطوح مقطع عمومی قابل توجه باشند. تغییر مکان‌های اعوجاج پیچشی را می‌توان با اضافه نمودن درون‌یابی‌های تغییر مکانی مناسب به درون‌یابی‌های داده شده در (۵.۷۳) در فرمول‌بندی وارد نمود. اگر درجات آزادی اضافی متناظر با تغییر شکل‌های اعوجاج پیچشی نیز در فرمول‌بندی وارد شوند، در این صورت پیوستگی اعوجاج پیچشی بین عناصر باید اعمال گردد. با این حال، شاید «آزادی» اعوجاج پیچشی در هر عنصر، بدون اعمال پیوستگی اعوجاج در بین عناصر، کافی باشد. این نکته از طریق اضافه نمودن تغییر شکل‌های اعوجاج پیچشی به درون‌یابی‌های تغییر مکان و سپس با چگالش ایستایی شدت این تغییر شکل‌ها حاصل می‌گردد (ر.ک. به: K. J. Bathe and A. B. Chaudhary [A] و تمرین ۵.۳۷).

در کاربرد دیگری از فرمول‌بندی تیر با انحنا، سطح مقطع، دایره‌ای توخالی است، به عبارت دیگر یک مقطع لوله‌ای در نظر گرفته می‌شود. در این حالت تغییر شکل‌های بیضوی و اعوجاج پیچشی در هنگام انحنا دار بودن عنصر می‌توانند مهم باشند و بار دیگر درون‌یابی‌های تغییر مکان ارائه شده در (۵.۷۳) باید اصلاح گردند. در این حالت اعمال پیوستگی در تغییر شکل‌های بیضوی و اعوجاج پیچشی حائز اهمیت است، و بدین دلیل درجات آزادی گرهی اضافی باید در فرمول‌بندی وارد شوند (ر.ک. به: K. J. Bathe and C. A. Almeida [A]). اگر فرمول‌بندی بنیادی (۵.۷۱) الی (۵.۸۷) را در نظر بگیریم، ملاحظه می‌کنیم که عنصر می‌تواند دارای انحنای دلخواهی باشد و ابعاد سطح مقطع می‌تواند در امتداد محورش تغییر کند. عرض و ارتفاع تیر و موقعیت محور عنصر در امتداد عنصر درون‌یابی می‌شوند. در فرمول‌بندی داده شده، محور عنصر بر خط میانی هندسی عنصر منطبق است، ولی این شرط الزامی نیست و عناصر بسیار عمومی‌تر را می‌توان مستقیماً فرمول‌بندی نمود. (ر.ک. به: تمرین ۵.۳۸).

علاوه بر یک فرمول‌بندی عمومی برای تحلیل خطی، روش مذکور بویژه برای تحلیل تغییر مکان‌های بزرگ غیرخطی سازه‌های تیری نیز سودمند است. چنان‌که در بخش ۶.۵.۱ بحث خواهد گردید، در تحلیل‌های غیرخطی، عناصر تیری که در ابتدا مستقیم می‌باشند انحنا دار و اعوجاج دار می‌شوند و این تغییر شکل‌ها را می‌توان به درستی مدل‌سازی نمود. البته اگر تحلیل خطی انجام گیرد و عنصر مستقیم بوده و دارای سطح مقطع ثابت باشد، در این صورت فرمول‌بندی مذکور به صورت فرمول‌بندی ارائه شده در (۵.۵۶) الی (۵.۷۰) درمی‌آید. این نکته در مثال زیر نشان داده می‌شود.

مثال ۵.۲۶: نشان دهید که کاربرد فرمول‌بندی عمومی (۵.۷۱) الی (۵.۸۷) برای عنصر تیری نشان داده شده در شکل ۵.۲۴ E به صورت استفاده از (۵.۵۸) درمی‌آید.

حل:

برای کاربرد روابط عمومی (۵.۷۱) الی (۵.۸۷) به شکل‌های ۵.۲۴ و ۵.۲۲ مراجعه می‌کنیم و از اینرو داریم:

$${}^0\mathbf{V}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad {}^0\mathbf{V}_t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad a_k = 1; \quad b_k = h; \quad k = 1, 2, 3$$

بنابراین روابط (۵.۷۱) به صورت زیر درمی‌آیند:

$${}^0x = \sum_{k=1}^3 h_k {}^0x_k$$

$${}^0y = \frac{s}{2}h$$

$${}^0z = \frac{t}{2}$$

سپس (۵.۷۵) را تعیین می‌کنیم تا نتیجه زیر حاصل شود (ر.ک. به: بخش ۲.۴):

$$\mathbf{V}_t^k = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \theta_x^k & \theta_y^k & \theta_z^k \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

یا

$$\mathbf{V}_t^k = \theta_y^k \mathbf{e}_x - \theta_x^k \mathbf{e}_y \quad (\text{الف})$$

$$\mathbf{V}_s^k = \det \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \theta_x^k & \theta_y^k & \theta_z^k \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

و

یا

$$\mathbf{V}_s^k = -\theta_z^k \mathbf{e}_x + \theta_x^k \mathbf{e}_z \quad (\text{ب})$$

روابط (الف) و (ب) متناظر با عمل سه بعدی تیر می‌باشند. اگر تنها دوران‌های حول محور z مجاز باشند، در این صورت داریم:

$$\mathbf{V}_t^k = \mathbf{0}; \quad \mathbf{V}_s^k = -\theta_z^k \mathbf{e}_x$$

همچنین فرض می‌کنیم که نقاط گرهی تنها در جهت y می‌توانند تغییر مکان پیدا کنند. از اینرو (۵.۷۳) منجر به فرض‌های تغییر مکان زیر می‌شود:

$$u(r, s) = -\frac{sh}{2} \sum_{k=1}^3 h_k \theta_z^k \quad (\text{پ})$$

$$v(r) = \sum_{k=1}^3 h_k v_k \quad (\text{ت})$$

که در آن یادآوری می‌کنیم که u تنها تابعی از r و s بوده و v تنها تابعی از r می‌باشد. این روابط مانند فرض‌های تغییر مکان می‌باشند که پیشتر مورد استفاده قرار گرفته‌اند، ولی با در نظر گرفتن نمادگذاری قراردادی تغییر مکان تیر، تغییر مکان جانبی و دوران مقطع در یک نقطه گرهی را به جای θ_z^k و v_k با w_k و θ_k مشخص کردیم.

حال با استفاده از (۵.۸۰) نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^3 \begin{bmatrix} -\frac{sh}{2} \frac{\partial h_k}{\partial r} \\ -\frac{h}{2} h_k \end{bmatrix} \theta_z^k$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{\partial v}{\partial s} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^3 \begin{bmatrix} \frac{\partial h_k}{\partial r} \\ 0 \end{bmatrix} v_k$$

این روابط را می‌توانستیم مستقیماً از طریق مشتق‌گیری تغییر مکان‌ها در (پ) و (ت) نیز به دست آوریم. از آنجا که:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{L}{2} & 0 \\ 0 & \frac{h}{2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{L} & 0 \\ 0 & \frac{2}{h} \end{bmatrix}$$

از اینرو نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^3 \begin{bmatrix} -\frac{h}{2L} s \frac{\partial h_k}{\partial r} \\ -h_k \end{bmatrix} \theta_z^k \quad (\text{ث})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^3 \begin{bmatrix} \frac{2}{L} \frac{\partial h_k}{\partial r} \\ 0 \end{bmatrix} v_k \quad (\text{ج})$$

حالا برای تحلیل پاسخ تیر شکل E ۵.۲۴، اصل کار مجازی را [ر.ک. به: (۴.۷)] با معیارهای مناسب کرنش به کار می بریم:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} [\bar{\epsilon}_{xx} \quad \bar{\gamma}_{xy}] \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & Gk \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \det J \, ds \, dr = -P\bar{v}|_{r=1/3} \quad (ج)$$

که در آن داریم:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \bar{\epsilon}_{xx} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \bar{\gamma}_{xy} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x}$$

اگر روابط (ث) و (ج) و (چ) و (۵.۵۸) را در نظر بگیریم، ملاحظه می کنیم که در صورتی که از $\theta_z \equiv \beta$ و $w \equiv v$ استفاده کنیم، (ج) متناظر با (۵.۵۸) خواهد شد.

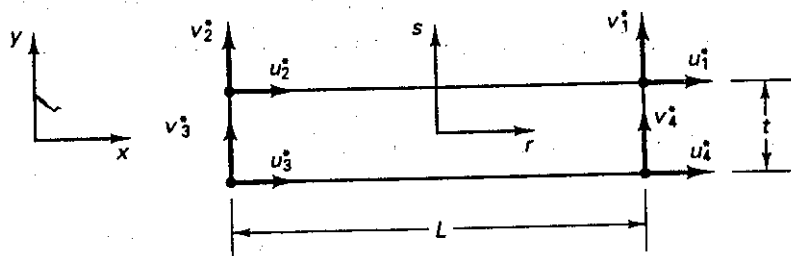
عناصر انتقالی

در مباحث پیشین عناصر محیط پیوسته و عناصر تیری را به طور جداگانه در نظر گرفتیم. با وجود این رابطه تنگاتنگی بین این عناصر باید مورد توجه قرار گیرد. تفاوت های این عناصر صرفاً در دو فرض می باشد، نخست فرض سینماتیک که طبق آن سطوح مسطحی که در ابتدا عمود بر محور خنثی می باشند سطح باقی می مانند؛ دوم فرض تنش که بر مبنای آن تنش های عمود بر محور خنثی صفر می باشند. در فرمول بندی تیر که ارائه گردید، فرض سینماتیک مستقیماً در درونیابی های هندسه و تغییر مکان در نظر گرفته شد و فرض تنش در قانون تنش - کرنش مورد استفاده قرار گرفت. از آنجا که دو فرض مذکور تنها تفاوت های بین عناصر تیری و محیط پیوسته می باشند، ظاهراً به نظر می رسد که استخراج ماتریس های عنصر سازه ای از ماتریس های عنصر محیط پیوسته با استفاده از روش تباهیدگی نیز امکان پذیر باشد. همچنین می توان عناصری را ابداع نمود که به عنوان عناصر انتقالی بین عناصر محیط پیوسته و سازه ای عمل کنند. مثال زیر را در نظر بگیرید.

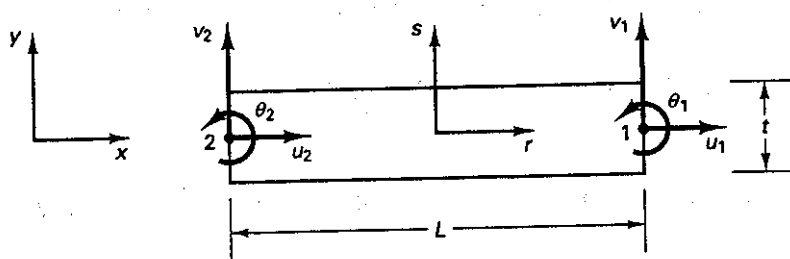
مثال ۵.۲۷: فرض کنید که ماتریس کرنش - تغییر مکان یک عنصر تنش مسطح چهارگرهی استخراج شده است. چگونگی ایجاد ماتریس کرنش - تغییر مکان یک عنصر تیری دوگرهی را نشان دهید.

حل:

شکل E ۵.۲۷ عنصر تنش مسطح با درجات آزادی مربوطه اش و نیز عنصر تیری را نشان می دهد که برای آن می خواهیم ماتریس کرنش - تغییر مکان را ایجاد کنیم. گره ۲ از عنصر تیری و



(الف) عنصر تنش مسطح



(ب) عنصر تیری

شکل ۵.۲۷ استخراج عنصر تیری از عنصر تنش مسطح

گره‌های ۲ و ۳ را از عنصر تنش مسطح در نظر بگیرید. عناصر ماتریس کرنش - تغییر مکان عنصر تنش مسطح عبارتند از:

$$\mathbf{B}^* = \left[\begin{array}{cc|cc|cc} \downarrow u_2^* & \downarrow v_2^* & \downarrow u_3^* & \downarrow v_3^* & & \\ \vdots & -\frac{1}{2L}(1+s) & 0 & -\frac{1}{2L}(1-s) & 0 & \vdots \\ & 0 & \frac{1}{2t}(1-r) & 0 & -\frac{1}{2t}(1-r) & \vdots \\ & \frac{1}{2t}(1-r) & -\frac{1}{2L}(1+s) & -\frac{1}{2t}(1-r) & -\frac{1}{2L}(1-s) & \vdots \end{array} \right] \quad (\text{الف})$$

حال با استفاده از فرض‌های تغییر شکل تیر، قیدهای سینماتیک زیر را داریم:

$$u_2^* = u_2 - \frac{t}{2}\theta_2$$

$$u_3^* = u_2 + \frac{t}{2}\theta_2$$

$$v_2^* = v_2; \quad v_3^* = v_2$$

(ب)

حال این قیدها در (الف) جایگذاری می‌شوند تا از عناصر ماتریس \mathbf{B}^* ، عناصر ماتریس کرنش - تغییر مکان تیر به دست آیند. با استفاده از سطرهای ماتریس \mathbf{B}^* ، و با داشتن (ب) داریم:

$$-\frac{1}{2L}(1+s)u_2^* - \frac{1}{2L}(1-s)u_3^* = -\frac{1}{2L}(1+s)\left(u_2 - \frac{t}{2}\theta_2\right) \quad (\text{پ})$$

$$-\frac{1}{2L}(1-s)\left(u_2 + \frac{t}{2}\theta_2\right)$$

$$\frac{1}{2t}(1-r)v_2^* - \frac{1}{2t}(1-r)v_3^* = \frac{1}{2t}(1-r)v_2 - \frac{1}{2t}(1-r)v_2 \quad (\text{ت})$$

$$\frac{1}{2t}(1-r)u_2^* - \frac{1}{2L}(1+s)v_2^* - \frac{1}{2t}(1-r)u_3^* - \frac{1}{2L}(1-s)v_3^*$$

$$= \frac{1}{2t}(1-r)\left(u_2 - \frac{t}{2}\theta_2\right) - \frac{1}{2L}(1+s)v_2 - \frac{1}{2t}(1-r)\left(u_2 + \frac{t}{2}\theta_2\right) - \frac{1}{2L}(1-s)v_2 \quad (\text{ث})$$

روابط سمت راست (پ) تا (ث) شامل عناصر ماتریس کرنش - تغییر مکان تیر می‌باشند:

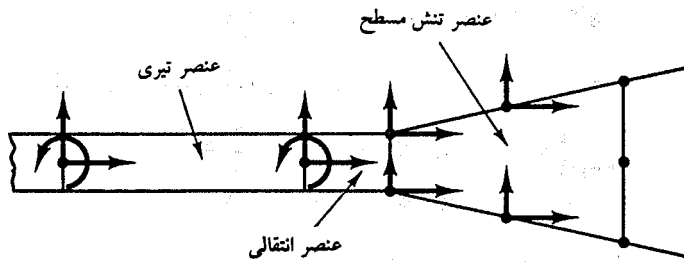
$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} & u_2 & v_2 & \theta_2 & & \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ \dots & -\frac{1}{L} & 0 & \frac{t}{2L}s & & \\ & 0 & 0 & 0 & & \\ & 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{2}(1-r) & & \end{array} \right]$$

با وجود این عناصر سطر اول و سطر سوم همان عناصری هستند که با استفاده از فرمول بندی تیر (۵.۷۱) الی (۵.۸۶) نیز به دست آمده‌اند. باید دانست که عناصر صفر در سطر دوم ماتریس \mathbf{B} تنها این واقعیت را بیان می‌دارند که کرنش ϵ_{yy} در فرمول بندی وارد نشده است. این کرنش در واقع مساوی با $-v\epsilon_{xx}$ می‌باشد، زیرا تنش τ_{xy} صفر است. همانگونه که در آغاز اشاره شد، از عناصر ماتریس \mathbf{B} در $r=0$ استفاده خواهیم نمود.

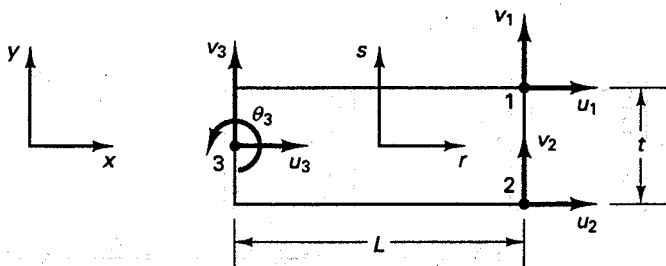
فرمول بندی عنصر سازه‌ای با استفاده از روش مورد بحث در مثال ۵.۲۷ از نکته نظر محاسباتی دارای کارایی نیست و مطمئناً برای تحلیل عمومی توصیه نمی‌شود. با وجود این مطالعه این روش و ملاحظه این نکته که ماتریس‌های عنصر سازه‌ای را می‌توان اصولاً از ماتریس‌های عنصر محیط پیوسته با اعمال فرض‌های مناسب ایستایی و سینماتیکی به دست آورد، سودمند و آموزنده است. همچنین این فرمول بندی مستقیماً در ایجاد عناصر انتقالی مؤثر

است و این عناصر می‌توانند به طریقه‌ای مؤثر برای ترکیب نمودن عناصر سازه‌ای و عناصر محیط پیوسته بدون کاربرد معادلات قیدی مورد استفاده قرار گیرند [ر.ک. به: شکل (الف) E ۵.۲۸]. برای نشان دادن فرمول‌بندی عناصر انتقالی، در مثال زیر عنصر ساده تیری انتقالی را در نظر می‌گیریم.

مثال ۵.۲۸: ماتریس‌های درونیابی تغییر مکان و کرنش - تغییر مکان عنصر انتقالی نشان داده شده در شکل E ۵.۲۸ را ایجاد کنید.



(الف) عنصر تیری انتقالی که عناصر تیر و تنش مسطح را به هم متصل می‌نماید



(ب) عنصر انتقالی

شکل E ۵.۲۸ عنصر انتقالی تیر دوبعدی مبتنی بر تغییر مکان

حل:

بردار تغییر مکان نقاط گرهی عنصر را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\hat{\mathbf{u}}^T = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad \theta_3] \quad (\text{الف})$$

از آنجا که در $r = +1$ درجات آزادی عنصر تنش مسطح را داریم، از اینرو توابع درونیابی مربوط

به گره‌های ۱ و ۲ عبارتند از (ر.ک. به: شکل ۵.۴):

$$h_1 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s); \quad h_2 = \frac{1}{4}(1+r)(1-s)$$

گره ۳، یک گره تیری می‌باشد و تابع درونیابی عبارت است از (ر.ک. به: شکل ۵.۳):

$$h_3 = \frac{1}{2}(1-r)$$

بنابراین تغییر مکان‌های عنصر به صورت زیر می‌باشند:

$$u(r, s) = h_1 u_1 + h_2 u_2 + h_3 u_3 - \frac{t}{2} s h_3 \theta_3$$

از اینرو متناظر با بردار تغییر مکان (الف) داریم:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & -\frac{t}{2} s h_3 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 \end{bmatrix}$$

درونیابی مختصات، شبیه درونیابی مورد استفاده در عنصر تنش مسطح چهارگره‌ای می‌باشد:

$$x(r, s) = \frac{1}{2}(1+r)L$$

$$y(r, s) = \frac{s}{2}t$$

بنابراین داریم:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{L}{2} & 0 \\ 0 & \frac{t}{2} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{L} & 0 \\ 0 & \frac{2}{t} \end{bmatrix}$$

از اینرو با استفاده از (۵.۲۵)، نتیجه زیر حاصل می‌گردد:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2L}(1+s) & 0 & \frac{1}{2L}(1-s) & 0 & -\frac{1}{L} & 0 & \frac{t}{2L}s \\ 0 & \frac{1}{2t}(1+r) & 0 & -\frac{1}{2t}(1+r) & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2t}(1+r) & \frac{1}{2L}(1+s) & -\frac{1}{2t}(1+r) & \frac{1}{2L}(1-s) & 0 & -\frac{1}{L} & -\frac{1}{2}(1-r) \end{bmatrix}$$

سرانجام یادآوری می‌شود که سه ستون آخر ماتریس \mathbf{B} را می‌توانستیم، به گونه‌ای که در مثال

۵.۲۷ توصیف گردید، استخراج کنیم.

عناصر تیری تک‌پارامتری که در این بخش ارائه گردیدند، جایگزینی برای عناصر

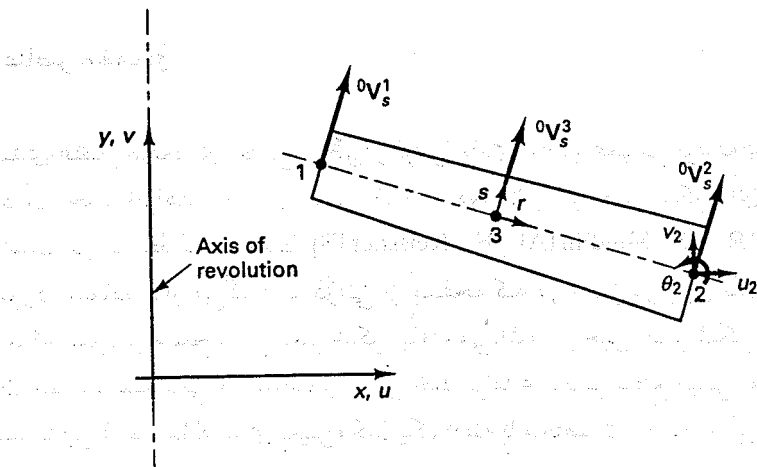
کلاسیک تیری ارمیتی می‌باشند (ر.ک. به: مثال ۴.۱۶) و ممکن است این سؤال مطرح شود که

چگونه این نوع عناصر تیری را می‌توان از نکته نظر کارایی با یکدیگر مقایسه کرد. تردیدی وجود ندارد که در تحلیل خطی تیرهای نازک مستقیم، عناصر ارمیتی معمولاً مؤثرتر می‌باشند، زیرا برای یک توصیف درجه سومی تغییر مکان، عنصر تیری تک پارامتری نیاز به دو برابر درجات آزادی دارد. با وجود این عنصر تیری تک پارامتری شامل اثرات تغییر شکل‌های برشی بوده و این امتیازها را دارد که تمامی تغییر شکل‌ها با درجه مشابهی درونیابی می‌شوند (که برای عنصر درجه سومی یک تغییر درجه سومی تغییر مکان محوری نتیجه می‌شود) و نیز هندسه‌های بانحنای را می‌توان با دقت کافی مدل نمود. بنابراین عنصر تک پارامتری با کارایی خوبی در تحلیل پوسته‌های تقویت شده مورد استفاده قرار می‌گیرد (زیرا عنصر مزبور به طریقه‌ای طبیعی تقویت کننده‌های عناصر پوسته‌ای را، که در بخش بعدی بحث خواهد شد، نمایش می‌دهد) و می‌تواند به عنوان پایه‌ای برای فرمول‌بندی عناصر پیچیده‌تر نظیر لوله و عناصر انتقالی به کار رود. همچنین عمومیت فرمول‌بندی با کلیه تغییر مکان‌های درونیابی شده با درجه مشابهی از تغییرات، منجر به عنصری کارآمد در تحلیل‌های غیرخطی هندسی می‌شود (ر.ک. به: بخش ۵.۱).

فرمول‌بندی عنصر تیری عمومی که در این بخش ارائه گردید، در موقعیت‌های کرنش مسطح (ر.ک. به: تمرین ۵.۴۰) و ایجاد و بسط عناصر پوسته‌ای متقارن محوری نیز کاربرد دارد.

عناصر پوسته‌ای متقارن محوری

فرمول‌بندی عنصر تیری تک پارامتری را که در بالا ارائه گردید می‌توان مستقیماً برای تحلیل پوسته‌های متقارن محوری مطابقت داد. شکل ۵.۲۴ یک عنصر سه گرهی نمونه را نشان می‌دهد.



شکل ۵.۲۴ عنصر پوسته‌ای متقارن محوری

در این فرمول‌بندی، فرض‌های سینماتیک عنصر تیری به گونه‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند، گویی که در عمل دوبعدی به کار رفته‌اند (به عبارت دیگر برای حرکت در صفحه λ و x)، اما اثرات کرنش و تنش حلقوی نیز در نظر گرفته می‌شوند. بنابراین ماتریس کرنش - تغییر مکان عنصر، همان کرنش - تغییر مکان ماتریس تیر می‌باشد که با یک سطر که مربوط به کرنش حلقوی u/x است اصلاح شده است. این طریقه، کاملاً مشابه ایجاد ماتریس **B** عنصر متقارن محوری دوبعدی در مقایسه با عنصر تنش مسطح دوبعدی است. در آن حالت تنها یک سطر که مربوط به کرنش حلقوی بود، به ماتریس **B** عنصر تنش مسطح اضافه شد تا اینکه ماتریس **B** عنصر متقارن محوری به دست آید. البته روشن است که قانون تنش - کرنش صحیحی نیز باید استفاده شود (که اثر ضریب پواسون را که جهت حلقوی و جهت x را به یکدیگر ارتباط می‌دهد میسر ساخته و صفر بودن تنش در جهت x را مجاز نماید) و نیز باید انتگرال‌گیری متناسب با شرایط متقارن محوری در روی یک رادیان از سازه انجام گیرد (ر.ک. به: مثال ۵.۹ و تمرین ۵.۴۱). البته با استفاده از روش‌های ارائه شده در مثال ۵.۲۸ می‌توان عناصر انتقالی برای شرایط پوسته متقارن محوری را نیز طراحی نمود (ر.ک. به: تمرین ۵.۴۲).

۵.۴.۲ عناصر صفحه‌ای و پوسته‌ای عمومی

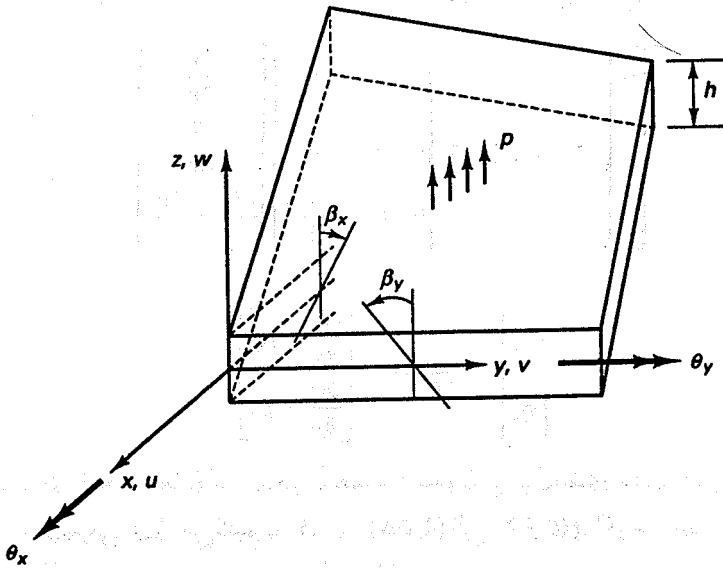
روش‌های به کار رفته در بخش پیشین برای فرمول‌بندی عناصر تیری را می‌توان مستقیماً برای ایجاد عناصر صفحه‌ای و پوسته‌ای نیز مورد استفاده قرار داد. در بخش آینده ابتدا در مورد فرمول‌بندی عناصر صفحه‌ای بحث می‌کنیم و سپس به اختصار فرمول‌بندی عمومی پوسته‌ای را ارائه می‌دهیم.

عناصر صفحه‌ای

فرمول‌بندی عنصر صفحه‌ای حالتی خاص از فرمول‌بندی عنصر عمومی پوسته‌ای است که بعداً در مورد آن بحث خواهد شد و براساس نظریه صفحات با اثر تغییر شکل‌های برشی جانبی استوار است. در این نظریه که توسط E. Reissner [B] و R. D. Mindlin [A] ارائه گردید، این فرض مورد استفاده قرار می‌گیرد که ذراتی از صفحه که در آغاز در روی یک خط مستقیم می‌باشند که عمود بر سطح میانی تغییر شکل نیافته می‌باشد در حین تغییر شکل نیز همچنان در روی یک خط مستقیم باقی می‌مانند، ولی این خط الزاماً عمود بر سطح میانی تغییر شکل یافته نمی‌باشد. با این فرض مؤلفه‌های تغییر مکان یک نقطه با مختصات x و y طبق نظریه خمشی با ملاحظه تغییر مکان‌های کوچک عبارتند از:

$$u = -z\beta_x(x, y); \quad v = -z\beta_y(x, y); \quad w = w(x, y) \quad (5.88)$$

که در آن تغییر مکان جانبی بوده و β_x و β_y دوران‌های عمود بر سطح میانی تغییر شکل نیافته به ترتیب در صفحه z و x و صفحه z و y می‌باشند (ر.ک. به: شکل ۵.۲۵). ذکر این نکته مناسب و سودمند است که در نظریه صفحه Kirchhoff که اثر تغییر شکل‌های برشی در نظر گرفته نمی‌شود، $\beta_y = w_{,y}$ و $\beta_x = w_{,x}$ (و در حقیقت به این دلیل قرارداد مربوط به β_x و β_y را انتخاب کردیم که این روابط Kirchhoff را داشته باشیم).



شکل ۵.۲۵ فرض‌های تغییر شکل در تحلیل صفحه با در نظر گرفتن اثر تغییر شکل‌های برشی

اگر صفحه شکل ۵.۲۵ را در نظر بگیریم، کرنش‌های برشی ϵ_{xy} و ϵ_{yx} و γ_{xy} در ضخامت صفحه به طور خطی تغییر می‌کنند و می‌توان آنها را با استفاده از انحناءهای صفحه و با به‌کارگیری (۵.۸۸) به صورت زیر بیان نمود:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = -z \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (5.89)$$

که در آن فرض می‌شود که کرنش‌های برشی در ضخامت صفحه، ثابت می‌باشند:

$$\begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \end{bmatrix} \quad (5.90)$$

یادآوری می‌کنیم که هر مؤلفه کرنش برشی جانبی به صورت (۵.۵۶) می‌باشد که در توصیف فرمول‌بندی‌های تیر مورد استفاده قرار گرفتند. حالت تنش در عنصر صفحه‌ای متناظر با شرایط تنش مسطح است (به عبارت دیگر $\tau_{zz} = 0$). بنابراین برای مصالح ایزوتروپیک می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = -z \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (5.91)$$

$$\begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \end{bmatrix} \quad (5.92)$$

حال برای ایجاد معادلات تعادل عنصر، همچون فرمول‌بندی عنصر تیری دوبعدی با سطح مقطع مستطیلی عمل می‌کنیم [ر.ک. به: (۵.۵۸) الی (۵.۶۵)]. اگر صفحه را در نظر بگیریم و p مساوی بارگذاری جانبی در واحد سطح میان - سطح باشد، در این صورت اصل کار مجازی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\int_A \int_{-h/2}^{h/2} [\bar{\epsilon}_{xx} \quad \bar{\epsilon}_{yy} \quad \bar{\gamma}_{xy}] \begin{bmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz dA + k \int_A \int_{-h/2}^{h/2} [\bar{\gamma}_{xz} \quad \bar{\gamma}_{yz}] \begin{bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} dz dA = \int_A \bar{w} p dA \quad (5.93)$$

که در آن خط تیره بالای نمادهای مورد استفاده، کمیت‌های مجازی را نشان می‌دهد و مجدداً k یک مقدار ثابتی است که برای در نظر گرفتن غیریکنواختی واقعی تنش‌های برشی به کار می‌رود (معمولاً مقدار $\frac{5}{6}$ مورد استفاده قرار می‌گیرد، ر.ک. به: مثال ۵.۲۳). بنابراین از جایگذاری (۵.۸۹) الی (۵.۹۲) در (۵.۹۳) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\int_A \bar{\mathbf{K}}^T \mathbf{C}_b \mathbf{K} dA + \int_A \bar{\mathbf{T}}^T \mathbf{C}_s \mathbf{T} dA = \int_A \bar{w} p dA \quad (5.94)$$

که در آن لنگرهای خمشی داخلی و نیروهای برشی بترتیب $C_b \kappa$ و $C_s \gamma$ می‌باشند و:

$$\kappa = \begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} + \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{bmatrix}; \quad \gamma = \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \beta_y \end{bmatrix} \quad (5.95)$$

$$C_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}; \quad C_s = \frac{Ehk}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.96)$$

$$C_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}; \quad C_s = \frac{Ehk}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.97)$$

توجه شود که عملگر وردشی متناظر با (۵.۹۳) به صورت زیر مشخص می‌شود (ر.ک. به: مثال ۴.۴):

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} [\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}] \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} dz dA \quad (5.98)$$

$$+ \frac{k}{2} \int_A \int_{-h/2}^{h/2} [\gamma_{xz} \quad \gamma_{yz}] \frac{E}{2(1+\nu)} \begin{bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} dz dA - \int_A w p dA$$

که در آن کرنش‌ها بوسیله (۵.۸۹) و (۵.۹۰) مشخص می‌شوند. اصل کار مجازی متناظر با مساوی صفر قرار دادن مشتق Π نسبت به تغییر مکان جانبی w و دوران‌های مقطع β_x و β_y می‌باشد.

تأکید می‌کنیم که در این نظریه w و β_x و β_y متغیرهای مستقل‌اند. بنابراین در گسسته‌سازی عناصر محدود با استفاده از روش تغییر مکان لازم است که پیوستگی متقابل عناصر را تنها در w و β_x و β_y ، و نه در مشتقات وابسته به آنها، اعمال کنیم و این شرط پیوستگی به طریقه مشابهی که در تحلیل عناصر محدود تک پارامتری جامدات عمل کردیم، می‌تواند به آسانی حاصل شود. نخست گسسته‌سازی تغییر مکان صرف را در نظر می‌گیریم. همچون حالت تحلیل تیرها، گسسته‌سازی تغییر مکان صرف منجر به ایجاد عناصر کارآمدی از مرتبه پایین‌تر نخواهد شد، ولی مطمئناً پایه‌ای را برای درونیابی آمیخته فراهم می‌کند که بعداً در مورد آن بحث خواهیم نمود.

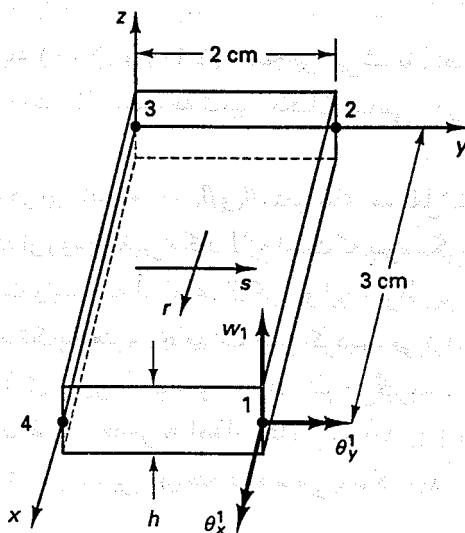
در گسسته‌سازی تغییر مکان صرف، از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$w = \sum_{i=1}^q h_i w_i; \quad \beta_x = -\sum_{i=1}^q h_i \theta_x^i; \quad \beta_y = \sum_{i=1}^q h_i \theta_y^i \quad (5.99)$$

که در آن h_i توابع درونیابی بوده و q تعداد گره‌های عنصر می‌باشد. حال با این درونیابی‌ها می‌توان به طریقه معمول، فرمول‌بندی را دنبال کرد و تمامی مفاهیم مربوط به عناصر محدود تک‌پارامتری را، که در آغاز مورد بحث قرار گرفتند، مستقیماً به کار برد. به عنوان مثال، برخی توابع درونیابی که در فرمول‌بندی عناصر صفحه‌ای قابل کاربرد می‌باشند، در شکل ۵.۴ مندرج‌اند و عناصر مثلثی را نیز می‌توان همان‌گونه که در بخش ۵.۳.۲ ذکر شده است ایجاد نمود. از آنجا که توابع درونیابی برحسب مختصات تک‌پارامتری r و s داده شده‌اند، از اینرو می‌توان مستقیماً ماتریس‌های عنصر صفحه‌ای را که در صفحه خود با آن‌ها هستند محاسبه نمود (به عنوان مثال برای مدل نمودن یک صفحه دایره‌ای).

فرمول‌بندی یک عنصر ساده چهارگره‌ای را در مثال زیر نشان می‌دهیم.

مثال ۵.۲۹: عبارات مورد استفاده در تعیین ماتریس سختی عنصر صفحه‌ای چهارگره‌ای را که در شکل ۵.۲۹ E نشان داده شده است استخراج کنید.



شکل ۵.۲۹ E یک عنصر صفحه‌ای چهارگره‌ای

حل:

محاسبات مورد نیاز بسیار شبیه محاسباتی می‌باشند که در فرمول‌بندی عنصر تنش مسطح دوبعدی در مثال ۵.۵ انجام شدند.

برای عنصر نشان داده شده در شکل ۵.۲۹ E داریم (ر.ک. به: مثال ۵.۳):

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

و در این صورت با استفاده از توابع درونیابی تعریف شده در شکل ۵.۴ و با عبارات مشابه برای مشتقات β_y و β_x داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1+s) & -(1+s) & -(1-s) & (1-s) \\ (1+r) & (1-r) & -(1-r) & -(1+r) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \end{bmatrix}$$

بنابراین اگر از نمادگذاری زیر استفاده کنیم:

$$\kappa(r, s) = \mathbf{B}_\kappa \hat{\mathbf{u}}$$

$$\gamma(r, s) = \mathbf{B}_\gamma \hat{\mathbf{u}}$$

$$w(r, s) = \mathbf{H}_w \hat{\mathbf{u}}$$

$$\hat{\mathbf{u}}^T = [w_1 \quad \theta_x^1 \quad \theta_y^1; w_2 \quad \dots \quad \theta_y^4] \quad \text{که در آن:}$$

$$\mathbf{B}_\kappa = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{6}(1+s) & | & -\frac{1}{6}(1-s) \\ 0 & \frac{1}{4}(1+r) & 0 & | & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{6}(1+s) & -\frac{1}{4}(1+r) & | & \dots & \frac{1}{4}(1+r) \end{bmatrix} \quad \text{همچنین داریم:}$$

$$\mathbf{B}_\gamma = \begin{bmatrix} \frac{1}{6}(1+s) & 0 & \frac{1}{4}(1+r)(1+s) & | & \dots & \frac{1}{4}(1+r)(1-s) \\ \frac{1}{4}(1+r) & -\frac{1}{4}(1+r)(1+s) & 0 & | & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{H}_w = \frac{1}{4} [(1+r)(1+s) \quad 0 \quad 0 \quad | \quad \dots \quad 0]$$

در این صورت ماتریس سختی عنصر عبارت است از:

$$\mathbf{K} = \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\mathbf{B}_\kappa^T \mathbf{C}_b \mathbf{B}_\kappa + \mathbf{B}_\gamma^T \mathbf{C}_s \mathbf{B}_\gamma) dr ds \quad (\text{الف})$$

و بردار بار سازگار عبارت است از:

$$\mathbf{R}_r = \frac{3}{2} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{H}_w^T p dr ds \quad (\text{ب})$$

که در آن انتگرال های موجود در (الف) و (ب) را می توانستیم به صورت بسته فرم به دست آوریم، ولی معمولاً با استفاده از انتگرال گیری عددی تعیین می شوند (ر.ک. به: بخش ۵.۵).

این فرمول بندی عنصر صفحه ای مبتنی بر تغییر مکان صرف، تنها در هنگام استفاده از عناصر مرتبه بالاتر دارای ارزش است. در حقیقت کمترین مرتبه درونیابی مورد استفاده باید یک درونیابی درجه سومی باشد که منجر به یک عنصر چهارضلعی ۱۶ گرهی و یک عنصر مثلثی ۱۰ گرهی می شود. با وجود این حتی این عناصر از مرتبه بالاتر، هنوز هم ظرفیت پیش بینی کنندگی خوبی را به نمایش نمی گذارند، بویژه هنگامی که عناصر دارای اعوجاج هندسی برای برآورد تنش به کار روند (به عنوان مثال ر.ک. به: [A] M. L. Bucalem and K. J. Bathe).

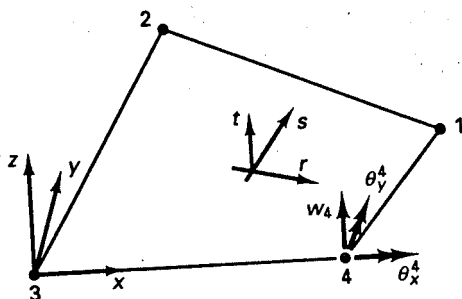
مانند حالت فرمول بندی عناصر تیری تک پارامتری، دشواری اساسی این است که تنش های برشی غیرواقعی در عناصر مبتنی بر تغییر مکان به دست می آیند. این تنش های برشی غیرواقعی، به میزانی که نسبت ضخامت به طول عنصر کاهش پیدا می کند، موجب سخت شدن غیرواقعی عناصر می شوند. این اثر قفل شوندگی برشی برای عنصر از مرتبه پایین تر و عناصر با اعوجاج هندسی، بیشتر نمایان می شود، زیرا در این صورت خطا در تنش های برشی بزرگتر است.

برای نیل به عناصر خمش صفحه ای کارآمد و قابل اطمینان، فرمول بندی مبتنی بر تغییر مکان صرف باید بسط داده شود. یک روش موفق استفاده از درونیابی آمیخته تغییر مکان جانبی، دوران های مقطع و کرنش های برشی جانبی است.

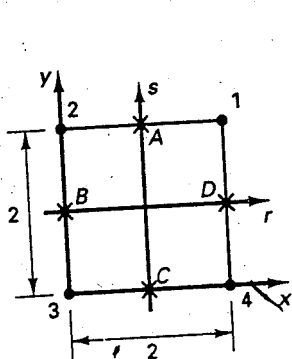
در این جا باید یادآوری شود که در بحث مزبور فرض کردیم که انتگرال ها برای محاسبه ماتریس های عنصری (ماتریس های سختی و جرم و بردارهای بار) به طور دقیق تعیین می شوند و بر آن اساس در سرتاسر بحث خود فرض کردیم و خواهیم کرد که خطا در انتگرال گیری عددی (که معمولاً در عمل انجام می گیرد، ر.ک. به: بخش ۵.۵) کوچک است و مطمئناً مشخصات ماتریس های عنصری را تغییر نمی دهد. شماری از مؤلفین از کاربرد انتگرال گیری کاهش یافته طرفداری کرده اند تا اینکه اثر پدیده قفل شوندگی برشی را کاهش دهند. در مورد چنین روش هایی به اختصار در بخش ۵.۵.۶ بحث خواهیم کرد.

در ادامه خانواده ای از عناصر خمش صفحه ای را ارائه می کنیم که دارای مبنای مطلوب ریاضی بوده و قابل اطمینان و کارآمد می باشند. عناصر مذکور، عناصر $MITC_n$ نامیده می شوند و n تعداد گره های عنصر می باشد و برای عناصر چهارضلعی $n = 4, 9, 16$ بوده و برای عناصر مثلثی $n = 7, 12$ می باشند (ر.ک. به: [A] K. J. Bathe, M. L. Bucalem and F. Brezzi). حال عنصر $MITC_4$ را با جزئیات مربوطه در نظر می گیریم و توابع بنیادی درونیابی برای سایر عناصر را در جدولی ارائه می کنیم.

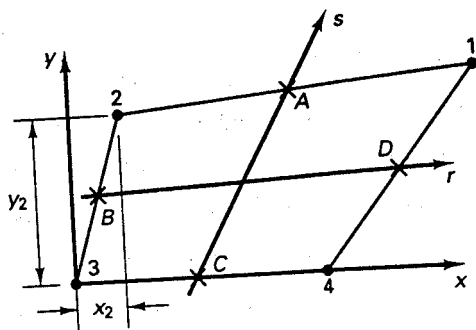
ویژگی مهم فرمول بندی عنصر $MITC$ استفاده از مؤلفه های تانسوری کرنش های برشی است بگونه ای که موجب ایجاد عناصری نسبتاً غیر حساس در برابر اعوجاج هندسی می شود. شکل ۵.۲۶ عنصر چهارگرهی عمومی را با دستگاه های مختصات مورد استفاده نشان می دهد.



نمایی از عنصر عمومی



عنصر خاص ۲×۲ در صفحه x و y



یک عنصر عمومی در صفحه x و y

شکل ۵.۲۶ قراردادهای مورد استفاده در فرمول‌بندی عنصر خمشی صفحه‌ای چهارگرمی

برای برطرف نمودن مسأله قفل شوندگی برشی، ماتریس سختی عنصر را با وارد نمودن اثرات خمشی و برش و با استفاده از درونیابی‌های مختلف فرمول‌بندی می‌کنیم. برای انحنای مقطع که در (۵.۹۵) ارائه گردیده‌اند، توابع درونیابی مشابه توابع مورد استفاده در روش مبتنی بر تغییر مکان را به کار می‌بریم که با استفاده از (۵.۹۹) تعیین می‌گردند، ولی در تعیین کرنش‌های برشی جانبی روش متفاوتی را دنبال می‌کنیم.

در ابتدا عنصر MITC4 را با هندسه ۲×۲ در نظر می‌گیریم (که برای آن مختصات x و y را می‌توان مساوی مختصات تک‌پارامتری r و s گرفت). برای این عنصر از درونیابی زیر استفاده می‌کنیم (ر.ک. به: [A] K. J. Bathe and E. N. Dvorkin):

$$\begin{aligned}\gamma_{rz} &= \frac{1}{2}(1+s)\gamma_{rz}^A + \frac{1}{2}(1-s)\gamma_{rz}^C \\ \gamma_{sz} &= \frac{1}{2}(1+r)\gamma_{sz}^D + \frac{1}{2}(1-r)\gamma_{sz}^B\end{aligned}\quad (5.100)$$

که در آن γ_{rz}^p و γ_{rz}^s کرنش‌های برشی (فیزیکی) در نقاط A و B و C و D می‌باشند که استفاده از تغییر مکان و دوران‌های مقطع در (۵.۹۹) تعیین گردیده‌اند. بنابراین داریم:

$$\begin{aligned}\gamma_{rz} &= \frac{1}{2}(1+s)\left(\frac{w_1-w_2}{2} + \frac{\theta_y^1 + \theta_y^2}{2}\right) + \frac{1}{2}(1-s)\left(\frac{w_4-w_3}{2} + \frac{\theta_y^4 + \theta_y^3}{2}\right) \\ \gamma_{sz} &= \frac{1}{2}(1+r)\left(\frac{w_1-w_4}{2} - \frac{\theta_x^1 + \theta_x^4}{2}\right) + \frac{1}{2}(1-r)\left(\frac{w_2-w_3}{2} - \frac{\theta_x^2 + \theta_x^3}{2}\right)\end{aligned}\quad (5.101)$$

با این توابع درونیابی مشخص شده، تمامی ماتریس‌های درونیابی کرنش - تغییر مکان را می‌توان مستقیماً ایجاد نمود و ماتریس سختی به طریقه‌ای استاندارد فرمول‌بندی می‌شود. البته روش مشابهی را نیز می‌توان مستقیماً برای عنصر مستطیلی به کار برد.

حال اگر حالت یک عنصر چهارگره‌ای چهار ضلعی عمومی را در نظر بگیریم، همان ایده اساسی درونیابی کرنش‌های برشی جانبی را به کار می‌بریم ولی با استفاده از درونیابی (۵.۱۰۰)، مؤلفه‌های تانسور هموردا را که در دستگاه مختصات r و s تعیین می‌شوند درونیابی می‌کنیم. بدین طریق مستقیماً اعوجاج عنصر (از هندسه 2×2) را در فرمول‌بندی وارد می‌کنیم. اگر این روش را با مؤلفه‌های کرنش برشی تانسوری دنبال کنیم، عبارات زیر را برای کرنش‌های برشی γ_{yz} و γ_{zx} به دست می‌آوریم (ر.ک. به: مثال ۵.۳۰):

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= \gamma_{rz} \sin \beta - \gamma_{sz} \sin \alpha \\ \gamma_{yz} &= -\gamma_{rz} \cos \beta + \gamma_{sz} \cos \alpha\end{aligned}\quad (5.102)$$

که در آنها α و β به ترتیب زوایای محورهای x و y محورهای s و x می‌باشند و نیز:

$$\begin{aligned}\gamma_{rz} &= \frac{\sqrt{(C_x + rB_x)^2 + (C_y + rB_y)^2}}{8 \det \mathbf{J}} \\ &\quad \left\{ (1+s) \left[\frac{w_1-w_2}{2} + \frac{x_1-x_2}{4} (\theta_y^1 + \theta_y^2) - \frac{y_1-y_2}{4} (\theta_x^1 + \theta_x^2) \right] \right. \\ &\quad \left. + (1-s) \left[\frac{w_4-w_3}{2} + \frac{x_4-x_3}{4} (\theta_y^4 + \theta_y^3) - \frac{y_4-y_3}{4} (\theta_x^4 + \theta_x^3) \right] \right\} \\ \gamma_{sz} &= \frac{\sqrt{(A_x + sB_x)^2 + (A_y + sB_y)^2}}{8 \det \mathbf{J}} \\ &\quad \left\{ (1+r) \left[\frac{w_1-w_4}{2} + \frac{x_1-x_4}{4} (\theta_y^1 + \theta_y^4) - \frac{y_1-y_4}{4} (\theta_x^1 + \theta_x^4) \right] \right. \\ &\quad \left. + (1-r) \left[\frac{w_2-w_3}{2} + \frac{x_2-x_3}{4} (\theta_y^2 + \theta_y^3) - \frac{y_2-y_3}{4} (\theta_x^2 + \theta_x^3) \right] \right\}\end{aligned}\quad (5.103)$$

در معادلات (۵.۱۰۳) داریم:

$$\det \mathbf{J} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \end{bmatrix} \quad (۵.۱۰۴)$$

و

$$\begin{aligned} A_x &= x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ B_x &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \\ C_x &= x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \\ A_y &= y_1 - y_2 - y_3 + y_4 \\ B_y &= y_1 - y_2 + y_3 - y_4 \\ C_y &= y_1 + y_2 - y_3 - y_4 \end{aligned} \quad (۵.۱۰۵)$$

روابط مزبور را در مثال زیر مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

مثال ۵.۳۰: درونیابی‌های کرنش برشی برای عنصر خمش صفحه‌ای MITC4 را استخراج کنید.
حل:

در دستگاه مختصات طبیعی عنصر خمش صفحه‌ای، بردارهای پایه هموردا به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_r &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}, & \mathbf{g}_s &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s} \\ \mathbf{g}_z &= \frac{h}{2} \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (\text{الف})$$

که در آن \mathbf{x} بردار مختصات بوده و \mathbf{e}_x و \mathbf{e}_y و \mathbf{e}_z بردارهای پایه در دستگاه دکارتی می‌باشند. یادآوری می‌کنیم که در دستگاه مختصات طبیعی، تانسور کرنش را می‌توان با استفاده از مؤلفه‌های تانسور هموردا و بردارهای پایه پادوردا بیان کرد (ر.ک. به: بخش ۲.۴):

$$\epsilon = \bar{\epsilon}_{ij} \mathbf{g}^i \mathbf{g}^j; \quad i, j \equiv r, s, z$$

که در آن علامت (\sim) نشان می‌دهد که مؤلفه‌های تانسوری در دستگاه مختصات طبیعی تعیین شده‌اند.

حال برای به دست آوردن مؤلفه‌های تانسور برشی، معادل (۵.۱۰۰) را مورد استفاده قرار می‌دهیم:

$$\bar{\epsilon}_{rz} = \frac{1}{2}(1+s)\bar{\epsilon}_{rz}^A + \frac{1}{2}(1-s)\bar{\epsilon}_{rz}^C \quad (\text{ب})$$

$$\bar{\epsilon}_{sz} = \frac{1}{2}(1+r)\bar{\epsilon}_{sz}^D + \frac{1}{2}(1-r)\bar{\epsilon}_{sz}^B \quad (\text{پ})$$

که در آن $\bar{\epsilon}_{rz}^A$, $\bar{\epsilon}_{rz}^C$, $\bar{\epsilon}_{sz}^B$ و $\bar{\epsilon}_{sz}^D$ مؤلفه‌های تانسور برشی در نقاط A و B و C و D هستند که با استفاده از درون‌یابی‌های تغییر مکان تعیین شده‌اند. برای به دست آوردن این مؤلفه‌ها، از عبارات خطی رابطه عمومی مؤلفه‌های کرنش برحسب بردارهای پایه استفاده می‌کنیم (ر.ک. به: مثال ۲.۲۸):

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2}[\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j - \mathbf{g}_i^0 \cdot \mathbf{g}_j^0]$$

که در آن اندیس بالای سمت چپ بردارهای پایه، برای بافتار تغییر شکل یافته مساوی ۱ بوده و برای بافتار اولیه مساوی صفر می‌باشد. از جایگذاری (۵.۹۹) و (الف) نتایج زیر حاصل می‌گردند:

$$\bar{\epsilon}_{rz}^A = \frac{1}{4} \left[\frac{h}{2}(w_1 - w_2) + \frac{h}{4}(x_1 - x_2)(\theta_y^1 + \theta_y^2) - \frac{h}{4}(y_1 - y_2)(\theta_x^1 + \theta_x^2) \right]$$

و

$$\bar{\epsilon}_{rz}^C = \frac{1}{4} \left[\frac{h}{2}(w_4 - w_3) + \frac{h}{4}(x_4 - x_3)(\theta_y^4 + \theta_y^3) - \frac{h}{4}(y_4 - y_3)(\theta_x^4 + \theta_x^3) \right]$$

بنابراین با استفاده از (ب) نتیجه زیر حاصل می‌گردد:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{rz} = & \frac{1}{8}(1+s) \left[\frac{h}{2}(w_1 - w_2) + \frac{h}{4}(x_1 - x_2)(\theta_y^1 + \theta_y^2) - \frac{h}{4}(y_1 - y_2)(\theta_x^1 + \theta_x^2) \right] \\ & + \frac{1}{8}(1-s) \left[\frac{h}{2}(w_4 - w_3) + \frac{h}{4}(x_4 - x_3)(\theta_y^4 + \theta_y^3) - \frac{h}{4}(y_4 - y_3)(\theta_x^4 + \theta_x^3) \right] \end{aligned}$$

به طریقه مشابه و با استفاده از (پ) نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{sz} = & \frac{1}{8}(1+r) \left[\frac{h}{2}(w_1 - w_4) + \frac{h}{4}(x_1 - x_4)(\theta_y^1 + \theta_y^4) - \frac{h}{4}(y_1 - y_4)(\theta_x^1 + \theta_x^4) \right] \\ & + \frac{1}{8}(1-r) \left[\frac{h}{2}(w_2 - w_3) + \frac{h}{4}(x_2 - x_3)(\theta_y^2 + \theta_y^3) - \frac{h}{4}(y_2 - y_3)(\theta_x^2 + \theta_x^3) \right] \end{aligned}$$

سپس از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\bar{\epsilon}_{ij} \mathbf{g}_i^l \mathbf{g}_j^j = \epsilon_{kl} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \quad (\text{ت})$$

که در آن ϵ_{kl} مؤلفه‌های تانسور کرنش هستند که در دستگاه مختصات دکارتی اندازه گرفته شده‌اند. از (ت) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= 2\bar{\epsilon}_{xz}(\mathbf{g}^r \cdot \mathbf{e}_x)(\mathbf{g}^z \cdot \mathbf{e}_z) + 2\bar{\epsilon}_{xz}(\mathbf{g}^s \cdot \mathbf{e}_x)(\mathbf{g}^z \cdot \mathbf{e}_z) \\ \gamma_{yz} &= 2\bar{\epsilon}_{yz}(\mathbf{g}^r \cdot \mathbf{e}_y)(\mathbf{g}^z \cdot \mathbf{e}_z) + 2\bar{\epsilon}_{yz}(\mathbf{g}^s \cdot \mathbf{e}_y)(\mathbf{g}^z \cdot \mathbf{e}_z)\end{aligned}\quad (\text{ث})$$

با وجود این (با استفاده از روش استاندارد که در بخش ۲.۴ توصیف گردید) داریم:

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^r &= \sqrt{g^{rr}} (\sin \beta \mathbf{e}_x - \cos \beta \mathbf{e}_y) \\ \mathbf{g}^s &= \sqrt{g^{ss}} (-\sin \alpha \mathbf{e}_x + \cos \alpha \mathbf{e}_y) \\ \mathbf{g}^z &= \sqrt{g^{zz}} \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

که در آن α و β به ترتیب زوایای بین محوره‌های r و s و محوره‌های x و y باشند و:

$$\begin{aligned}g^{rr} &= \frac{(C_x + rB_x)^2 + (C_y + rB_y)^2}{16(\det \mathbf{J})^2} \\ g^{ss} &= \frac{(A_x + sB_x)^2 + (A_y + sB_y)^2}{16(\det \mathbf{J})^2}\end{aligned}$$

که در آن A_x و B_x و C_x و A_y و B_y و C_y در (۵.۱۰۵) تعریف شده‌اند و داریم:

$$g^{zz} = \frac{4}{h^2}$$

از جایگذاری در (ت)، روابط (۵.۱۰۲) حاصل می‌گردند.

عنصر خمش صفحه‌ای MITC4 در بافتارهای هندسی مستطیلی یا متوازی‌الاضلاعی مشابه سایر عناصر خمشی چهارگره‌ای است و با ارتباط نزدیکی با آنها دارد (ر.ک. به: [A] T. J. R. Hughes and T. E. Tezduyar و [A] R. H. MacNeal). نشانه مهم عنصر صفحه‌ای MITC این است که این عنصر حالتی خاص از عنصر عمومی پوسته‌ای برای تحلیل خطی و غیرخطی است. بویژه استفاده از درونیابی‌های کرنشی هموردا ظرفیت پیش‌بینی کنندگی نسبتاً بالایی را به عنصر می‌دهد، حتی هنگامی که با اعوجاجات هندسی زاویه‌ای، که در شکل ۵.۳۱ نشان داده شده‌اند، مورد استفاده قرار می‌گیرند (ر.ک. به: [A] K. J. Bathe and E. N. Dvorkin). البته در عمل عناصر با اعوجاجات زاویه‌ای به طور گسترده‌ای به کار می‌روند.

برخی نکات در ارتباط با عنصر MITC4 عبارتند از:

رفتار این عنصر هنگامی که در تحلیل سازه تیری دوبعدی به کار می‌رود مانند عنصر تیری تک پارامتری دوگره‌ای می‌باشد که به طور آمیخته درونیابی شده است (که در بخش پیشین بدان اشاره شد).

که در آن e_{xi} مؤلفه‌های تانسور کرنش هستند که در دستگاه مختصات دکارتی اندازه گرفته شده‌اند. از (ت) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}\gamma_{xz} &= 2\bar{e}_{rz}(g^r \cdot e_x)(g^z \cdot e_z) + 2\bar{e}_{sz}(g^s \cdot e_x)(g^z \cdot e_z) \\ \gamma_{yz} &= 2\bar{e}_{rz}(g^r \cdot e_y)(g^z \cdot e_z) + 2\bar{e}_{sz}(g^s \cdot e_y)(g^z \cdot e_z)\end{aligned}\quad (\text{ث})$$

با وجود این (با استفاده از روش استاندارد که در بخش ۲.۴ توصیف گردید) داریم:

$$\begin{aligned}g^r &= \sqrt{g^{rr}} (\sin \beta e_x - \cos \beta e_y) \\ g^s &= \sqrt{g^{ss}} (-\sin \alpha e_x + \cos \alpha e_y) \\ g^z &= \sqrt{g^{zz}} e_z\end{aligned}$$

که در آن α و β به ترتیب زوایای بین محوره‌های r و x و محوره‌های s و y می‌باشند و:

$$\begin{aligned}g^{rr} &= \frac{(C_x + rB_x)^2 + (C_y + rB_y)^2}{16(\det \mathbf{J})^2} \\ g^{ss} &= \frac{(A_x + sB_x)^2 + (A_y + sB_y)^2}{16(\det \mathbf{J})^2}\end{aligned}$$

که در آن A_x و B_x و C_x و A_y و B_y و C_y در (۵.۱۰۵) تعریف شده‌اند و داریم:

$$g^{zz} = \frac{4}{h^2}$$

از جایگذاری در (ت)، روابط (۵.۱۰۲) حاصل می‌گردند.

عنصر خمشی صفحه‌ای MITC4 در بافتارهای هندسی مستطیلی یا متوازی‌الاضلاع مشابه سایر عناصر خمشی چهارگره‌ای است و یا ارتباط نزدیکی با آنها دارد (ر.ک. به: [A] T. J. R. Hughes and T. E. Tezduyar و [A] R. H. MacNeal). نشانه مهم عنصر صفحه‌ای MITC این است که این عنصر حالتی خاص از عنصر عمومی پوسته‌ای برای تحلیل خطی و غیرخطی است. بویژه استفاده از درونیابی‌های کرنشی هموردا ظرفیت پیش‌بینی کنندگی نسبتاً بالایی را به عنصر می‌دهد، حتی هنگامی که با اعوجاجات هندسی زاویه‌ای، که در شکل ۵.۳۱ نشان داده شده‌اند، مورد استفاده قرار می‌گیرند (ر.ک. به: [A] K. J. Bathe and E. N. Dvorkin). البته در عمل عناصر با اعوجاجات زاویه‌ای به طور گسترده‌ای به کار می‌روند.

برخی نکات در ارتباط با عنصر MITC4 عبارتند از:

رفتار این عنصر هنگامی که در تحلیل سازه تیری دوبعدی به کار می‌رود مانند عنصر تیری تک پارامتری دوگره‌ای می‌باشد که به طور آمیخته درونیابی شده است (که در بخش پیشین بدان اشاره شد).

این عنصر را می‌توان از اصل وردشی Hu-Washizu استخراج نمود (ر.ک. به: مثال ۴.۳۰).
آزمون حساسیت در مورد این عنصر نتیجه مثبت می‌دهد (برای اثبات تحلیلی ر.ک. به:
[K. J. Bathe and E. N. Dvorkin[B]

تحلیل ریاضی همگرایی برای تغییر مکان جانبی و دوران‌های مقطع توسط
[K. J. Bathe and F. Brezzi[A] فراهم شده است (با فرض شبکه‌های یکنواخت،
به عبارت دیگر، مجموعه همبسته که از عناصر مربعی، با اضلاع h تشکیل شده است).
از این تحلیل نتایج زیر به دست می‌آید:

$$\|\beta - \beta_h\|_1 \leq c_1 h \quad ; \quad \|\nabla w - \nabla w_h\|_0 \leq c_2 h \quad (5.1.6)$$

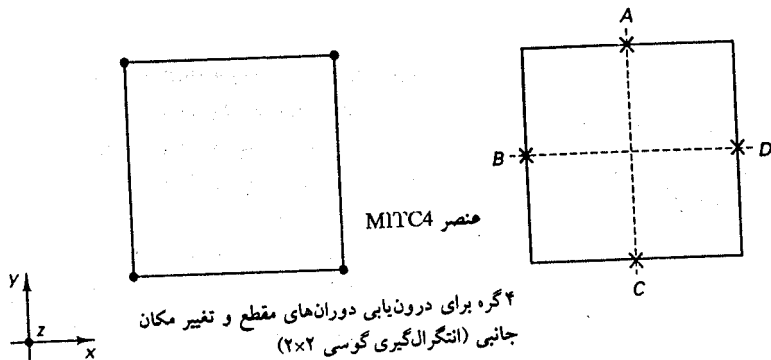
که در آن β و w جواب‌های کامل بوده و β_h و w_h جواب‌های تحلیل عناصر مربوط
به شبکه‌ای از عناصر با اضلاع h می‌باشند و c_1 و c_2 مقادیر ثابت مستقل از
 h می‌باشند. تحلیل همگرایی کرنش‌های برشی جانبی این نتیجه را به دست
می‌دهد که نرم L^2 خطا صرف نظر از میزان ضخامت صفحه، کراندار نمی‌باشد (ر.ک. به:
[F. Brezzi, M. Fortin and R. Stenberg[A]

اساس نتایج این مطالعات تحلیلی همگرایی در عمل برای شبکه‌های یکنواخت و دارای
اعوجاج نیز مشاهده می‌شود. عنصر مذکور تغییر مکان‌های جانبی و کرنش‌های خمشی
را به صورت کاملاً مطلوبی پیش‌بینی می‌کند، اما پیش‌بینی‌های کرنش برشی جانبی
ممکن است رضایت‌بخش نباشد، بورژه هنگامی که صفحات بسیار نازک تحلیل می‌شوند.

یک نکته بسیار مهم در تحلیل ریاضی عنصر MITC4 این بود که این عنصر در پایه
ریاضی‌اش مشابه عنصر ۴/۱ از خانواده عناصر u/p که در بخش ۴.۴.۳ ارائه گردید می‌باشد: در
فرمول‌بندی u/p تغییر مکان‌ها و فشار برای تأمین شرایط (تقریباً) تراکم‌ناپذیری درونیابی
می‌شوند، $e_v = 0$ ، در حالی که در فرمول‌بندی عنصر MITC4، تغییر مکان جانبی، دوران‌های
مقطع و کرنش‌های برشی جانبی برای حصول شرط صفحه نازک درونیابی می‌گردند، $\gamma = 0$.
این تشابه بین قید تراکم‌ناپذیری در مکانیک جامدات و قید کرنش برشی جانبی صفر در نظریه
صفحه Reissner-Mindlin موجب ایجاد و بسط یک پایه ریاضی شده است که هدف از آن
ایجاد عناصر جدید خمشی صفحه‌ای می‌باشد (ر.ک. به: [K. J. Bathe and F. Brezzi[A].
از آنجا که این عناصر براساس درونیابی آمیخته تغییر مکان جانبی، دوران‌های مقطع و
کرنش‌های برشی جانبی استوار می‌باشند و برای هندسه‌های عمومی مؤلفه‌های تانسوری را
مورد استفاده قرار می‌دهند (مانند عنصر MITC4)، از اینرو به آنها، عناصر MITC با n گره
اطلاق می‌گردد (به عبارت دیگر عناصر MITCn).

دشواری اساسی، انتخاب مرتبه‌های درونیابی‌های تغییر مکان جانبی، دوران‌های مقطع
و کرنش‌های برشی جانبی می‌باشد که با همدیگر موجب رفتار عدم قفل شوندگی و همگرایی
بهینه عنصر می‌شوند. ملاحظات ریاضی برای انتخاب درونیابی‌های مناسب توسط

J. Bathe و M. L. Bucelem and F. Brezzi [A], K. J. Bathe and F. Brezzi [B]
 F. Brezzi, K. J. Bathe and M. Fortin K. [A]
 پژوهشگران عناصر نشان داده شده در شکل ۵.۲۷ و عناصر دیگر و نیز نتایج عددی را ارائه نموده‌اند.
 شکل ۵.۲۷ و جدول ۵.۳ توابع درونیابی عناصر چهارضلعی ۹ و ۱۶ گرهی و عناصر
 مثلثی ۷ و ۱۲ گرهی را به اختصار نشان داده و نرخ‌های همگرایی را به دست می‌دهند. در شکل
 ۵.۲۷ درونیابی‌ها برای عناصری که از نظر شکل هندسی بدون اعوجاج می‌باشند داده شده‌اند
 و همچون حالت عنصر MITC4 از مؤلفه‌های تانسوری استفاده خواهیم کرد تا درونیابی‌های
 مذکور را به عناصری که دارای اعوجاج هندسی می‌باشند تعمیم دهیم. استفاده از
 درونیابی‌های داده شده در شکل ۵.۲۷ را در یک مثال نشان می‌دهیم.

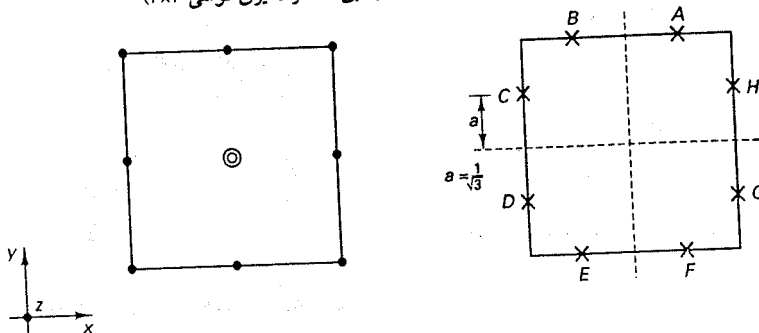


- گره‌ها برای درونیابی w و β_y, β_x

$$\gamma_{xz} = a_1 + b_1 y; \quad C \text{ و } A \text{ نقاط پیوند}$$

$$\gamma_{yz} = a_2 + b_2 x; \quad D \text{ و } B \text{ نقاط پیوند}$$

MITC9 عنصر
 ۹ گره برای درونیابی دوران‌های مقطع و ۸ گره برای
 درونیابی تغییر مکان جانی (انتگرال‌گیری گوسی ۳×۳)



- گره‌ها برای درونیابی w و β_y, β_x

© β_y و β_x گره برای درونیابی

$$\gamma_{xz} = a_1 + b_1 x + c_1 y + d_1 xy + e_1 y^2; \quad A, B, E, F \text{ نقاط پیوند}$$

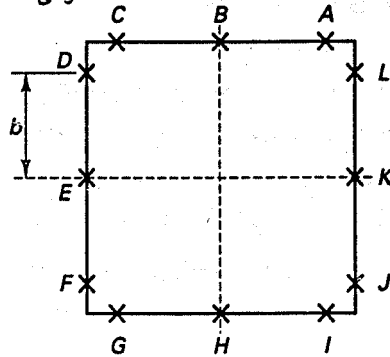
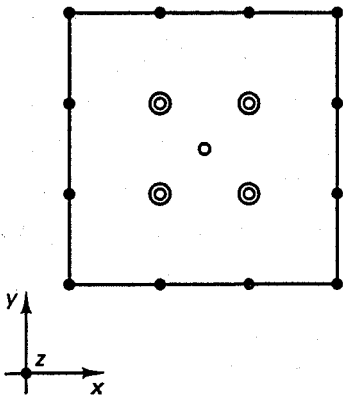
$$\gamma_{yz} = a_2 + b_2 x + c_2 y + d_2 xy + e_2 x^2; \quad H, G, D, C \text{ نقاط پیوند}$$

$$\int_A (\nabla w - \beta - \gamma) dA = 0 \text{ به اضافه پیوند انتگرالی}$$

شکل ۵.۲۷ عناصر خمش صفحه‌ای؛ عناصر مربعی و مثلث متساوی‌الاضلاع شکل که طول اضلاع آنها ۲ واحد می‌باشند در نظر گرفته شده‌اند.

۱۶ گره برای درونیابی دوران‌های مقطع و ۱۳ گره
برای درونیابی تغییر مکان جانبی (انتگرال‌گیری
گوسی ۴×۴)

عنصر MITC16



$$b = \sqrt{\frac{3}{5}}$$

- گره‌ها برای درونیابی β_x , β_y و w
- ⊙ گره‌ها برای درونیابی β_x و β_y
- گره‌ها برای درونیابی w

$$\gamma_{xz} = a_1 + b_1x + c_1y + d_1x^2 + e_1xy + f_1y^2 + g_1x^2y + h_1xy^2 + i_1y^3;$$

پیوند در نقاط A, B, C, G, H, I;

$$\gamma_{yz} = a_2 + b_2x + c_2y + d_2x^2 + e_2xy + f_2y^2 + g_2x^2y + h_2xy^2 + i_2x^3;$$

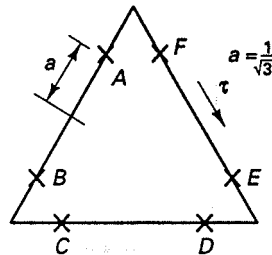
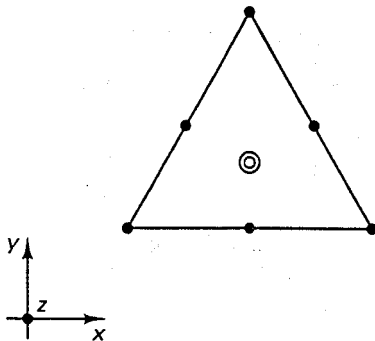
پیوند در نقاط D, E, F, J, K, L;

$$\int_A (\nabla w - \beta - \gamma) dA =$$

$$\int_A (\nabla w - \beta - \gamma)x dA = \int_A (\nabla w - \beta - \gamma)y dA = 0$$

۷ گره برای درونیابی دوران‌های مقطع و ۶ گره برای
درونیابی تغییر مکان جانبی (انتگرال‌گیری گوسی ۷
نقطه‌ای)

عنصر MITC7



$$a = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\gamma_{xz} = a_1 + b_1x + c_1y + \gamma(dx + ey);$$

$$\gamma_{yz} = a_2 + b_2x + c_2y - x(dx + ey);$$

tying of $\gamma \cdot \tau$ at A, B, C, D, E, F

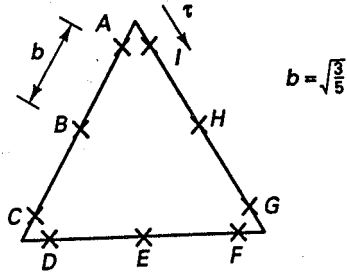
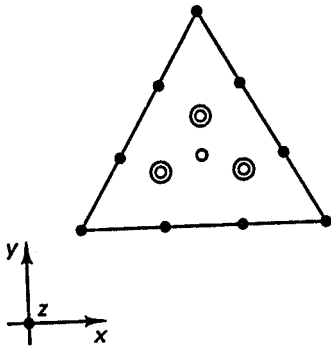
$$\int_A (\nabla w - \beta - \gamma) dA = 0$$

- گره‌ها برای درونیابی β_x , β_y و w
- ⊙ گره‌ها برای درونیابی β_x و β_y

شکل ۵.۲۷ (ادامه)

عنصر MITC12

۱۲ گره برای درون‌یابی دوران‌های مقطع و ۱۰ گره
برای درون‌یابی تغییر مکان جانبی (انستگراگیری
گوسی ۱۳ نقطه‌ای)



$$\gamma_{xz} = a_1 + b_1x + c_1y + d_1x^2 + e_1xy + f_1y^2 + y(gx^2 + hxy + iy^2);$$

$$\gamma_{yz} = a_2 + b_2x + c_2y + d_2x^2 + e_2xy + f_2y^2 - x(gx^2 + hxy + iy^2);$$

پیوند γ, τ در نقاط A, B, C, D, E, F, G, H, I

$$\int_A (\nabla w - \beta - \gamma) dA = \int_A (\nabla w - \beta - \gamma) x dA = 0$$

$$\int_A (\nabla w - \beta - \gamma) y dA = 0$$

- گره‌ها برای درون‌یابی β_x و β_y و w
- ⊙ β_y و β_x برای درون‌یابی
- گره‌ها برای درون‌یابی w

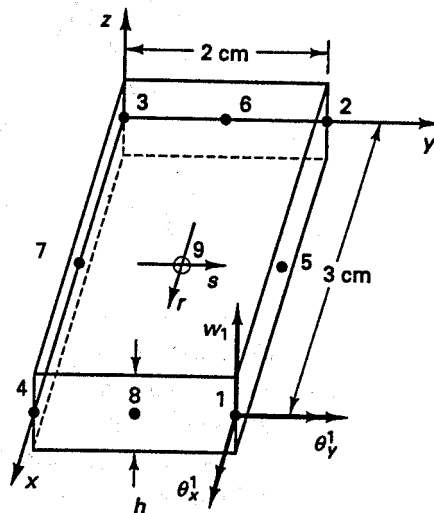
شکل ۵.۲۷ (ادامه)

جدول ۵.۳ فضاهای درون‌یابی و تخمین‌های خطا برای خمش صفحه که به طور تئوریک برآورده شده‌اند.

عناصر	فضاهای مورد استفاده برای دوران‌های مقطع و تغییر مکان جانبی †	تخمین‌های خطا
MITC4	$\beta_h \in Q_1 \times Q_1$ $w_h \in Q_1$	$\ \beta - \beta_h\ _1 \leq ch$ $\ \nabla w - \nabla w_h\ _0 \leq ch$
MITC9	$\beta_h \in Q_2 \times Q_2$ $w_h \in Q_2 \cap P_3$	$\ \beta - \beta_h\ _1 \leq ch^2$ $\ \nabla w - \nabla w_h\ _0 \leq ch^2$
MITC16	$\beta_h \in Q_3 \times Q_3$ $w_h \in Q_3 \cap P_4$	$\ \beta - \beta_h\ _1 \leq ch^3$ $\ \nabla w - \nabla w_h\ _0 \leq ch^3$
MITC7	$\beta_h \in (P_2 \oplus \{L_1 L_2 L_3\}) \times (P_2 \oplus \{L_1 L_2 L_3\})$ $w_h \in P_2$	$\ \beta - \beta_h\ _1 \leq ch^2$ $\ \nabla w - \nabla w_h\ _0 \leq ch^2$
MITC12	$\beta_h \in (P_3 \oplus \{L_1 L_2 L_3\} P_1) \times (P_3 \oplus \{L_1 L_2 L_3\} P_1)$ $w_h \in P_3$	$\ \beta - \beta_h\ _1 \leq ch^3$ $\ \nabla w - \nabla w_h\ _0 \leq ch^3$

† برای نمادگذاری مورد استفاده به بخش ۴.۳ مراجعه شود.

مثال ۵.۳۱: نشان دهید که چگونه ماتریس‌های درونیابی کرنش برای ماتریس سختی عنصر MITC9 که در شکل ۵.۳۱ E نشان داده شده است ایجاد می‌شوند.



شکل ۵.۳۱ E عنصر خمش صفحه‌ای نه گرهی

حل:

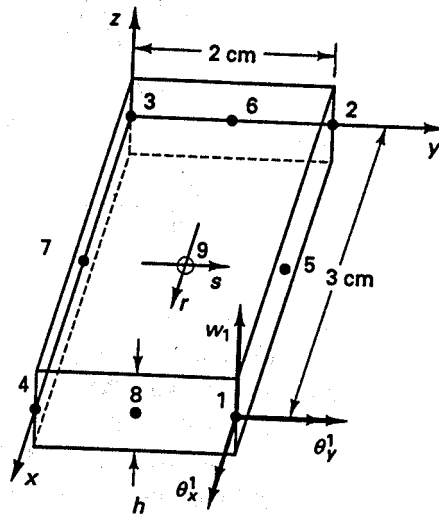
هندسهٔ عنصر، مشابه هندسه عنصر چهارگره‌ای است که در شکل ۵.۲۹ E ملاحظه گردید؛ از اینرو ماتریس ژاکوبی هر دو یکسان می‌باشد. از آنجا که تغییر مکان‌های جانبی به وسیلهٔ درونیابی‌های هشت گرهی تعیین می‌شوند که در شکل ۵.۴ ارائه گردیده‌اند، از اینرو داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1+2r)(1+s) - (1-s^2) & | & \dots \\ (1+2s)(1+r) - (1-r^2) & | & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_8 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

دوران‌های مقطع به وسیلهٔ توابع درونیابی نه گرهی تعیین می‌شوند که در شکل ۵.۴ داده شده‌اند و داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1+2r)(1+s) - (1+2r)(1-s^2) & | & \dots \\ (1+2s)(1+r) - (1+2s)(1-r^2) & | & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_y^1 \\ \theta_y^2 \\ \vdots \\ \theta_y^8 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

مثال ۵.۳۱: نشان دهید که چگونه ماتریس‌های درونیابی کرنش برای ماتریس سختی عنصر MITC9 که در شکل ۵.۳۱ نشان داده شده است ایجاد می‌شوند.



شکل ۵.۳۱ عنصر خمش صفحه‌ای نه گرهی

حل:

هندسه عنصر، مشابه هندسه عنصر چهارگره‌ای است که در شکل ۵.۲۹ E ملاحظه گردید؛ از اینرو ماتریس ژاکوبی هر دو یکسان می‌باشد. از آنجا که تغییر مکان‌های جانبی به وسیله درونیابی‌های هشت گرهی تعیین می‌شوند که در شکل ۵.۴ ارائه گردیده‌اند، از اینرو داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1+2r)(1+s) - (1-s^2) & | & \dots \\ (1+2s)(1+r) - (1-r^2) & | & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_8 \end{bmatrix} \quad (\text{الف})$$

دوران‌های مقطع به وسیله توابع درونیابی نه گرهی تعیین می‌شوند که در شکل ۵.۴ داده شده‌اند و داریم:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial y} \end{bmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1+2r)(1+s) - (1+2r)(1-s^2) & | & \dots \\ (1+2s)(1+r) - (1+2s)(1-r^2) & | & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x^1 \\ \theta_x^2 \\ \vdots \\ \theta_x^8 \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \beta_y}{\partial x} \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1+2r)(1+s) - (1+2r)(1-s^2) & | & \dots \\ (1+2s)(1+r) - (1+2s)(1-r^2) & | & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_x^1 \\ \theta_y^1 \\ \vdots \\ \theta_x^9 \\ \theta_y^9 \end{bmatrix} \quad (\text{پ})$$

حال از ترتیب زیر برای تغییر مکان‌های نقاط گرهی و دوران‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\mathbf{u}^T = [w_1 \quad \theta_x^1 \quad \theta_y^1 \quad | \quad \dots \quad | \quad w_8 \quad \theta_x^8 \quad \theta_y^8 \quad | \quad \theta_x^9 \quad \theta_y^9]$$

در این صورت ماتریس درون‌یابی تغییر مکان جانبی \mathbf{H}_w به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$\mathbf{H}_w = [h_1 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad h_2 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad \dots \quad | \quad h_8 \quad 0 \quad 0 \quad | \quad 0 \quad 0]$$

که در آن h_1 الی h_8 در شکل ۵.۴ داده شده و مربوط به عنصر هشت گرهی می‌باشند. ماتریس درون‌یابی انحناء \mathbf{B}_κ مستقیماً از روابط (ب) و (پ) به دست می‌آید:

$$\mathbf{B}_\kappa = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}[(1+2s)(1+r) - (1+2s)(1-r^2)] \\ 0 & \frac{1}{6}[(1+2r)(1+s) - (1+2r)(1-s^2)] \end{bmatrix} \quad (\text{ت})$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{6}[(1+2r)(1+s) - (1+2r)(1-s^2)] & | & \dots \\ 0 & | & \dots \\ -\frac{1}{4}[(1+2s)(1+r) - (1+2s)(1-r^2)] & | & \dots \end{bmatrix}$$

ماتریس درون‌یابی کرنش برشی جانبی از درون‌یابی برشی داده شده در شکل ۵.۲۷ و روش پیوند که در همان شکل نشان داده شده است به دست می‌آید. بنابراین داریم:

$$\mathbf{B}_\gamma = \begin{bmatrix} 1 & r & s & rs & s^2 & | & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 & r & s & rs & r^2 \end{bmatrix} \alpha \quad (\text{ث})$$

که در آن:

$$\alpha^T = [a_1 \quad b_1 \quad c_1 \quad d_1 \quad e_1 \quad | \quad a_2 \quad b_2 \quad c_2 \quad d_2 \quad e_2]$$

مقادیر موجود در بردار α برحسب تغییر مکان‌های نقاط گرهی و دوران‌ها با استفاده از روابط پیوند بیان می‌شوند. به عنوان مثال، از آنجا که نقطه A در $x = \frac{3}{2}[1 + 1/\sqrt{3}]$ و $y = 2$ واقع است، از اینرو داریم:

$$\gamma_{xz}|_A = a_1 + b_1\left(\frac{3}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c_1(2) + d_2(3)\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + e_1(4)$$

$$= \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \beta_x\right)\bigg|_{\text{at } r=1/\sqrt{3}, s=1} \quad (\text{ج})$$

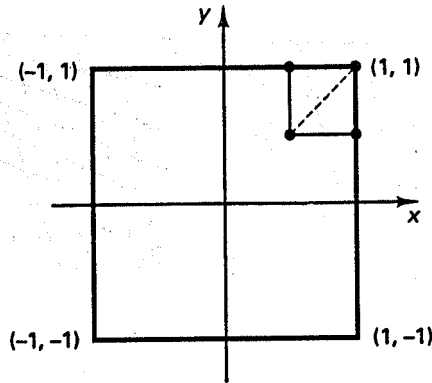
البته $\partial w / \partial x$ به وسیله (الف) و دوران مقطع β_x به وسیله (۵.۹۹) با h_i مربوط به نه گره به دست می‌آیند.

با استفاده از تمامی ۱۰ رابطه پیوند در شکل ۵.۲۷، همانگونه که در تعیین (ج) انجام شد، می‌توان عناصر ماتریس B_7 در (ث) را برحسب تغییر مکان‌ها و دوران‌های نقاط گرهی به دست آورد. عملکرد عددی عناصر MITCn توسط M. L. Bucelem and F. Brezzi [A] و K. J. Bathe انتشار یافته است. با وجود این به طور خلاصه یادآوری می‌کنیم که: همه ماتریس‌های عنصری با استفاده از انتگرال‌گیری عددی تام گوسی تعیین می‌شوند (ر.ک. به: شکل ۵.۲۷).

عناصر شامل مدهای انرژی صفر غیر واقعی نمی‌باشند.

آزمون حساسیت خمش خالص برای این عنصر نتیجه مثبت می‌دهد (ر.ک. به: شکل ۴.۱۸). برای نشان دادن عملکرد عناصر و معرفی یک مسأله آزمایشی ارزشمند شکل‌های ۵.۲۸ الی ۵.۳۲ را در نظر بگیرید. در شکل ۵.۲۸ مسأله مورد آزمون بیان می‌شود. یادآوری می‌شود که تغییر مکان جانبی و دوران‌های مقطع در امتداد مرز کامل صفحه مربعی از پیش تعیین شده می‌باشند و نیز در این مسأله لایه‌های مرزی وجود ندارند (در حالی که در تحلیل‌های عملی با این مورد برخورد می‌کنیم، ر.ک. به: B. Haggblad and K. J. Bathe [A]). بنابراین مرتبه‌های همگرایی که از طریق عددی محاسبه شده‌اند، باید نزدیک به مقادیر پیش‌بینی شده تحلیلی باشند. شکل ۵.۲۹ نتایج حاصل را با استفاده از شبکه‌های یکنواخت نشان می‌دهد و این نتایج با رفتار پیش‌بینی شده تحلیلی، به صورت بسیار مطلوبی مقایسه می‌شوند (در این پیش‌بینی‌ها شبکه‌های یکنواخت فرض می‌شوند). شکل‌های ۵.۳۰ الی ۵.۳۱ نتایج حاصل را با استفاده از دنباله‌ای از شبکه‌های شبه یکنواخت^(۶) نشان می‌دهند و مشاهده می‌کنیم مرتبه‌های همگرایی بطور قابل توجهی تحت تأثیر اعوجاجات عناصر قرار نمی‌گیرند. سرانجام همگرایی کرنش‌های برشی جانبی که به طور عددی پیش‌بینی شده‌اند، در شکل ۵.۳۲ نشان داده می‌شوند. در این جواب‌های خاص عناصر محدود، کرنش‌های برشی با مرتبه‌های همگرایی بالایی پیش‌بینی شده‌اند (که شگفت‌آور می‌باشد، زیرا مشخص است که عموماً در عمل نمی‌توان انتظار چنین نتایجی را داشت).

(۶) برای تعریف دنباله‌ای از شبکه‌های شبه یکنواخت به بخش ۵.۳.۳ مراجعه شود.

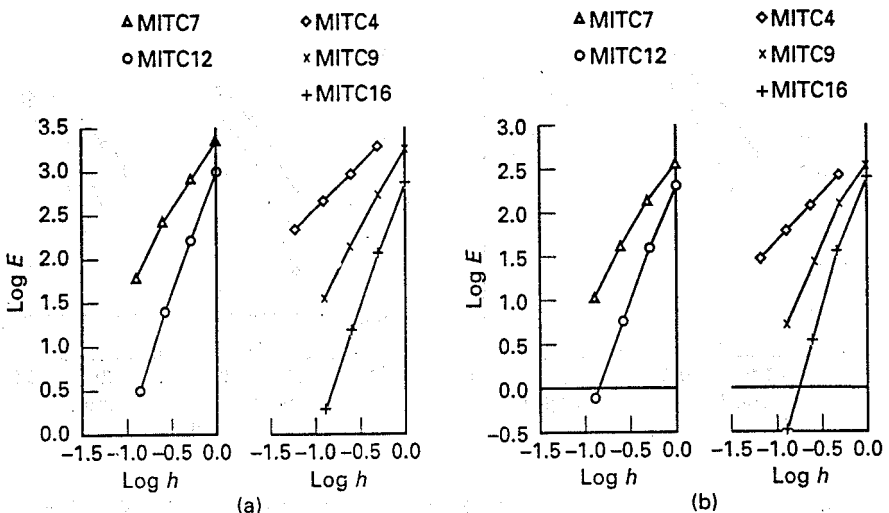


(الف) صفحه مربعی مورد نظر در مسأله خاص مورد آزمون خمش صفحه‌ای، بارگذاری جانبی $p = 0$ ، شرایط مرز غیر صفر. عنصر چهارگرمی نمونه نشان داده می‌شود. خط چین‌ها نشانگر زیر تقسیمی استفاده شده برای شبکه‌های عناصر مثلثی می‌باشند، $h = N$ که در آن $N =$ تعداد عناصر در هر ضلع می‌باشد.

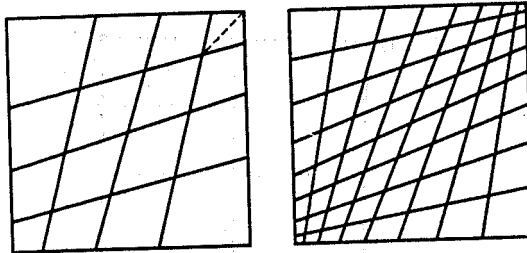
(ب) تغییر مکان جانبی و دوران‌های کامل: $w = \sin kx e^{ky} + \sin k e^{-k}; \theta_x = k \sin kx e^{ky}; \theta_y = -k \cos kx e^{ky}$

(پ) مسأله مورد آزمون: مقادیر تابع w ، θ_x و θ_y را در مرز کامل اعمال کنید و $p = 0$ ، مقادیر داخلی را محاسبه کنید، k یک مقدار ثابت انتخابی می‌باشد، k را مساوی ۵ اختیار کنید.

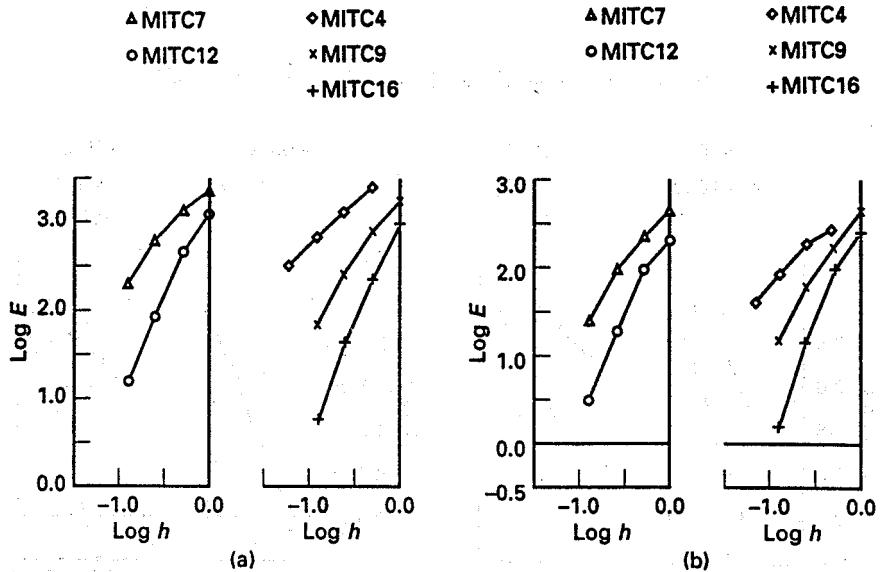
شکل ۵.۲۸ مسأله خاص مورد آزمون برای عناصر خمش صفحه‌ای



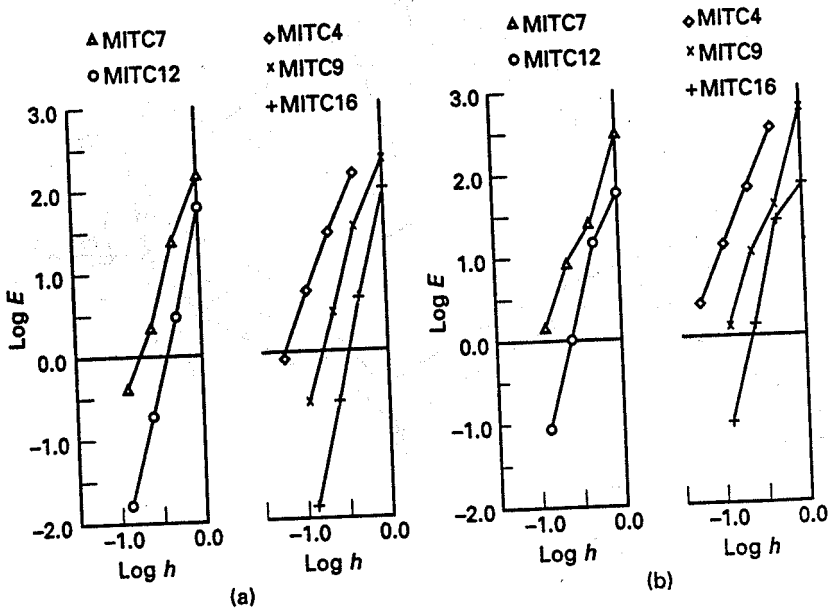
شکل ۵.۲۹ (الف) همگرایی دوران‌های مقطع در تحلیل مسأله خاص مورد آزمون با استفاده از شبکه‌های یکنواخت. معیار خطا $\| \beta - \beta_h \|$ می‌باشد. (ب) همگرایی گرادیان تغییر مکان عمودی در تحلیل مسأله خاص مورد آزمون با استفاده از شبکه‌های یکنواخت. معیار خطا $\| \nabla w - \nabla w_h \|_0$ می‌باشد.



شکل ۵.۳۰ دو شبکه نمونه اعوجاج‌دار که در تحلیل مسأله خاص مورد آزمون استفاده شده است. ----- نشانگر زیر تقسیم‌های مورد استفاده در شبکه‌های با عناصر مثلثی می‌باشد.



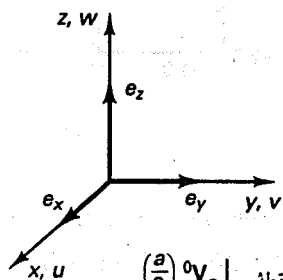
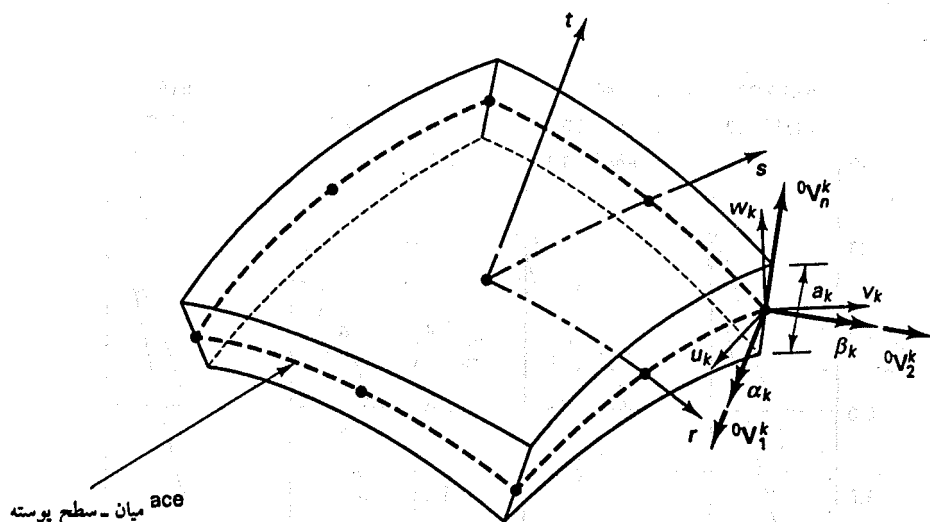
شکل ۵.۳۱ (الف) همگرایی دوران‌های مقطع در تحلیل مسأله خاص مورد آزمون با استفاده از شبکه‌های اعوجاج‌دار. معیار خطا $E = \|\beta - \beta_h\|$ می‌باشد. (ب) همگرایی گرادیان تغییر مکان عمودی در تحلیل مسأله خاص مورد آزمون با استفاده از شبکه‌های اعوجاج‌دار. معیار خطا $E = \|\nabla w - \nabla w_h\|_0$ می‌باشد.



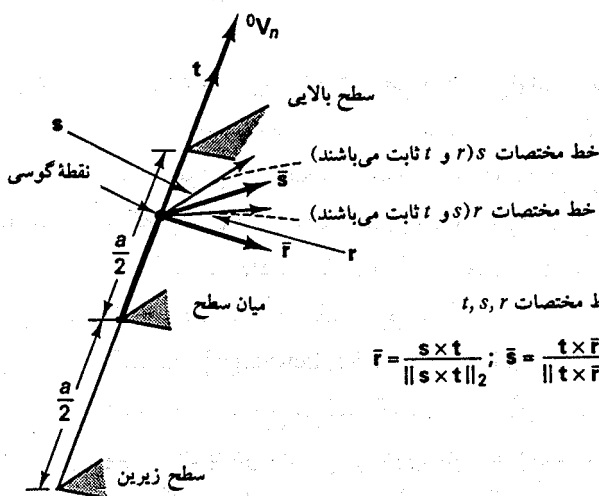
شکل ۵.۳۲ همگرایی کرنش‌های برشی جانبی در تحلیل مسأله مورد آزمون خاص. معیار خطا $E = \|\gamma - \gamma_h\|_0$ می‌باشد. (الف) شبکه‌های یکنواخت (ب) شبکه‌های اعوجاج‌دار.

عناصر پوسته‌ای عمومی

در این بخش فرمول‌بندی عناصر پوسته‌ای عمومی را که می‌توان در تحلیل هندسه‌های پوسته‌ای و توزیع‌های تنش بسیار پیچیده مورد استفاده قرار داد، در نظر می‌گیریم. برای نیل به این هدف ضروری است که روش فرمول‌بندی عنصر صفحه‌ای را که پیشتر مورد بحث قرار دادیم، تعمیم دهیم، مانند طریقه‌ای که فرمول‌بندی عنصر تیری تک پارامتری را از تیرهای دوبعدی مستقیم به تیرهای سه بعدی با انحنای تعمیم دادیم. مانند حالت فرمول‌بندی عناصر تیری (ر.ک. به: بخش ۵.۴.۱)، درونیابی تغییر مکان‌ها را در نظر می‌گیریم که منجر به عنصر مبتنی بر تغییر مکان صرف می‌شود (ر.ک. به: S. Ahmad, B. M. Irons and O. C. Zienkiewicz [A] و سپس فرمول‌بندی را بگونه‌ای اصلاح می‌کنیم که قفل شوندگی برشی و غشایی را نشان ندهد. درونیابی تغییر مکان با در نظر گرفتن درونیابی هندسه به دست می‌آید. یک عنصر پوسته‌ای عمومی با تعداد گره متغیر q را در نظر بگیرید. شکل ۵.۳۳ یک عنصر نه گرهی را نشان می‌دهد که در آن q مساوی ۹ است.



$$\left(\frac{\partial}{\partial t} \right) \mathbf{v}_n \Big|_{\text{در نقطه انتگرال گیری گوسی}} = \sum_k \frac{\partial k}{\partial t} h_k \Big|_{\text{در نقطه انتگرال گیری گوسی}} \mathbf{v}_n^k$$



بردارهای مماس بر خطوط مختصات t, s, r

$$\bar{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{s} \times \mathbf{t}}{\|\mathbf{s} \times \mathbf{t}\|_2}; \quad \bar{\mathbf{s}} = \frac{\mathbf{t} \times \bar{\mathbf{r}}}{\|\mathbf{t} \times \bar{\mathbf{r}}\|_2}$$

شکل ۵.۳۳ عنصر پوسته‌ای نه گرهی؛ تعریف محورهای متعامد $\bar{\mathbf{r}}$ و $\bar{\mathbf{s}}$ و $\bar{\mathbf{t}}$ برای روابط مشخصه

با استفاده از مختصات محلی r و s و t ، مختصات دکارتی هر نقطه در عنصری با q نقطه گرهی، پیش و پس از تغییر شکل، عبارتند از:

$$\begin{aligned} \epsilon x(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k \epsilon x_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k \epsilon V_{nx}^k \\ \epsilon y(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k \epsilon y_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k \epsilon V_{ny}^k \\ \epsilon z(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k \epsilon z_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k \epsilon V_{nz}^k \end{aligned} \quad (5.1.07)$$

که در آن توابع درونیابی به اختصار ارائه شده در شکل ۵.۴ می‌باشند و

$$\epsilon x, \epsilon y, \epsilon z = \text{مختصات دکارتی هر نقطه‌ای از عنصر}$$

$$\epsilon x_k, \epsilon y_k, \epsilon z_k = \text{مختصات دکارتی نقطه گرهی } k$$

$$a_k = \text{ضخامت پوسته در جهت } t \text{ در نقطه گرهی } k$$

$$\epsilon V_{nx}^k, \epsilon V_{ny}^k, \epsilon V_{nz}^k = \text{مؤلفه‌های بردار واحد } \epsilon \mathbf{V}_n^k \text{ «عمود» بر میان - سطح پوسته در جهت } t \text{ در نقطه گرهی}$$

$$k; \mathbf{V}_n^k \text{ را بردار عمود}^{(V)} \text{ می‌نامیم یا به طور مناسب‌تری بردار هادی در نقطه گرهی } k.$$

و اندیس بالای سمت چپ ℓ ، مانند حالت فرمول‌بندی تیر عمومی، بافتار عنصر را نشان می‌دهد، به عبارت دیگر $\ell = 0$ نشانگر بافتار اولیه و $\ell = 1$ نشانگر بافتار نهایی عنصر پوسته‌ای می‌باشد. بنابراین با استفاده از (۵.۱.۰۷)، مؤلفه‌های تغییر مکان عبارتند از:

$$\begin{aligned} u(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k u_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k V_{nx}^k \\ v(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k v_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k V_{ny}^k \\ w(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k w_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k V_{nz}^k \end{aligned} \quad (5.1.08)$$

که در آن \mathbf{V}_n^k شامل نمونه‌های کوسینوس‌های هادی \mathbf{V}_n^k می‌باشد:

$$\mathbf{V}_n^k = {}^1\mathbf{V}_n^k - {}^0\mathbf{V}_n^k \quad (5.1.09)$$

مؤلفه‌های \mathbf{V}_n^k را می‌توان برحسب دوران‌ها در نقطه گرهی k بیان کرد؛ با وجود این، طریقه منحصر به فردی برای ارائه فرمول‌بندی وجود ندارد. یک روش کارآمد، تعریف دو بردار واحد \mathbf{V}_1^k و \mathbf{V}_2^k می‌باشد که متعامد بر \mathbf{V}_n^k می‌باشند:

(V) \mathbf{V}_n^k را بردار عمود می‌نامیم، اگرچه ممکن است که دقیقاً عمود بر میان - سطح پوسته در بافتار اولیه (ر.ک. به: مثال ۵.۳۲) و در بافتار نهایی نباشد (به عنوان مثال به دلیل تغییر شکل‌های برشی).

$${}^0\mathbf{V}_1^k \equiv \frac{\mathbf{e}_y \times {}^0\mathbf{V}_n^k}{\|\mathbf{e}_y \times {}^0\mathbf{V}_n^k\|_2} \quad (\text{الف } ۵.۱۱۰)$$

که در آن \mathbf{e}_y یک بردار واحد در جهت محور y است (برای حالت خاص، که ${}^0\mathbf{V}_n^k$ موازی \mathbf{e}_y می‌باشد، صرفاً ${}^0\mathbf{V}_1^k$ را مساوی \mathbf{e}_z استفاده می‌کنیم). حال می‌توان ${}^0\mathbf{V}_2^k$ را به دست آورد:

$${}^0\mathbf{V}_2^k = {}^0\mathbf{V}_n^k \times {}^0\mathbf{V}_1^k \quad (\text{ب } ۵.۱۱۰)$$

فرض کنید α_k و β_k دوران‌های بردارهای ${}^0\mathbf{V}_n^k$ حول بردارهای ${}^0\mathbf{V}_1^k$ و ${}^0\mathbf{V}_2^k$ باشند در این صورت چون α_k و β_k زوایای کوچکی می‌باشند، داریم:

$$\mathbf{V}_n^k = -{}^0\mathbf{V}_2^k \alpha_k + {}^0\mathbf{V}_1^k \beta_k \quad (۵.۱۱۱)$$

این رابطه را می‌توان هنگامی که ${}^0\mathbf{V}_1 = \mathbf{e}_x$ و ${}^0\mathbf{V}_2 = \mathbf{e}_y$ و ${}^0\mathbf{V}_n = \mathbf{e}_z$ می‌باشند به آسانی اثبات نمود، ولی از آنجا که این بردارها تانسور می‌باشند، رابطه باید در حالت کلی نیز صادق باشد (ر.ک. به: بخش ۲.۴). بنابراین از جایگذاری (۵.۱۱۱) در (۵.۱۰۸) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} u(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k u_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k (-{}^0V_{2x}^k \alpha_k + {}^0V_{1x}^k \beta_k) \\ v(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k v_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k (-{}^0V_{2y}^k \alpha_k + {}^0V_{1y}^k \beta_k) \\ w(r, s, t) &= \sum_{k=1}^q h_k w_k + \frac{t}{2} \sum_{k=1}^q a_k h_k (-{}^0V_{2z}^k \alpha_k + {}^0V_{1z}^k \beta_k) \end{aligned} \quad (۵.۱۱۲)$$

حال با تعریف تغییر مکان‌ها و مختصات عنصر در (۵.۱۱۲) و (۵.۱۰۷) می‌توان به طریقه معمول تعیین ماتریس‌های عنصری یک عنصر مبتنی بر تغییر مکان صرف را دنبال کرد. عناصر ماتریس درونیابی تغییر مکان \mathbf{H} عنصر پوسته‌ای در (۵.۱۱۲) داده شده‌اند و عناصر ماتریس درونیابی کرنش - تغییر مکان را می‌توان با استفاده از روش‌هایی که پیشتر در فرمول‌بندی عنصر تیری توصیف گردیدند، محاسبه نمود (ر.ک. به: بخش ۵.۴.۱).

برای تعیین ماتریس کرنش - تغییر مکان، از (۵.۱۱۲) نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{\partial u}{\partial s} \\ \frac{\partial u}{\partial t} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^q \begin{bmatrix} \frac{\partial h_k}{\partial r} [1 \quad t g_{1x}^k \quad t g_{2x}^k] \\ \frac{\partial h_k}{\partial s} [1 \quad t g_{1x}^k \quad t g_{2x}^k] \\ h_k [0 \quad g_{1x}^k \quad g_{2x}^k] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad (۵.۱۱۳)$$

و مشتقات v و w را می‌توان به آسانی از جایگذاری به ترتیب v و w نیز z به جای u و x به دست آورد. در (۵.۱۱۳)، از نمادگذاری زیر استفاده می‌کنیم:

$$g_1^k = -\frac{1}{2} a_k {}^0V_2^k; \quad g_2^k = \frac{1}{2} a_k {}^0V_1^k \quad (5.114)$$

برای به دست آوردن مشتقات تغییر مکان متناظر با مختصات دکارتی x و y و z ، از تبدیل استاندارد زیر استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \quad (5.115)$$

که در آن ماتریس ژاکوبی \mathbf{J} شامل مشتقات x و y و z نسبت به مختصات طبیعی r و s و t می‌باشد. از جایگذاری (۵.۱۱۳) در (۵.۱۱۵) نتیجه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^q \begin{bmatrix} \frac{\partial h_k}{\partial x} & g_{1x}^k G_x^k & g_{2x}^k G_x^k \\ \frac{\partial h_k}{\partial y} & g_{1y}^k G_y^k & g_{2y}^k G_y^k \\ \frac{\partial h_k}{\partial z} & g_{1z}^k G_z^k & g_{2z}^k G_z^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_k \\ \alpha_k \\ \beta_k \end{bmatrix} \quad (5.116)$$

و مشتقات v و w به طریقه‌ای مشابه به دست می‌آیند. در (۵.۱۱۶) داریم:

$$\frac{\partial h_k}{\partial x} = J_{11}^{-1} \frac{\partial h_k}{\partial r} + J_{12}^{-1} \frac{\partial h_k}{\partial s} \quad (5.117)$$

$$G_x^k = t \left(J_{11}^{-1} \frac{\partial h_k}{\partial r} + J_{12}^{-1} \frac{\partial h_k}{\partial s} \right) + J_{13}^{-1} h_k$$

که در آن J_{ij}^{-1} عنصر (i, j) از ماتریس \mathbf{J}^{-1} می‌باشد.

حال با داشتن مشتقات تغییر مکان تعریف شده در (۵.۱۱۶)، مستقیماً ماتریس کرنش - تغییر مکان \mathbf{B} یک عنصر پوسته‌ای را تشکیل می‌دهیم. با فرض اینکه سطرهای این ماتریس متناظر با تمامی شش مؤلفه کرنش دکارتی کلی $\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ می‌باشند، عناصر ماتریس \mathbf{B} به طریقه‌ای معمول ایجاد می‌شوند (ر.ک. به: بخش ۵.۳)، ولی در این صورت قانون تنش - کرنش باید شامل این فرض پوسته‌ای باشد که تنش عمود بر سطح پوسته صفر می‌باشد. این شرط را که تنش در جهت بردار، صفر است، اعمال می‌کنیم. بنابراین اگر τ و ϵ شامل مؤلفه‌های تنش و کرنش دکارتی باشند، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\tau = \mathbf{C}_{sh} \epsilon \quad (5.118)$$

که در آن داریم:

$$\tau^T = [\tau_{xx} \quad \tau_{yy} \quad \tau_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]$$

$$\epsilon^T = [\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad \epsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]$$

$$C_{sh} = Q_{sh}^T \left(\frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{Symmetric} & & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 & 0 \\ & & k \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 & 0 \\ & & & k \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) Q_{sh} \quad (5.119)$$

و Q_{sh} ماتریسی را نشان می‌دهد که قانون تنش- کرنش را از دستگاه مختصات دکارتی تنظیم شده پوسته‌ای \bar{x} و \bar{y} به دستگاه مختصات دکارتی کلی تبدیل می‌کند. عناصر ماتریس Q_{sh} از کوسینوس‌های هادی محورهای مختصات \bar{x} و \bar{y} و t که در محورهای مختصات x و y و z تعیین شده‌اند، به دست می‌آیند:

$$Q_{sh} = \begin{bmatrix} l_1^2 & m_1^2 & n_1^2 & l_1 m_1 & m_1 n_1 & n_1 l_1 \\ l_2^2 & m_2^2 & n_2^2 & l_2 m_2 & m_2 n_2 & n_2 l_2 \\ l_3^2 & m_3^2 & n_3^2 & l_3 m_3 & m_3 n_3 & n_3 l_3 \\ 2l_1 l_2 & 2m_1 m_2 & 2n_1 n_2 & l_1 m_2 + l_2 m_1 & m_1 n_2 + m_2 n_1 & n_1 l_2 + n_2 l_1 \\ 2l_2 l_3 & 2m_2 m_3 & 2n_2 n_3 & l_2 m_3 + l_3 m_2 & m_2 n_3 + m_3 n_2 & n_2 l_3 + n_3 l_2 \\ 2l_3 l_1 & 2m_3 m_1 & 2n_3 n_1 & l_3 m_1 + l_1 m_3 & m_3 n_1 + m_1 n_3 & n_3 l_1 + n_1 l_3 \end{bmatrix} \quad (5.120)$$

که در آن داریم:

$$\begin{aligned} l_1 &= \cos(e_x, e_{\bar{x}}); & m_1 &= \cos(e_y, e_{\bar{x}}); & n_1 &= \cos(e_z, e_{\bar{x}}) \\ l_2 &= \cos(e_x, e_{\bar{y}}); & m_2 &= \cos(e_y, e_{\bar{y}}); & n_2 &= \cos(e_z, e_{\bar{y}}) \\ l_3 &= \cos(e_x, e_{\bar{z}}); & m_3 &= \cos(e_y, e_{\bar{z}}); & n_3 &= \cos(e_z, e_{\bar{z}}) \end{aligned} \quad (5.121)$$

و رابطه (5.119) متناظر با یک تبدیل تانسوری از مرتبه چهارم می‌باشد که در بخش ۲.۴ بدان اشاره شد. نتیجه می‌شود که در تحلیل یک پوسته عمومی شاید ضروری باشد که ماتریس Q_{sh} بار دیگر در هر نقطه انتگرال‌گیری که در انتگرال‌گیری عددی ماتریس سختی به کار می‌رود تعیین گردد (ر.ک. به: بخش ۵.۵). با وجود این هنگامی که پوسته‌های خاصی مورد نظر می‌باشند و بویژه هنگامی که یک صفحه تحلیل می‌گردد، ضروری است که ماتریس تبدیل و ماتریس تنش- کرنش C_{sh} تنها در نقاط خاصی تعیین شوند و سپس می‌توانند به صورت مکرر به کار برده شوند. به عنوان مثال در تحلیل مجموعه همبسته از صفحات تخت، محاسبه ماتریس تنش- کرنش C_{sh}

تنها یک بار برای هر بخش سازه‌ای تخت ضروری است.

در فرمول‌بندی مزبور، ماتریس کرنش - تغییر مکان متناظر با مؤلفه‌های کرنش دکارتی فرمول‌بندی می‌شود و این مؤلفه‌ها را می‌توان مستقیماً با استفاده از مشتقات (۵.۱۱۶) ایجاد نمود. در یک جایگزین می‌توانستیم مؤلفه‌های کرنش را متناظر با محورهای مختصاتی که با میان - سطح عنصر پوسته‌ای تنظیم شده‌اند محاسبه کنیم و به گونه‌ای که در فرمول‌بندی عنصر عمومی تیری در بخش ۵.۴.۱ عمل کردیم، یک ماتریس کرنش - تغییر مکان برای این مؤلفه‌های کرنش ایجاد نماییم. کارایی نسبی محاسباتی این دو روش بستگی به این سؤال دارد که آیا تبدیل مؤلفه‌های کرنش مؤثرتر است (که همواره در نقاط انتگرال‌گیری متفاوت‌اند) یا تبدیل قانون تنش - کرنش. مقایسه این فرمول‌بندی عنصر پوسته‌ای با فرمول‌بندی که در آن عناصر تخت با جمع آثار رفتار خمش صفحه‌ای و تنش غشایی به کار می‌روند (ر.ک. به: بخش ۴.۲.۳)، سودمند و آموزنده است. برای تشخیص تفاوت‌های دو فرمول‌بندی مذکور فرض کنید که عنصر پوسته‌ای عمومی به عنوان یک عنصر تخت در مدل نمودن یک پوسته به کار رفته است؛ در این صورت ماتریس سختی این عنصر را می‌توانستیم با جمع آثار ماتریس سختی خمش صفحه‌ای که در (۵.۹۴) الی (۵.۹۹) استخراج گردید (ر.ک. به: مثال ۵.۲۹) و ماتریس تنش مسطح مورد بحث در بخش ۵.۳.۱ نیز به دست آوریم. بنابراین در این حالت، عنصر پوسته‌ای عمومی به صورت یک عنصر خمش صفحه‌ای به اضافه یک عنصر تنش مسطح درمی‌آید؛ ولی تفاوت محاسباتی در این واقعیت نهفته است که ماتریس‌های این عناصر از طریق انتگرال‌گیری عددی در میان - صفحه‌های ۲-۳ عناصر محاسبه می‌شوند، در حالی که در محاسبه ماتریس سختی عنصر پوسته‌ای، انتگرال‌گیری عددی در جهت t نیز انجام می‌گیرد (مگر اینکه فرمول‌بندی عمومی برای این حالت خاص اصلاح شود).

برخی از این روابط را در مثال زیر نشان می‌دهیم.

مثال ۵.۳۲ عنصر پوسته‌ای چهارگرهی نشان داده شده در شکل ۵.۳۲ E را در نظر بگیرید.

(الف) عناصر ماتریس درونیابی تغییر مکان را به دست آورید.

(ب) ضخامت در نقطه میانی عنصر را محاسبه کنید و جهتی را که در آن، ضخامت مذکور

تعیین می‌گردد، ارائه نمایید.

حل:

عنصر پوسته‌ای مورد نظر دارای ضخامت متغیر می‌باشد، ولی از نکته نظرانی می‌توان

این عنصر را با عنصر صفحه‌ای مثال ۵.۲۹ مقایسه کرد.

ماتریس درونیابی تغییر مکان H از طریق روابط (۵.۱۱۲) حاصل می‌شود. توابع h_k ،

توابع مربوط به عنصر دوبعدی چهارگرهی می‌باشند (ر.ک. به: شکل ۵.۴ و مثال ۵.۲۹).

بردارهای هادی h_k به وسیله هندسه عنصر به صورت زیر تعیین می‌شوند:

$${}^0\mathbf{V}_n^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}; \quad {}^0\mathbf{V}_n^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}; \quad {}^0\mathbf{V}_n^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad {}^0\mathbf{V}_n^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین:

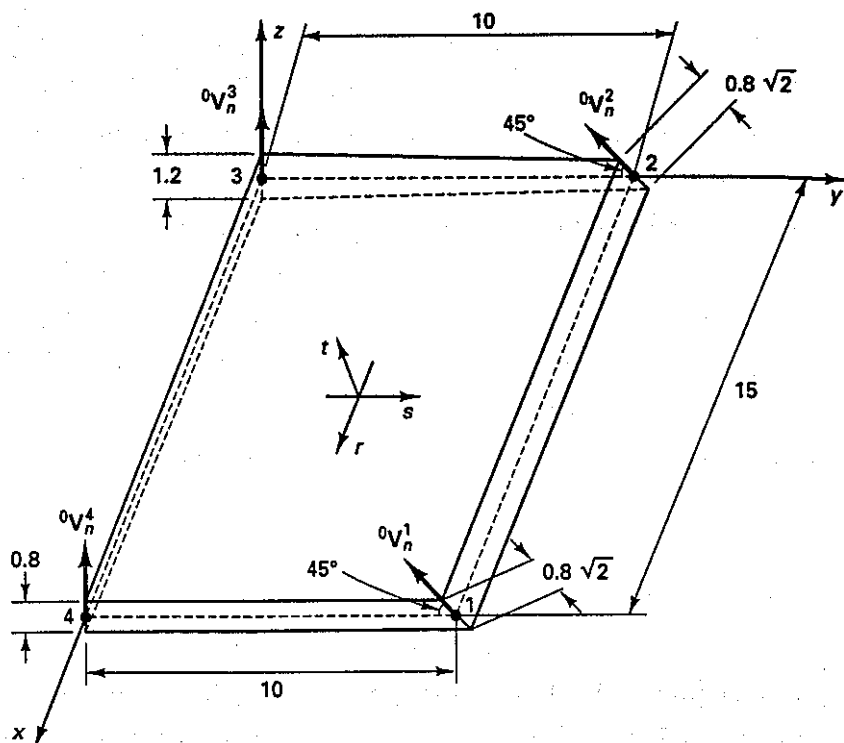
$${}^0\mathbf{V}_1^1 = {}^0\mathbf{V}_1^2 = {}^0\mathbf{V}_1^3 = {}^0\mathbf{V}_1^4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$${}^0\mathbf{V}_2^1 = {}^0\mathbf{V}_2^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}; \quad {}^0\mathbf{V}_2^3 = {}^0\mathbf{V}_2^4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

همچنین داریم:

$$a_1 = a_2 = 0.8\sqrt{2}; \quad a_3 = 1.2; \quad a_4 = 0.8$$

عبارات مزبور تمامی عناصر مربوط به روابط (۵.۱۱۲) را به دست می‌دهند.



شکل ۵.۳۲ عنصر پوسته‌ای چهارگره‌ای

برای محاسبه ضخامت در نقطه میانی عنصر و جهتی را که در آن ضخامت مذکور تعیین می‌شود، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^0 \mathbf{V}_n \Big|_{\text{midpoint}} = \sum_{k=1}^4 \frac{a_k}{2} h_k \Big|_{r=r_0} {}^0 \mathbf{V}_n^k$$

که در آن a ضخامت بوده و بردار هادی ${}^0 \mathbf{V}_n$ جهت مورد نظر را نشان می‌دهد از این عبارت نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\frac{a}{2} {}^0 \mathbf{V}_n = \frac{0.8\sqrt{2}}{4} \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} + \frac{1.2}{8} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{0.8}{8} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.2 \\ 0.45 \end{bmatrix}$$

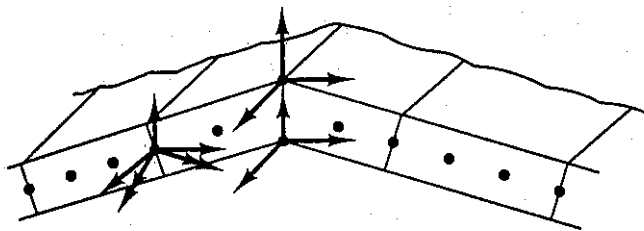
و نتیجه نهایی زیر به دست می‌آید:

$${}^0 \mathbf{V}_n = \begin{bmatrix} 0.0 \\ -0.406 \\ 0.914 \end{bmatrix}; \quad a = 0.985$$

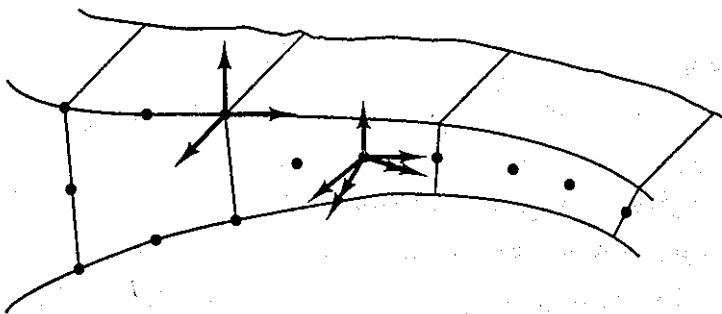
این فرمول‌بندی عنصر پوسته‌ای به روشنی دارای این ویژگی مهم است که هر شکل هندسی پوسته را می‌توان مستقیماً مدل نمود. این تعمیم هنگامی وسعت پیدا می‌کند که فرمول‌بندی به عناصر انتقالی بسط داده شود (مانند بسط انجام شده برای عنصر تیری تک پارامتری مورد بحث در بخش ۵.۴.۱). شکل ۵.۳۴ نشان می‌دهد که چگونه عناصر انتقالی پوسته‌ای را می‌توان برای مدل نمودن محل‌های تقاطع پوسته‌ای و انتقال‌های پوسته به جامد به کار برد که در آنها از ایده‌آل‌سازی‌های عناصر سازگار استفاده می‌شود، بدون آنکه معادلات قیدی خاصی مورد استفاده قرار گیرند. ویژگی‌های عمومیت و دقت در مدل نمودن یک سازه پوسته‌ای، در تحلیل غیرخطی مصالح و هندسی این گونه سازه‌ها از اهمیت خاصی برخوردارند، زیرا بویژه در چنان تحلیل‌هایی، هندسه‌های پوسته‌ای باید به طور دقیق در نظر گرفته شوند. بسط این فرمول‌بندی به تحلیل غیرخطی عمومی را در بخش ۶.۵.۲ مورد بحث قرار خواهیم داد.

فرمول‌بندی مبتنی بر تغییر مکان صرف مانند حالت عناصر تیری تک پارامتری مبتنی بر تغییر مکان دارای این نقطه ضعف می‌باشد که عناصر مرتبه پایین‌تر به دلیل کرنش‌های برشی غیرواقعی و عناصر بالانحنا به علت کرنش‌های غشایی غیرواقعی خاصیت قفل شوندگی از خود نشان می‌دهند. در حقیقت کمترین مرتبه درون‌یابی که باید استفاده شود، یک درون‌یابی درجه سوم تغییر مکان‌ها (یا هندسه) می‌باشد که منجر به ایجاد عناصر پوسته‌ای چهارضلعی ۱۶

گره‌ی و مثلثی ۱۰ گره‌ی می‌شود. ولی حتی این عناصر اگر دارای اعوجاج هندسی باشند تا حدودی قفل شوندگی برشی و غشایی را نشان می‌دهند (و به این دلایل است که عناصر خمش صفحه‌ای MITC16 و MITC12 در شکل ۵.۲۷ ارائه شده‌اند). برای برطرف نمودن رفتار قفل شوندگی، از درونیابی آمیخته استفاده می‌شود و مخصوصاً کاربرد مؤلفه‌های تانسوری بگونه‌ای که توسط K. J. Bathe and E. V. Dvorkin [A] و E. N. Dvorkin and K. J. Bathe [A] پیشنهاد شده است جالب توجه می‌باشد.



(الف) محل تقاطع پوسته‌ای



(ب) محل تقاطع جامد به پوسته

شکل ۵.۳۴ استفاده از عناصر انتقالی پوسته‌ای

نخستین مرحله در فرمول‌بندی آمیخته، نوشتن تانسور کامل کرنش در یک نقطه انتگرال‌گیری به صورت زیر می‌باشد:

$$\epsilon = \underbrace{\bar{\epsilon}_{rr} g' g' + \bar{\epsilon}_{ss} g' g' + \bar{\epsilon}_{rs} (g' g' + g' g')}_{\text{in-layer strains}} + \underbrace{\bar{\epsilon}_{rt} (g' g' + g' g') + \bar{\epsilon}_{st} (g' g' + g' g')}_{\text{transverse shear strains}} \quad (5.122)$$

که در آن $\bar{\epsilon}_{rr}$, $\bar{\epsilon}_{ss}$, ... مؤلفه‌های کرنش هموردا متناظر با بردارهای پایه زیر می‌باشند:

$$g_r = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r}; \quad g_s = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial s}; \quad g_t = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \quad (5.123)$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

و g^r و g^s و g^t بردارهای پایه پادوردای متناظر می‌باشند (ر.ک. به: بخش ۲.۴). یادآوری می‌کنیم که اگر از نمادگذاری اندیسی با $i = 1, 2, 3$ که به ترتیب متناظر با r و s و t می‌باشند استفاده کنیم، $r_1 = r$ و $r_2 = s$ و $r_3 = t$ می‌توانیم تعریف کنیم که:

$${}^0g_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r_i}; \quad {}^1g_i = \frac{\partial (\mathbf{x} + \mathbf{u})}{\partial r_i} \quad (5.124)$$

و در این صورت مؤلفه‌های تانسور کرنش هموردای Green-Lagrange عبارتند از:

$${}^0\bar{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2} ({}^1g_i \cdot {}^1g_j - {}^0g_i \cdot {}^0g_j) \quad (5.125)$$

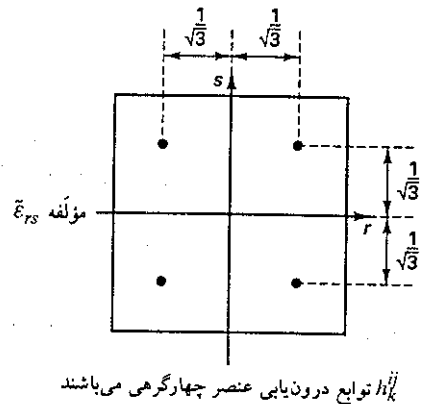
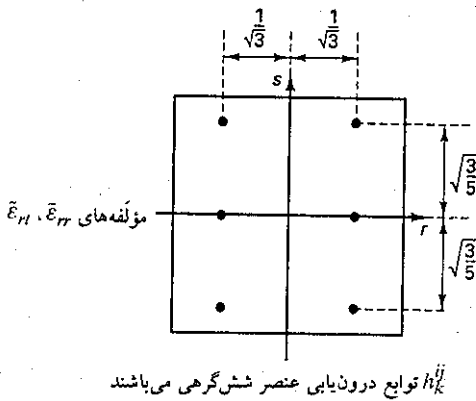
مؤلفه‌های کرنش در (۵.۱۱۸) مؤلفه‌های خطی دکارتی تانسور کرنش می‌باشند که به وسیله (۵.۱۲۵) به دست می‌آیند (ر.ک. به: مثال ۲.۲۸).

هدف در درونیابی آمیخته، درونیابی مؤلفه‌های کرنش درون‌لایه‌ای و کرنش برشی جانبی به طور مستقل و سپس پیوند این درونیابی‌ها به درونیابی‌های معمول تغییر مکان می‌باشد. در این صورت، ماتریس سختی متناظر با متغیرهای نقاط گرهی (تغییر مکان‌ها و دوران‌های مقطع)، مشابه آنچه که برای عناصر مبتنی بر تغییر مکان مورد استفاده قرار گرفتند به دست می‌آید. روشن است که نکته مهم در این فرمول‌بندی انتخاب درونیابی‌های مؤلفه کرنش درون‌لایه‌ای و کرنش برش جانبی می‌باشد، بگونه‌ای که برای درونیابی‌های تغییر مکان مورد استفاده، عنصر حاصله یک ظرفیت پیش‌بینی‌کنندگی بهینه‌ای داشته باشد.

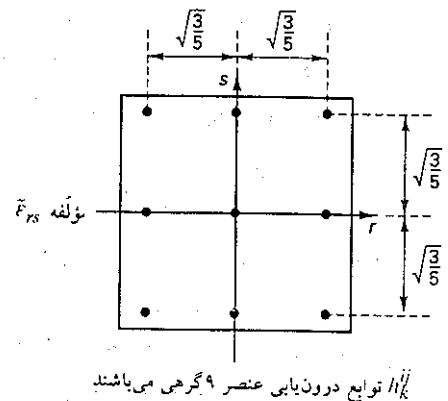
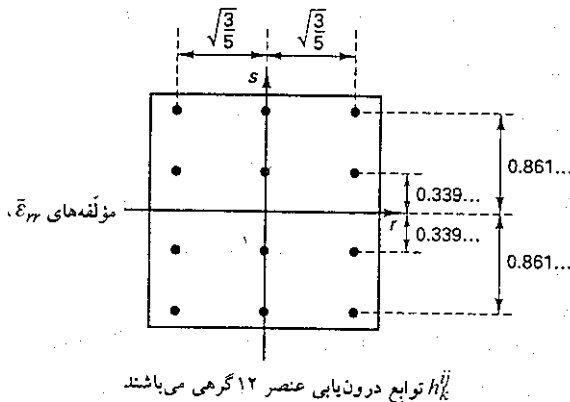
یک عنصر چهارگرهی جالب عنصر پوسته‌ای MITC4 است که توسط E. N. Dvorkin and K. J. Bathe [A] پیشنهاد گردیده است. برای این عنصر کرنش‌های درون‌لایه‌ای از درونیابی‌های تغییر مکان به دست می‌آیند (زیرا عنصر دارای انحناء نمی‌باشد و قفل شوندگی غشایی در عنصر مبتنی بر تغییر مکان وجود ندارد) و مؤلفه‌های هموردای کرنش برشی جانبی درونیابی می‌شوند و بگونه‌ای که در مورد عنصر صفحه‌ای گفته شد، به درونیابی‌های تغییر مکان پیوند داده می‌شوند [ر.ک. به: (۵.۱۰۱)]. عنصر در عمل خمش برون صفحه‌ای (خمش صفحه‌ای) عملکرد بسیار مطلوبی از خود نشان می‌دهد و اگر مدهای ناسازگار، بگونه‌ای که در مثال ۴.۲۸ گفته شد، به درونیابی‌های بنیادی تغییر مکان عنصر

چهارگرهی افزوده شوند، در این صورت عنصر در عمل درون صفحه‌ای (غشایی) نیز دارای عملکرد مطلوبی می‌باشد.

با عناصر از مرتبه بالاتر می‌توان ظرفیت پیش‌بینی کنندگی بسیار قابل توجهی را به دست آورد و شکل ۵.۳۵ درون‌یابی‌ها و نقاط پیوند مورد استفاده برای عناصر ۹ گرهی و ۱۶ گرهی را نشان می‌دهد که توسط M. L. Bucelem and K. J. Bathe [A] پیشنهاد شده‌اند. عناصر مذکور به عنوان عناصر پوسته‌ای MITC9 و MITC16 شناخته می‌شوند.



(الف) عنصر پوسته‌ای MITC9



(ب) عنصر پوسته‌ای MITC16

شکل ۵.۳۵ عناصر پوسته‌ای MITC ۹ درون‌یابی‌های مؤلفه‌های کرنش و نقاط پیوند

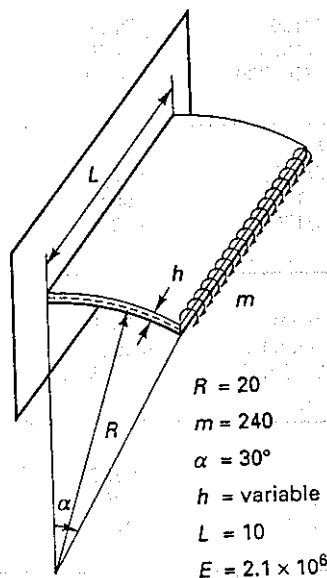
در ادامه بحث پیشین در مورد درونیایی آمیخته عناصر صفحه‌ای، در فرمول‌بندی عناصر پوسته‌ای از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \sum_{k=1}^{n_{ij}} h_k^T \mathbf{B}_{ij}^{DI} |_k \hat{\mathbf{u}} \quad (5.126)$$

که در آن n_{ij} نشانگر تعداد نقاط پیوند مورد استفاده برای مؤلفه کرنش مورد نظر می‌باشد، h_k^T تابع درونیایی مربوط به نقطه پیوند k و $\mathbf{B}_{ij}^{DI} |_k \hat{\mathbf{u}}$ مؤلفه کرنش تعیین شده در نقطه پیوند k با استفاده از فرض تغییر مکان (به وسیله درونیایی تغییر مکان) است. توجه شود که با (5.126) تنها پیوند نقطه‌ای و نه پیوند انتگرالی (همانند حالت عناصر صفحه‌ای MITC از مرتبه بالاتر) انجام می‌گیرد.

متأسفانه تحلیل ریاضی عناصر پوسته‌ای MITC9 و MITC16، همانند آنچه که برای عناصر صفحه‌ای به اختصار در شکل ۵.۲۷ ارائه گردید، هنوز در دسترس نمی‌باشد، اگرچه اطلاعات ارزشمندی در اثر کار پژوهشی [A] Pitkaranta J. حاصل شده است. بنابراین تاکنون فرمول‌بندی عناصر پوسته‌ای براساس (۱) فهم ریاضی و فیزیکی بدست آمده از فرمول‌بندی‌ها و تحلیل‌های عناصر تیری و صفحه‌ای، (۲) درک مستقیم لزوم نمایش دقیق و صحیح رفتار پوسته و نیز (۳) آزمون‌های عددی مطلوب مورد استفاده استوار می‌باشد.

البته عناصر پوسته‌ای MITC که در اینجا ارائه گردیدند شامل مدهای انرژی صفر غیرواقعی نمی‌باشند. همچنین آزمون‌های حساسیت غشایی و خمشی خالص در مورد این عناصر نتایج مثبتی را به دست داده‌اند. یک آزمون ارزشمند دیگر، تحلیل مسأله ارائه شده در


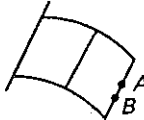
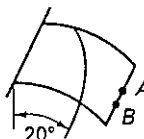




شکل ۵.۳۶ مسأله طره‌ای با انحنا جهت آزمون عناصر پوسته‌ای

شکل ۵.۳۶ است. این آزمون روشن می‌کند که آیا عنصر (به دلیل تنش‌های غشایی و برشی غیرواقعی) قفل می‌شود یا نه، و نیز چگونگی حساسیت ظرفیت پیش‌بینی کنندگی عنصر را نشان می‌دهد، البته در هنگامی که عنصر با انحنا، در مدل یک پوسته با انحنا از نظر هندسی دارای اعوجاج می‌باشد. جدول ۵.۴ نتایج تحلیل مسئله شکل ۵.۳۶ را ارائه می‌نماید و عملکرد مطلوب عناصر MITC9 و MITC16 را نشان می‌دهد.

نتایج عددی دیگری با استفاده از عناصر پوسته‌ای MITC9 و MITC16 به وسیله M. L. Bucleam and K. J. Bathe [A] داده شده‌اند، و عناصری که به طور مشابه فرمول‌بندی شده‌اند توسط H. C. Huang and E. Hinton [A]، K. C. Park and G. M. Stanley [A] و J. Jang and P. M. Pinsky [A] ارائه گردیده‌اند.

جدول ۵.۴ عملکرد عناصر پوسته‌ای MITC9 و MITC16 در تحلیل مسئله شکل ۵.۳۶

شبه	h/R	θ_{FE}/θ_{AN}	
		عنصر پوسته‌ای MITC16	عنصر پوسته‌ای MITC9
		نتایج در نقطه A †	نتایج در نقطه B ‡
	1/100	0.9995	1.0001
	1/1000	0.9995	1.0001
	1/100000	0.9995	1.0001
	1/100	1.0000	1.0000
	1/1000	1.0000	1.0000
	1/100000	1.0000	0.9999
	1/100	0.9956	0.9975
	1/1000	0.9913	0.9796
	1/100000	0.9883	0.9318
	1/100	0.9995	1.0001
	1/1000	0.9995	1.0001
	1/100000	0.9995	1.0001
	1/100	0.9995	1.0000
	1/1000	0.9995	1.0001
	1/100000	0.9995	1.0001

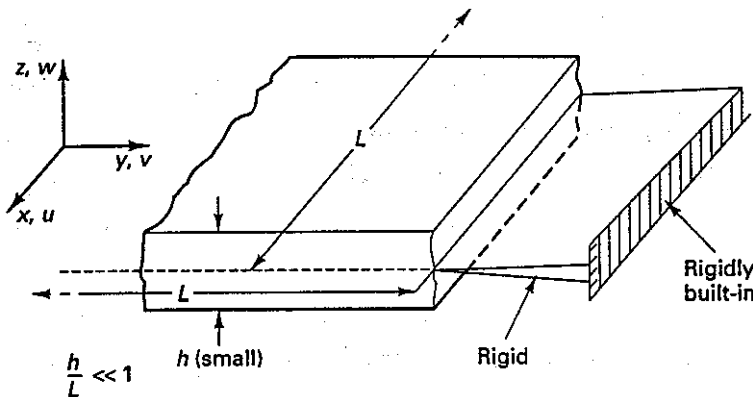
† در وسط لبه واقع است

‡ در ۱/۳ طول لبه واقع است

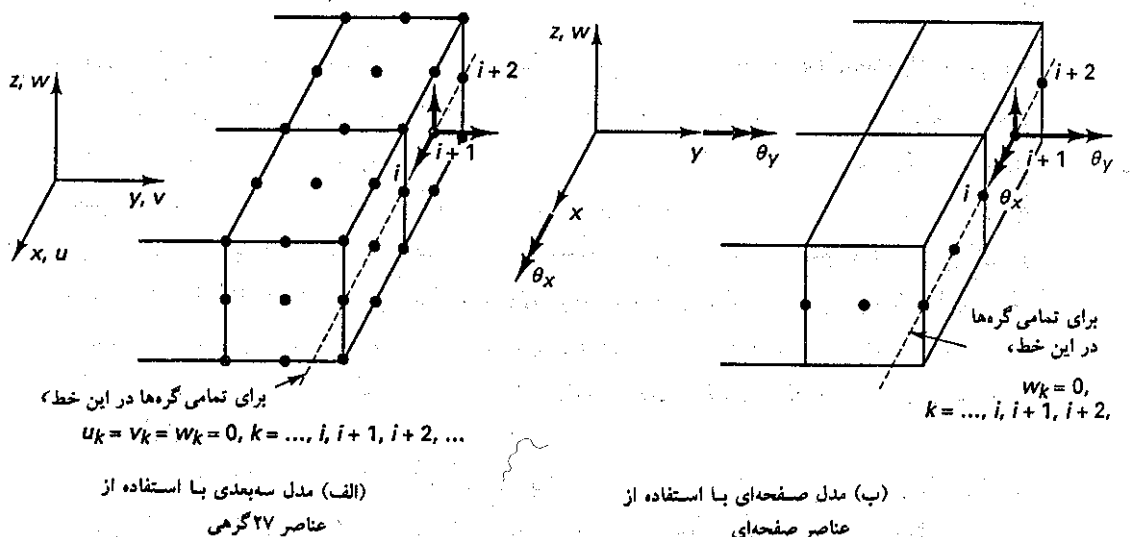
شرایط مرزی

عناصر صفحه‌ای ارائه شده در این بخش براساس نظریه صفحه Reissner-Mindlin استواراند که در آنها تغییر مکان جانبی و دوران‌های مقطع، متغیرهای مستقل می‌باشند. این فرض به طور بنیادی با فرض سینماتیک مورد استفاده در نظریه صفحه Kirchhoff متفاوت است که در آن تنها متغیر مستقل، تغییر مکان جانبی می‌باشد. بنابراین در نظریه صفحه Kirchhoff تمامی شرایط مرزی تنها برحسب تغییر مکان جانبی (و البته مشتقات آنها) نوشته می‌شود، در حالی که در نظریه Reissner-Mindlin تمامی شرایط مرزی برحسب تغییر مکان جانبی و دوران‌های مقطع (و مشتقات آنها) بیان می‌گردند. از آنجا که دوران‌های مقطع به عنوان متغیرهای سینماتیک اضافی مورد استفاده قرار می‌گیرند، در نتیجه شرایط واقعی یک تکیه‌گاه را می‌توان با دقت بیشتر مدل نمود.

به عنوان مثال شرایط تکیه‌گاهی در لبه یک سازه نازک نشان داده شده در شکل ۵.۳۷ را در نظر بگیرید. اگر سازه به صورت یک محیط پیوسته سه بعدی مدل می‌شود، ایده‌آل‌سازی را می‌توانستیم به صورتی که در شکل (الف) ۵.۳۸ نشان داده شده است، انجام دهیم و در این صورت شرایط مرزی به گونه‌ای بود که در شکل ارائه شده است. البته چنین مدلی غیرکارا و غیرعملی خواهد بود، زیرا گسسته‌سازی عناصر محدود برای به دست آوردن یک جواب دقیق قطعاً باید بسیار ریز باشد (یادآوری می‌شود که عناصر سه بعدی پدیده قفل شوندگی برشی را نشان می‌دهند).



شکل ۵.۳۷ تکیه‌گاه لبه تیز برای سازه نازک



شکل ۵.۳۸ مدل‌های سه بعدی و صفحه‌ای برای مسئله شکل ۵.۳۷

با به کارگیری نظریه صفحه Reissner-Mindlin، صفحه نازک با استفاده از فرض داده شده در (۵.۸۸) و شکل ۵.۲۵ مدل می‌شود. شرایط مرزی بدینگونه هستند که تغییر مکان جانبی مقید به صفر است ولی دوران‌های مقطع آزاد می‌باشند، ر.ک. به: شکل (ب) ۵.۳۸. مطمئناً این شرایط نمایشگر موقعیت فیزیکی بوده و تا حد امکان با فرض‌های موجود در نظریه مذکور سازگار می‌باشند.

از سوی دیگر با استفاده از نظریه صفحه Kirchhoff، تغییر مکان جانبی و دوران لبه $\partial w / \partial x$ هر دو صفر می‌باشند، از اینرو در مدل عناصر محدود باید شرط $\theta_y = 0$ نیز اعمال شود. بنابراین در یک حل عناصر محدود شرایط لبه‌ای در شکل ۵.۳۷ به صورت زیر مدل خواهند شد.

با استفاده از عناصر سه بعدی:

$$u = v = w = 0 \quad \text{در لبه:} \quad (۵.۱۲۷)$$

با استفاده از عناصر مبتنی بر نظریه صفحه Reissner-Mindlin (به عنوان مثال عناصر MITC در شکل ۵.۲۷):

$$w = 0 \quad \text{و} \quad \theta_x, \theta_y \quad \text{آزاد رها می‌شوند} \quad (۵.۱۲۸)$$

با استفاده از عناصر مبتنی بر نظریه صفحه Kirchhoff (به عنوان مثال عناصر ارائه شده در

مثال (۴.۱۸):

(۵.۱۲۹) در لبه: $w = \theta_y = 0$ و θ_y آزاد رها می‌شود

که در نظریه صفحه Kirchhoff داریم:

$$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} \quad (۵.۱۳۰)$$

البته می‌توانستیم یک شرط تکیه‌گاهی فیزیکی را نیز تصور نماییم که علاوه بر تکیه‌گاه صلب لبه تیز شکل ۵.۳۷، از دوران مقطع β_y نیز ممانعت کند. در این حالت θ_y را در هنگام استفاده از عناصر مبتنی بر نظریه صفحه Reissner-Mindlin مساوی صفر قرار می‌دادیم و در هنگام کاربرد عناصر سه بعدی نیز تمامی تغییر مکان‌های u در وجه صفحه را مساوی صفر در نظر می‌گرفتیم.

شرط مرزی (۵.۱۲۸)، به عنوان شرط مرزی «نرم» برای یک تکیه‌گاه ساده معروف است، در حالی که هنگام مساوی صفر قرار دادن θ_y ، شرط مرزی از نوع «سخت» می‌باشد. همچنین احتمالات مشابهی در مواقعی که لبه صفحه «گیردار» می‌باشد - یعنی هنگامی که لبه در برابر دوران θ_y مقید می‌شود - وجود دارند. در چنین حالتی روشن است که در لبه صفحه $w = 0$ و $\theta_y = 0$ می‌باشند. با وجود این، مجدداً انتخابی در خصوص θ_y وجود دارد: در شرط مرزی نرم θ_y آزاد رها می‌شود و در شرط مرزی سخت $\theta_y = 0$ می‌باشد. در عمل معمولاً از شرایط مرزی نرم استفاده می‌کنیم، ولی البته برحسب وضعیت فیزیکی واقعی شرط مرزی سخت نیز به کار می‌رود.

نکته مهم این است هنگامی که عناصر مبتنی بر نظریه صفحه Reissner-Mindlin مورد استفاده قرار می‌گیرند، شرایط مرزی در تغییر مکان جانبی و دوران‌ها ضرورتاً با شرایط مرزی که بر مبنای نظریه صفحه Kirchhoff به کار می‌روند یکسان نیستند و باید به گونه‌ای انتخاب شوند که به طور مناسبی وضعیت فیزیکی واقعی را مدل نمایند.

البته در این زمینه نکات مشابهی را می‌توان برای کاربرد عناصر پوسته‌ای که در اوایل ارائه گردیدند عنوان نمود، زیرا برای این عناصر دوران‌های مقطع نیز متغیرهای مستقل می‌باشند (و به وسیله مشتقات تغییر مکان جانبی داده نمی‌شوند).

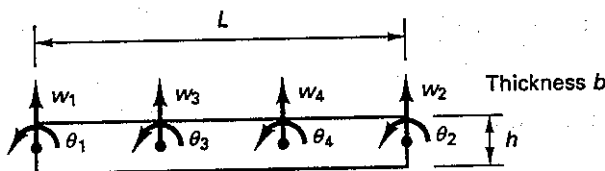
از آنجا که نظریه Reissner-Mindlin برای توصیف رفتار صفحه شامل متغیرهای بیشتری از نظریه Kirchhoff می‌باشد، سؤالات جالب متنوعی در مورد مقایسه این نظریه‌ها و نتایج همگرایی مبتنی بر آنها مطرح می‌شوند. به عنوان مثال این سؤالات توسط E. Reissner [C] K. O. Friedrichs, and R. F. Dressler [A]، D. N. Arnold and R. S. Falk [A] B. Haggblad and K. J. Bathe [A] مورد توجه قرار گرفته‌اند. یک نتیجه عمده این است که هنگامی که از نظریه Reissner-Mindlin

استفاده می‌شود، لایه‌های مرزی در امتداد لبه‌های صفحه برای شرایط مرزی خاصی، در موقعی که نسبت ضخامت به طول صفحه بسیار کوچک می‌شود، ایجاد می‌شوند. لایه‌های مرزی مذکور، وضعیت فیزیکی واقعی را واقع‌بینانه‌تر از نظریه صفحه Kirchhoff نمایش می‌دهند. بنابراین عناصر صفحه‌ای و پوسته‌ای ارائه شده در این بخش نه تنها به دلایل محاسباتی جالب توجه می‌باشند، بلکه می‌توان آنها را برای نمایش دقیق‌تر و صحیح‌تر وضعیت‌های واقعی در طبیعت مورد استفاده قرار داد. برخی نتایج و مقایسه‌های عددی با استفاده از نظریات صفحه Kirchhoff و Reissner-Mindlin توسط B. Haggblad and K. J. Bathe [A] و N. S. Lee and M. L. Buclelem [A] ارائه شده‌اند.

۵.۴.۳ تمرین‌ها

۵.۳۲ تیر با مقطع ثابت شکل ۵.۱۹ را در نظر بگیرید. با استفاده از فرض‌های ارائه شده در شکل ۵.۱۸، عبارت کار مجازی (۵.۵۸) را از (۴.۷) استخراج نمایید.

۵.۳۳ عنصر تیری تک پارامتری مبتنی بر تغییر مکان درجه سوئی نشان داده شده در شکل زیر را در نظر بگیرید. تمامی ماتریس‌های مورد نیاز برای تعیین ماتریس سختی و جرم را ایجاد نمایید (برای تعیین این ماتریس‌ها هیچ نوع انتگرال‌گیری را انجام ندهید).



۵.۳۴ عنصر تیری مبتنی بر تغییر مکان تک پارامتری سه گرهی را که برای مدل نمودن مسأله تیر طره‌ای شکل ۵.۲۰ مورد استفاده قرار می‌گیرد در نظر بگیرید. به طور تحلیلی نشان دهید هنگامی که گره ۳ کاملاً در وسط طول تیر قرار داد نتایج بسیار مطلوبی به دست می‌آیند. ولی هنگامی که این گره از آن موقعیت انتقال داده می‌شود، نتایج نامطلوب حاصل می‌شوند.

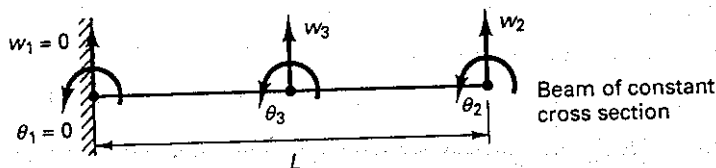
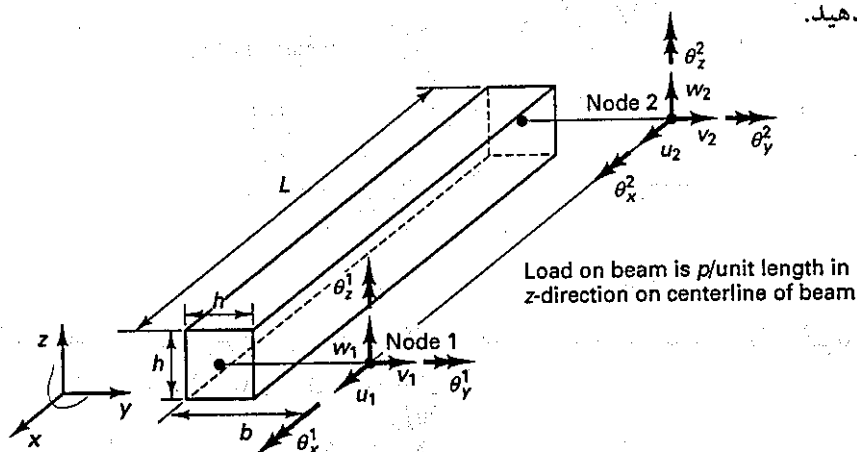


Diagram of a tapered beam element in the x - y plane. The beam has a constant thickness b and a total length L . The beam is divided into three segments: segment 1-2 of length 0.8, segment 2-3 of length r , and segment 3-4 of length 1.6. The nodes are labeled 1, 2, 3, and 4. The nodal forces are labeled $0V_s^1$, $0V_s^2$, and $0V_s^3$. The beam is shown in the x - y plane.

The diagram shows a cantilever beam of length L fixed at the left end. A horizontal force T is applied at the free right end. A coordinate system (y, z) is shown at the fixed end, and a cross-section of the beam is shown at the right end with dimensions h and b .

Young's modulus E
Shear modulus G

۵.۳۸ عنصر تیری دوگرهی را که به طور آمیخته درون‌یابی شده است در نظر بگیرید. تمامی عبارات مورد نیاز برای محاسبه ماتریس سختی، ماتریس جرم و بردار نیروی گرهی برای درجات آزادی نشان داده شده را استخراج کنید. ولی هیچ نوع انتگرال‌گیری را انجام ندهید.

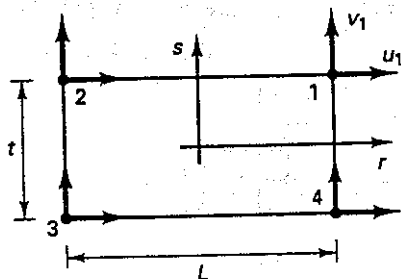


۵.۳۹ عنصر تنش مسطح را که در شکل زیر نشان داده شده است در نظر بگیرید و ماتریس کرنش - تغییر مکان عنصر را (که B_{pl} نامیده می‌شود) تعیین کنید. همچنین عنصر تیری تک‌پارامتری مبتنی بر تغییر مکان دوگرهی را که در شکل زیر نشان داده شده است در نظر بگیرید و ماتریس کرنش - تغییر مکان را (که B_b نامیده می‌شود) تعیین کنید.

با استفاده از قیده‌های سینماتیک مناسبی ماتریس کرنش - تغییر مکان عنصر تنش مسطح تباهیده را (که \bar{B}_{pl} نامیده می‌شود) از B_{pl} برای درجات آزادی مورد استفاده در عنصر تیری استخراج کنید. به طور صریح نشان دهید که:

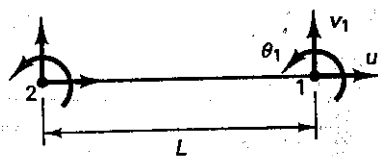
$$\int_V B_b^T C_b B_b dV = \int_V \bar{B}_{pl}^T \bar{C}_b \bar{B}_{pl} dV$$

که C_b و \bar{C} باید تعیین شوند.



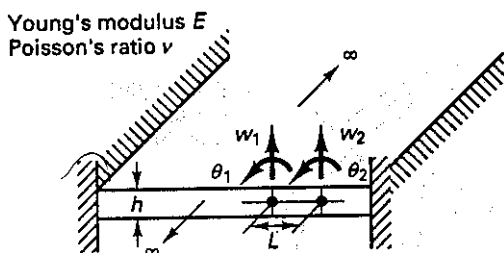
Young's modulus E
Poisson's ratio ν

Plane stress element
(unit thickness)

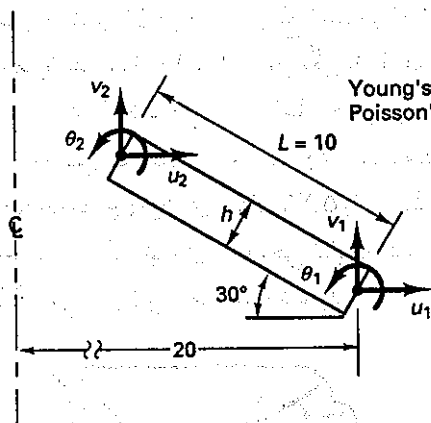


Beam element of depth t
and unit thickness

۵.۴۰. مسأله صفحه نازک با طول بی‌نهایت و گیرداری صلب در دو طرف را به گونه‌ای که در شکل نشان داده شده است در نظر بگیرید. ماتریس سختی عنصر تیری کرنش مسطح دوگرهی را که برای تحلیل صفحه مذکور به کار می‌رود محاسبه کنید [از درونیابی آمیخته (۵.۶۸) و (۵.۶۹) استفاده کنید].



۵.۴۱. عنصر پوسته‌ای متقارن محوری را که در شکل زیر نشان داده شده است، در نظر بگیرید. ماتریس کرنش - تغییر مکان را با فرض درونیابی آمیخته و با کرنش برشی جانبی ثابت ایجاد کنید. همچنین ماتریس تنش - کرنش مربوطه را که در تعیین ماتریس سختی مورد استفاده قرار می‌گیرد، به دست آورید.



۵.۴۲. فرض کنید که در مثال ۵.۲۸ شرایط متقارن محوری در نظر گرفته شود. ماتریس کرنش - تغییر مکان عنصر انتقالی را ایجاد کنید. فرض کنید که محور دوران ϕ در فاصله R از گره ۳ قرار دارد.

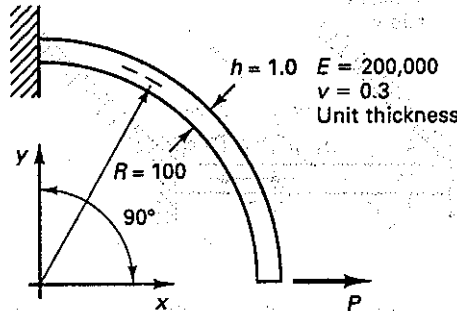
۵.۴۳. از یک برنامه کامپیوتری برای تحلیل عنصر انحنادار نشان داده شده برای به دست آوردن تغییر مکان‌ها و تنش‌های داخلی استفاده کنید.

(الف) نخست از گسسته‌سازی مبتنی بر تغییر مکان عناصر تنش مسطح چهارگرهی

استفاده نموده و سپس گسسته‌سازی عناصر تنش مسطح هشت‌گرهی را بکار ببرید.

(ب) نخست از گسسته‌سازی عناصر تیری دوگرهی و سپس از گسسته‌سازی عناصر تیری سه‌گرهی استفاده نمایید.

جواب‌های محاسبه شده را با جواب تحلیلی مقایسه کنید و ریزی شبکه‌ها را مرتب افزایش دهید تا اینکه جواب دقیق حاصل شود.



۵.۴۴ تحلیل تمرین ۵.۴۳ را انجام دهید ولی شرایط متقارن محوری را در نظر بگیرید، به

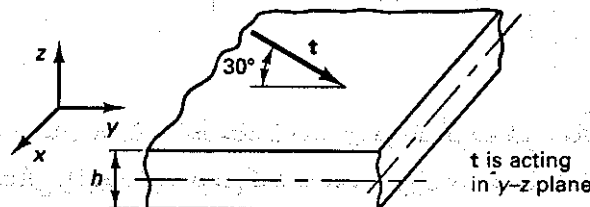
عبارت دیگر فرض کنید که شکل تمرین ۵.۴۳ مقطع یک پوسته متقارن محوری را نشان می‌دهد که محور مرکزی آن در $x = 0$ واقع است و P بار خطی در واحد طول می‌باشد.

۵.۴۵ عنصر خمشی چهارگرهی مثال ۵.۲۹ را در نظر بگیرید. فرض کنید که $w_1 = 0.1$ و $\theta_1^y = 0.01$ و

نیز سایر تغییر مکان‌های نقاط گرهی و دوران‌ها را صفر در نظر بگیرید. انحناهای κ و کرنش‌های برشی جانبی γ را به صورت تابعی از r و s در روی میان-سطح عنصر رسم کنید.

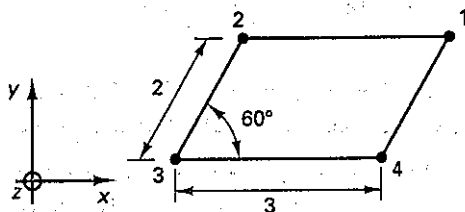
۵.۴۶ عنصر خمشی صفحه‌ای چهارگرهی مثال ۵.۲۹ را در نظر بگیرید. فرض کنید که عنصر در

سطح روین تحت اثر یک نیروی سطحی ثابت نشان داده شده می‌باشد. نیروها و لنگرهای نقاط گرهی سازگار را محاسبه نمایید.



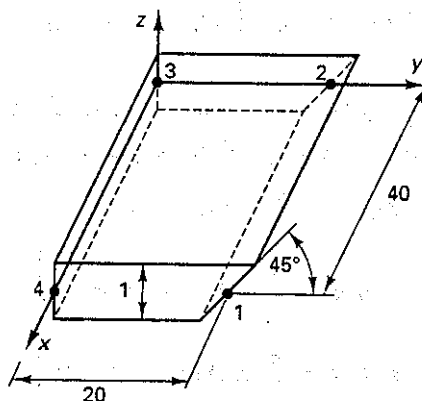
$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} \quad \text{force per unit area}$$

۵.۴۷. ماتریس درونیابی کرنش برشی جانبی B_y عنصر MITC4 متوازی الاضلاع شکل را که در زیر نشان داده شده است ایجاد کنید.



۵.۴۸. فرمول‌بندی عنصر MITC4 و مثال ۴.۳۰ را در نظر بگیرید. نشان دهید که فرمول‌بندی عنصر MITC4 را می‌توان از اصل وردشی Hu-Washizu استخراج نمود.

۵.۴۹. عنصر پوسته‌ای چهارگره‌ای نشان داده شده را در نظر بگیرید و درونیابی‌های هندسه و تغییر مکان (δ_{107}) و (δ_{112}) را ایجاد نمایید.



۵.۵۰. به طور صریح نشان دهید که کاربرد فرمول‌بندی عنصر پوسته‌ای عمومی (δ_{107}) الی (δ_{118}) برای یک عنصر تخت هم‌ارز جمع آثار فرمول‌بندی عنصر صفحه‌ای Reissner-Mindlin (δ_{88}) الی (δ_{99}) و فرمول‌بندی عنصر غشایی تنش مسطح ارائه شده در بخش ۵.۳.۱ می‌باشد.

۵.۵۱. از یک برنامه کامپیوتری برای حل مسأله نشان داده شده در شکل ۵.۳۶ با عناصر پوسته‌ای با انحنای استفاده نمایید. در آغاز یک عنصر واحد را به کار برید و سپس از دو عنصر اعوجاج‌دار هندسی استفاده نموده و حساسیت عنصر در برابر اعوجاج هندسی را ارزیابی کنید.

۵.۵۲ شرایط مرزی در لبه یک صفحه را که مبتنی بر نظریه صفحه Kirchhoff می‌باشند به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$w = 0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (\text{الف})$$

شرایط مرزی معقولی را که متناظر با شرایط فوق بوده و مبتنی بر نظریه صفحه Reissner-Mindlin می‌باشند انتخاب نمایید. همچنین بحث نموده و به طور گرافیکی نشان دهید که شرایط مرزی (الف) به طور منحصر به فردی شرایط مرزی برای نظریه صفحه Reissner-Mindlin را تعیین نمی‌کنند.

۵.۵ انتگرال گیری عددی

آنچه که در مورد عناصر تک پارامتری و تحلیل عناصر محدود مربوط به آن، اهمیت دارد، انتگرال گیری عددی مورد نیاز می‌باشد. انتگرال‌های ماتریسی مورد نیاز در محاسبات عناصر محدود به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$\int F(r) dr; \int F(r, s) dr ds; \int F(r, s, t) dr ds dt \quad (۵.۱۳۱)$$

که به ترتیب برای حالات یک بعدی، دوبعدی و سه بعدی می‌باشند. بیان گردید که در عمل انتگرال‌های مذکور به صورت عددی با استفاده از روابط زیر تعیین می‌شوند:

$$\left. \begin{aligned} \int F(r) dr &= \sum_i \alpha_i F(r_i) + R_n \\ \int F(r, s) dr ds &= \sum_{i,j} \alpha_{ij} F(r_i, s_j) + R_n \\ \int F(r, s, t) dr ds dt &= \sum_{i,j,k} \alpha_{ijk} F(r_i, s_j, t_k) + R_n \end{aligned} \right\} \quad (۵.۱۳۲)$$

که در آنها مجموع‌یابی‌ها در روی تمامی i و z و k ‌های مشخص شده بسط پیدا می‌کنند α_i و α_{ij} و α_{ijk} فاکتورهای وزنی می‌باشند و $F(r_i)$ ، $F(r_i, s_j)$ و $F(r_i, s_j, t_k)$ ماتریس‌های $F(r)$ ، $F(r, s)$ و $F(r, s, t)$ هستند که در نقاط مشخصی تعیین می‌شوند. ماتریس‌های R_n ماتریس‌های خطا بوده که در عمل معمولاً تعیین نمی‌گردند. بنابراین از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} \int F(r) dr &= \sum_i \alpha_i F(r_i) \\ \int F(r, s) dr ds &= \sum_{i,j} \alpha_{ij} F(r_i, s_j) \\ \int F(r, s, t) dr ds dt &= \sum_{i,j,k} \alpha_{ijk} F(r_i, s_j, t_k) \end{aligned} \right\} \quad (۵.۱۳۳)$$

هدف در این بخش ارائه نظریه و لوازم عملی انتگرال‌گیری‌های عددی می‌باشد. نکته مهم دقت انتگرال‌گیری مورد نیاز است، به عبارت دیگر، تعداد نقاط انتگرال‌گیری که در فرمول‌بندی عنصر مورد نیاز می‌باشد.

همانگونه که در بالا بحث گردید، در تحلیل عناصر محدود ماتریس‌ها را انتگرال‌گیری می‌کنیم و این بدان معنی است که هر عنصر ماتریس مورد نظر به طور انفرادی انتگرال‌گیری می‌شود. بنابراین برای استخراج فرمول‌های انتگرال‌گیری عددی، عنصر نمونه‌ای از یک ماتریس را در نظر می‌گیریم که با F نشان می‌دهیم.

نخست حالت یک بعدی را در نظر می‌گیریم، به عبارت دیگر انتگرال‌گیری $\int_a^b F(r) dr$ مورد نظر می‌باشد. در محاسبه عنصر تک پارامتری در واقعیت $a = -1$ و $b = +1$ می‌باشند.

انتگرال‌گیری عددی $\int_a^b F(r) dr$ اساساً مبتنی بر گذراندن یک چندجمله‌ای $\psi(r)$ از میان مقادیر معلوم $F(r)$ و سپس کاربرد $\int_a^b \psi(r) dr$ به عنوان تقریب‌سازی از $\int_a^b F(r) dr$ می‌باشد. تعداد $F(r)$ ‌های تعیین شده و موقعیت‌های نقاط نمونه‌گیری در بازه‌ای از a تا b تعیین می‌کنند که تا چه حدی $\psi(r)$ ، $F(r)$ را تقریب‌سازی مطلوبی می‌کند و بنابراین نشانگر خطای انتگرال‌گیری عددی می‌باشند (به عنوان مثال رک. به: [A] C. E. Froberg).

۵.۵.۱ درون‌یابی با استفاده از یک چندجمله‌ای

فرض کنید که $F(r)$ در $(n+1)$ نقطه متمایز r_0, r_1, \dots, r_n به ترتیب برای بدست آوردن F_0, F_1, \dots, F_n تعیین شده است و نیز چندجمله‌ای $\psi(r)$ از میان این داده‌ها گذرانده شده است. در این صورت یک چندجمله‌ای منحصر به فرد $\psi(r)$ وجود دارد که به صورت زیر داده می‌شود:

$$\psi(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2 + \dots + a_n r^n \quad (5.134)$$

با استفاده از شرط $\psi(r) = F(r)$ در $(n+1)$ نقطه انتگرال‌گیری داریم:

$$F = Va \quad (5.135)$$

که در آن:

$$F = \begin{bmatrix} F_0 \\ F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}; \quad a = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad (5.136)$$

و V ماتریس Vandermonde می‌باشد:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & r_0 & r_0^2 & \cdots & r_0^n \\ 1 & r_1 & r_1^2 & \cdots & r_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & r_n & r_n^2 & \cdots & r_n^n \end{bmatrix} \quad (5.137)$$

به شرطی که نقاط r_i ، نقاط متمایزی باشند، $V \neq 0$ ، در این صورت یک جواب منحصر به فرد برای a وجود دارد.

یک طریقه بسیار مناسب و آسان برای به دست آوردن $\psi(r)$ استفاده از درون‌یابی لاگرانژی است. نخست یادآوری می‌کنیم که $(n+1)$ تابع $r, r^2, r, 1, \dots, r^n$ یک فضای برداری $(n+1)$ بعدی، V_n ، را تشکیل می‌دهند که $\psi(r)$ عنصری از آن فضا می‌باشد (ر.ک. به: بخش ۲.۳). از آنجا که تعیین مختصات $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ از $\psi(r)$ با استفاده از (۵.۱۳۵) نسبتاً دشوار است از اینرو باید پایه متفاوتی برای فضای V_n را پیدا کنیم که در آن مختصات $\psi(r)$ بسیار آسان‌تر تعیین می‌شوند. این پایه به وسیله درون‌یابی بنیادی چندجمله‌ای‌های لاگرانژی ایجاد می‌شود که به صورت زیر مشخص می‌گردد:

$$l_j(r) = \frac{(r-r_0)(r-r_1)\cdots(r-r_{j-1})(r-r_{j+1})\cdots(r-r_n)}{(r_j-r_0)(r_j-r_1)\cdots(r_j-r_{j-1})(r_j-r_{j+1})\cdots(r_j-r_n)} \quad (5.138)$$

که در آن داریم:

$$l_j(r_i) = \delta_{ij} \quad (5.139)$$

δ_{ij} دلتای Kronecker می‌باشد، به عبارت دیگر به ازای $i=j$ داریم: $\delta_{ij} = 1$ و بازاء $i \neq j$ نیز داریم $\delta_{ij} = 0$ ، با استفاده از خاصیت (۵.۱۳۹)، مختصات بردارهای پایه، مقادیر $F(r)$ بوده و چندجمله‌ای $\psi(r)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\psi(r) = F_0 l_0(r) + F_1 l_1(r) + \cdots + F_n l_n(r) \quad (5.140)$$

مثال ۵.۳۵: چندجمله‌ای درون‌یابی $\psi(r)$ برای تابع $F(r) = 2^r r$ را در هنگامی که داده‌ها در نقاط $r = 0, 1, 3$ مورد استفاده قرار می‌گیرند، ایجاد کنید. در این حالت $r_0 = 0, r_1 = 1, r_2 = 3$ نیز $F_2 = 5, F_1 = 1, F_0 = 1$.

حل:

در روش اول، رابطه (۵.۱۳۵) را برای محاسبه ضرایب مجهول a_0 و a_1 و a_2 مربوط به چندجمله‌ای $\psi(r) = a_0 + a_1 r + a_2 r^2$ مورد استفاده قرار می‌دهیم، در این حالت داریم:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

از حل این معادلات نتایج $a_0 = 1$ ، $a_1 = -\frac{2}{3}$ و $a_2 = \frac{2}{3}$ حاصل می‌شوند؛ از اینرو داریم:

اگر انتگرال‌گیری لاگرانژی بکار رود، رابطه (۵.۱۴۰) را استفاده می‌کنیم که در این حالت

نتیجه زیر را به دست می‌دهد:

$$\psi(r) = (1) \frac{(r-1)(r-3)}{(-1)(-3)} + (1) \frac{(r)(r-3)}{(1)(-2)} + (5) \frac{(r)(r-1)}{(3)(2)}$$

یا مانند حالت پیشین نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\psi(r) = 1 - \frac{2}{3}r + \frac{2}{3}r^2$$

۵.۵.۲ فرمول‌های Newton-Cotes (انتگرال‌گیری یک بعدی)

حال که چند جمله‌ای درونیابی $\psi(r)$ ایجاد گردید، می‌توان تقریبی از انتگرال $\int_a^b F(r) dr$ را به دست آورد. در انتگرال‌گیری Newton-Cotes فرض می‌شود که نقاط نمونه‌گیری F در فاصله‌های مساوی قرار دارند و از تعریف زیر استفاده می‌کنیم:

$$r_0 = a; \quad r_n = b; \quad h = \frac{b-a}{n} \quad (5.141)$$

با استفاده از درونیابی لاگرانژی برای به دست آوردن $\psi(r)$ به عنوان یک تقریب‌سازی به $F(r)$ داریم:

$$\int_a^b F(r) dr = \sum_{i=0}^n \left[\int_a^b l_i(r) dr \right] F_i + R_n \quad (5.142)$$

یا

$$\int_a^b F(r) dr = (b-a) \sum_{i=0}^n C_i^n F_i + R_n \quad (5.143)$$

که در آن R_n باقیمانده بوده و C_n^r ، مقادیر ثابت *Newton-Cotes* برای انتگرال‌گیری عددی با n نقطه نمونه‌گیری می‌باشند.

مقادیر ثابت *Newton-Cotes* و عبارات باقی مانده متناظر با آنها برای $n = 1$ الی ۶ در جدول ۵.۵ به اختصار بیان گردیده‌اند. حالت $n = 1$ قاعده معروف *دوونقه‌ای* و حالت $n = 2$ فرمول *Simpson* می‌باشند. یادآوری می‌کنیم که فرمول‌های مربوط به حالت $n = 3$ و $n = 5$ به ترتیب دارای مرتبه دقت مشابه فرمول‌های مربوط به $n = 2$ و $n = 4$ می‌باشند. بدین دلیل در عمل فرمول‌های مربوط به $n = 2$ و $n = 4$ مورد استفاده قرار می‌گیرند.

جدول ۵.۵ اعداد *Newton-Cotes* و تخمین‌های خطا

تعداد بازه‌های n	C_0^1	C_1^1	C_2^1	C_3^1	C_4^1	C_5^1	C_6^1	کران بالایی در خطای R_n به عنوان تابعی از مشتق F
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$						$10^{-1}(b-a)^3 F''(r)$
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$					$10^{-3}(b-a)^5 F^{IV}(r)$
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$				$10^{-3}(b-a)^5 F^{IV}(r)$
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$			$10^{-6}(b-a)^7 F^{VI}(r)$
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{19}{288}$		$10^{-6}(b-a)^7 F^{VI}(r)$
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{272}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{41}{840}$	$10^{-9}(b-a)^9 F^{VIII}(r)$

مثال ۵.۳۴: مقادیر ثابت *Newton-Cotes* را هنگامی که چندجمله‌ای درونیابی از مرتبه ۲ می‌باشد تعیین کنید، به عبارت دیگر $\psi(r)$ یک سهمی است.

حل:

در این حالت داریم:

$$\int_a^b F(r) dr \doteq \int_a^b \left[F_0 \frac{(r-r_1)(r-r_2)}{(r_0-r_1)(r_0-r_2)} + F_1 \frac{(r-r_0)(r-r_2)}{(r_1-r_0)(r_1-r_2)} + F_2 \frac{(r-r_0)(r-r_1)}{(r_2-r_0)(r_2-r_1)} \right] dr$$

با استفاده از $r_0 = a$ ، $r_1 = a+h$ و $r_2 = a+2h$ که در آن $h = (b-a)/2$ می‌باشد، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\int_a^b F(r) dr = \frac{b-a}{6} (F_0 + 4F_1 + F_2)$$

بنابراین مقادیر ثابت Newton-Cotes به همان گونه که در جدول ۵.۵ برای حالت $n = 2$ داده شده‌اند، به دست می‌آیند.

مثال ۵.۳۵: از قاعده Simpson برای انتگرال گیری $\int_0^3 (2r - r) dr$ استفاده نمایید:

حل:

در این حالت $n = 2$ و $h = \frac{3}{2}$ می‌باشند، بنابراین $r_0 = 0$ و $r_1 = \frac{3}{2}$ و $r_2 = 3$ و $F_0 = 1$ و $F_1 = 1/328427$ و $F_2 = 5$ و نتیجه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\int_0^3 (2r - r) dr = \frac{3}{6} [(1)(1) + (4)(1.328427) + (1)(5)]$$

یا

$$\int_0^3 (2r - r) dr \approx 5.656854$$

نتیجه کامل عبارت است از:

$$\int_0^3 (2r - r) dr = 5.598868$$

بنابراین خطا به صورت زیر می‌باشد:

$$R = 0.057986$$

ولی با استفاده از مقدار کران بالایی در خطا، داریم:

$$R < \frac{(3-0)^5}{1000} (\ln 2)^4 (2^2) = 0.448743$$

برای به دست آوردن دقت بیشتر در انتگرال گیری با استفاده از فرمول های Newton-Cotes، ضروری است که از بازه های کوچکتر h استفاده کنیم، به عبارت دیگر باید مقدار تابعی را که انتگرال گیری آن مورد نظر می باشد در نقاط بیشتری تعیین کنیم. در این صورت انتخابی بین دو استراتژی مختلف وجود دارد. از یک فرمول مرتبه بالاتر Newton-Cotes استفاده کنیم یا به عنوان یک روش جایگزین فرمول مرتبه پایین تری را به طریقه ای مکرر به کار می بریم که در این حالت روش انتگرال گیری به عنوان فرمول مرکب نامیده می شود. مثال زیر را در نظر بگیرید:

مثال ۵.۳۶: دقت انتگرال‌گیری در مثال ۵.۳۵ را با استفاده از نصف فاصله مورد استفاده افزایش دهید.

حل:

در این حالت داریم: $h = \frac{3}{4}$ و مقادیر تابعی مورد نیاز $F_0 = 1$ و $F_1 = 0.931792$ و $F_2 = 1.328427$ و $F_3 = 2.506828$ و $F_4 = 5$ می‌باشند. حال دو انتخاب در مقابل خود داریم: از فرمول مرتبه بالاتر Newton-Cotes با $n = 4$ استفاده کنیم یا قاعده Simpson را دوبار به کار ببریم، به عبارت دیگر برای اولین دو بازه و سپس برای دومین دو بازه مورد استفاده قرار دهیم. با استفاده از فرمول Newton-Cotes با $n = 4$ نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\int_0^3 (2^r - r) dr \doteq \frac{3}{90} (7F_0 + 32F_1 + 12F_2 + 32F_3 + 7F_4)$$

بنابراین داریم:

$$\int_0^3 (2^r - r) dr \doteq 5.599232$$

از طرف دیگر اگر دو بار از قاعده Simpson استفاده کنیم، داریم:

$$\int_0^3 (2^r - r) dr = \int_0^{3/2} (2^r - r) dr + \int_{3/2}^3 (2^r - r) dr$$

انتگرال‌گیری به صورت زیر انجام می‌گیرد:

$$\int_0^{3/2} (2^r - r) dr = \frac{\frac{3}{2} - 0}{6} (F_0 + 4F_1 + F_2)$$

که در آن F_0 و F_1 و F_2 مقادیر تابع به ترتیب در $r = 0$ و $r = \frac{3}{4}$ و $r = \frac{3}{2}$ می‌باشند، به عبارت دیگر:

$$F_0 = 1; \quad F_1 = 0.931792; \quad F_2 = 1.328427$$

بنابراین از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\int_0^{3/2} (2^r - r) dr \doteq 1.513899 \quad (\text{الف})$$

سپس نیاز داریم که انتگرال زیر را تعیین کنیم:

$$\int_{3/2}^3 (2^r - r) dr \doteq \frac{3 - \frac{3}{2}}{6} (F_0 + 4F_1 + F_2)$$

که در آن F_0 و F_1 و F_2 مقادیر تابع به ترتیب در $r = \frac{3}{4}$ و $r = \frac{9}{4}$ و $r = 3$ می‌باشند، به عبارت دیگر:

$$F_0 = 1.328427; \quad F_1 = 2.506828; \quad F_2 = 5$$

بنابراین داریم:

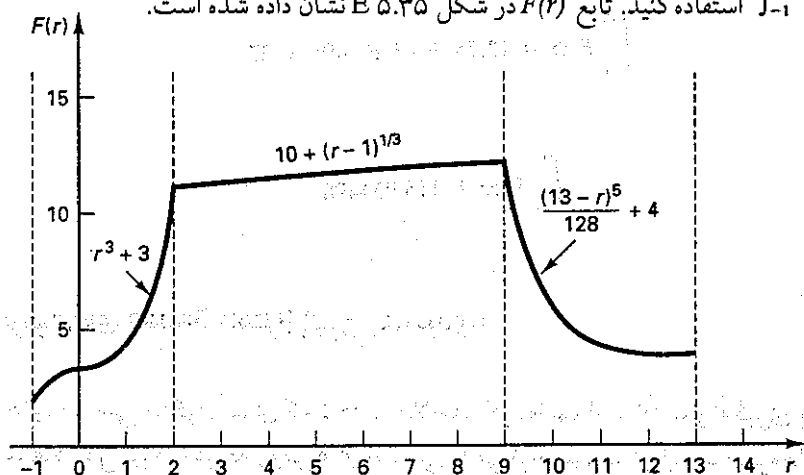
$$\int_{3/2}^3 (2^r - r) dr \approx 4.088935 \quad (\text{ب})$$

از جمع نتایج (الف) و (ب)، نتیجه نهایی به دست می‌آید:

$$\int_0^3 (2^r - r) dr \approx 5.602834$$

استفاده از فرمول مرکب در مقایسه با کاربرد فرمول‌های از مرتبه بالاتر Newton-Cotes دارای برخی امتیازها می‌باشد. به کارگیری یک فرمول مرکب نظیر استفاده مکرر از قاعده Simpson آسان است. به میزانی که بازه نقاط نمونه‌گیری کاهش پیدا می‌کند، همگرایی تضمین می‌شود و در عمل یک بازه نمونه‌گیری را می‌توان به گونه‌ای مورد استفاده قرار داد که از یک کاربرد فرمول بنیادی به دیگری تغییر کند. این امتیاز بویژه هنگامی که عدم پیوستگی‌هایی در تابع مورد انتگرال‌گیری وجود دارند، بیشتر خود را نمایان می‌سازد و به دلیل همین ملاحظات در عمل فرمول‌های مرکب مورد استفاده قرار می‌گیرند.

مثال ۵.۳۷: از یک فرمول مرکب که قاعده Simpson را بکار می‌برد، برای تعیین انتگرال $\int_{-1}^{13} F(r) dr$ استفاده کنید. تابع $F(r)$ در شکل ۵.۳۵ نشان داده شده است.



شکل ۵.۳۷ تابع $F(r)$

حل:

این تابع هنگامی به بهترین صورت انتگرال‌گیری می‌شود که سه بازه انتگرال‌گیری را به صورت زیر در نظر بگیریم:

$$\int_{-1}^{13} F dr = \int_{-1}^2 (r^3 + 3) dr + \int_2^9 [10 + (r-1)^{1/3}] dr + \int_9^{13} \left[\frac{1}{128} (13-r)^5 + 4 \right] dr$$

هر یک از سه انتگرال فوق را با استفاده از قانون Simpson تعیین می‌کنیم و داریم:

$$\int_{-1}^2 (r^3 + 3) dr \doteq \frac{2 - (-1)}{6} [(1)(2) + (4)(3.125) + (1)(11)]$$

$$\int_{-1}^2 (r^3 + 3) dr \doteq 12.75$$

یا

$$\int_2^9 [10 + (r-1)^{1/3}] dr \doteq \frac{9-2}{6} [(1)(11) + (4)(11.650964) + (1)(12)]$$

$$\int_2^9 [10 + (r-1)^{1/3}] dr \doteq 81.204498$$

یا

$$\int_9^{13} \left[\frac{1}{128} (13-r)^5 + 4 \right] dr \doteq \frac{13-9}{6} [(1)(12) + (4)(4.25) + (1)(4)]$$

$$\int_9^{13} \left[\frac{1}{128} (13-r)^5 + 4 \right] dr \doteq 22$$

بنابراین داریم:

$$\int_{-1}^{13} F dr \doteq 12.75 + 81.204498 + 22$$

یا

$$\int_{-1}^{13} F dr \doteq 115.954498$$

۵.۵.۳ فرمول‌های Gauss (انتگرال‌گیری یک بعدی)

در روش‌های اساسی انتگرال‌گیری که تاکنون ملاحظه کرده‌ایم، از نقاط نمونه‌گیری با فواصل مساوی استفاده می‌شود، اگرچه روش‌های اساسی را می‌توانستیم برای ایجاد شیوه‌هایی نیز به کار ببریم که در آنها بازه نقاط انتگرال‌گیری تغییر می‌کند، به عبارت دیگر فرمول‌های مرکب را

که در آن باید توجه شود که در انتگرال نخست سمت راست (۵.۱۴۸) توابع از مرتبه $(n-1)$ و پایین‌تر انتگرال‌گیری می‌شوند و در انتگرال دوم توابع مورد انتگرال‌گیری از مرتبه n و بالاتر می‌باشند. حال مقادیر مجهول $r_j = 1, 2, \dots, n$ را می‌توان با استفاده از شرایط زیر تعیین نمود:

$$\int_a^b P(r) r^k dr = 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (5.149)$$

از آنجا که چندجمله‌ای $\psi(r)$ از میان نقطه نمونه‌گیری $F(r)$ می‌گذرد و $P(r)$ در این نقاط صفر است، از اینرو شرایط (۵.۱۴۹) بدین معنی هستند که انتگرال مورد نیاز $\int_a^b F(r) dr$ از طریق انتگرال‌گیری یک چندجمله‌ای از مرتبه $(2n-1)$ به جای $F(r)$ تقریب‌سازی می‌شود.

در یک جمع‌بندی، با استفاده از فرمول‌های Newton-Cotes از $(n+1)$ نقطه نمونه‌گیری با فاصله‌های برابر استفاده کرده و یک چندجمله‌ای حداکثر از مرتبه n را به طور کامل انتگرال‌گیری می‌کنیم. از سوی دیگر در انتگرال‌گیری گوسی، به n نقطه نمونه‌گیری با فاصله‌های نابرابر نیاز داریم و از یک چندجمله‌ای حداکثر از مرتبه $(2n-1)$ به طور کامل انتگرال می‌گیریم. چندجمله‌ای‌های به ترتیب از مرتبه کمتر از n و $(2n-1)$ نیز برای هر دو حالت به طور کامل انتگرال‌گیری می‌شوند.

برای تعیین نقاط نمونه‌گیری و وزن‌های انتگرال‌گیری ملاحظه می‌کنیم که بازه a تا b بستگی دارند. با این حال برای عمومی نمودن محاسبات یک بازه طبیعی از -1 تا $+1$ را در نظر می‌گیریم و نقاط نمونه‌گیری و وزن‌ها را برای هر بازه‌ای به دست می‌آوریم. به عنوان مثال اگر r_j یک نقطه نمونه‌گیری بوده و α_j وزن مربوط به بازه -1 تا $+1$ باشد، در این صورت نقطه نمونه‌گیری و وزن متناظر در انتگرال‌گیری از a تا b به ترتیب عبارتند از:

$$\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} r_j \quad \text{and} \quad \frac{b-a}{2} \alpha_j$$

بنابراین بازه‌ای از -1 تا $+1$ را در نظر می‌گیریم. نقاط نمونه‌گیری از (۵.۱۴۹) با فرض $a = -1$ و $b = +1$ تعیین می‌شوند. برای محاسبات وزن‌های انتگرال‌گیری به جای $F(r)$ در (۵.۱۴۴)، چندجمله‌ای درونیابی $\psi(r)$ از (۵.۱۴۵) را جایگزین می‌کنیم و انتگرال‌گیری را انجام می‌دهیم. باید دانست که چون نقاط نمونه‌گیری تعیین شده‌اند، از اینرو چندجمله‌ای $\psi(r)$ مشخص است و بنابراین داریم:

$$\alpha_j = \int_{-1}^{+1} l_j(r) dr; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.150)$$

نقاط نمونه‌گیری و وزن‌ها برای بازه -1 تا $+1$ توسط A. N. Lowan, N. Davids and A. Levenson [A]

منتشر شده‌اند و در جدول ۵.۶ به ازای $n = ۱$ الی ۶ ارائه گردیده‌اند. ضرایب موجود در جدول ۵.۶ را می‌توان مستقیماً با استفاده از (۵.۱۴۹) و (۵.۱۵۰) محاسبه کرد (ر.ک. به: مثال ۵.۳۸). با وجود این برای n های بزرگتر روش حل طولانی و خسته کننده می‌شود و استفاده از چندجمله‌ای‌های Legendre برای پیدا کردن ضرایب، مفید و مناسب است که در این صورت به آنها ضرایب Gauss-Legendre اطلاق می‌شود.

جدول ۵.۶: نقاط نمونه‌گیری و وزن‌ها در انتگرال‌گیری عددی Gauss-Legendre (بازه ۱- تا +۱)

n	r_i	α_i
1	0. (15 zeros)	2. (15 zeros)
2	± 0.57735 02691 89626	1.00000 00000 00000
3	± 0.77459 66692 41483 0.00000 00000 00000	0.55555 55555 55556 0.88888 88888 88889
4	± 0.86113 63115 94053 ± 0.33998 10435 84856	0.34785 48451 37454 0.65214 51548 62546
5	± 0.90617 98459 38664 0.53846 93101 05683 0.00000 00000 00000	0.23692 68850 56189 0.47862 86704 99366 0.56888 88888 88889
6	± 0.93246 95142 03152 ± 0.66120 93864 66265 ± 0.23861 91860 83197	0.17132 44923 79170 0.36076 15730 48139 0.46791 39345 72691

مثال ۵.۳۸: نقاط نمونه‌گیری و وزن‌ها برای انتگرال‌گیری گوسی دو نقطه‌ای را استخراج کنید.
حل:

در این حالت $P(r) = (r-r_1)(r-r_2)$ و (۵.۱۴۹) دو معادله زیر را به دست می‌دهد:

$$\int_{-1}^{+1} (r-r_1)(r-r_2) dr = 0$$

$$\int_{-1}^{+1} (r-r_1)(r-r_2)r dr = 0$$

از حل این انتگرال‌ها دو معادله زیر به دست می‌آیند:

$$r_1 r_2 = -\frac{1}{3}$$

$$r_1 + r_2 = 0$$

$$r_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}; \quad r_2 = +\frac{1}{\sqrt{3}}$$

بنابراین داریم:

وزن‌های متناظر، با استفاده از (۵.۱۵۰) به دست می‌آیند که در این حالت داریم:

$$\alpha_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{r - r_2}{r_1 - r_2} dr$$

$$\alpha_2 = \int_{-1}^{+1} \frac{r - r_1}{r_2 - r_1} dr$$

از آنجا که $r_2 = -r_1$ از اینرو این نتیجه حاصل می‌شود که $\alpha_1 - \alpha_2 = 1.0$.

مثال ۵.۳۹: از انتگرال‌گیری گوسی دو نقطه‌ای برای تعیین انتگرال $\int_0^3 (2r - r) dr$ مورد نظر در مثال‌های ۵.۳۵ و ۵.۳۶ استفاده کنید.

حل:

با استفاده از انتگرال‌گیری گوسی دو نقطه‌ای، از (۵.۱۴۴) نتیجه زیر را به دست می‌آوریم:

$$\int_0^3 (2r - r) dr \approx \alpha_1 F(r_1) + \alpha_2 F(r_2) \quad (\text{الف})$$

که در آن α_1 و α_2 و r_1 و r_2 به ترتیب وزن‌ها و نقاط نمونه‌گیری هستند. از آنجا که بازه از ۰ تا ۳ می‌باشد، ضروری است که مقادیر α_1 و α_2 و r_1 و r_2 از مقادیر داده شده در جدول (۵.۶) تعیین شوند:

$$\alpha_1 = \frac{3}{2}(1); \quad \alpha_2 = \frac{3}{2}(1)$$

$$r_1 = \frac{3}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right); \quad r_2 = \frac{3}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

که در آن $1/\sqrt{3} = 0.5773502692$. بنابراین:

$$F(r_1) = 0.91785978; \quad F(r_2) = 2.78916389$$

و (الف) نتیجه زیر را بدست می‌دهد:

$$\int_0^3 (2r - r) dr \approx 5.56053551$$

روش انتگرال‌گیری Gauss-Legendre عموماً در تحلیل عناصر محدود تک‌پارامتری مورد استفاده قرار می‌گیرد. اضافه می‌کنیم که روش‌های انتگرال‌گیری دیگری نیز که در آنها برای نیل به حداکثر دقت، وزن‌ها و موقعیت‌های نمونه‌گیری تغییر می‌کنند استخراج شده‌اند (ر.ک. به: C. E. Froberg [A] و A. H. Stoud and D. Secrest [A]).

۵.۵.۴ انتگرال‌گیری دوبعدی و سه بعدی

تاکنون انتگرال‌گیری یک تابع یک بعدی $F(r)$ را در نظر گرفته‌ایم. با وجود این در تحلیل‌های دوبعدی و سه بعدی ضروری است که انتگرال‌های دو و سه بعدی تعیین گردند. در تعیین عناصر مستطیلی، می‌توانیم فرمول‌های مزبور را به صورت متوالی در هر جهت^(۸) اعمال کنیم. مانند حالات تعیین تحلیلی انتگرال‌های چندبعدی، در این روش به طور متوالی داخلی‌ترین انتگرال با ثابت نگه داشتن متغیرهای مربوط به سایر انتگرال‌ها تعیین می‌شود. بنابراین برای یک انتگرال دوبعدی داریم:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(r, s) dr ds = \sum_i \alpha_i \int_{-1}^{+1} F(r_i, s) ds \quad (5.151)$$

یا

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(r, s) dr ds = \sum_{i,j} \alpha_i \alpha_j F(r_i, s_j) \quad (5.152)$$

و متناظر با (۵.۱۳۳) $\alpha_{ij} = \alpha_i \alpha_j$ که در آن α_i و α_j وزن‌های انتگرال‌گیری برای انتگرال‌گیری یک بعدی می‌باشند. به طور مشابه برای یک انتگرال سه بعدی داریم:

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} F(r, s, t) dr ds dt = \sum_{i,j,k} \alpha_i \alpha_j \alpha_k F(r_i, s_j, t_k) \quad (5.153)$$

و $\alpha_{ijk} = \alpha_i \alpha_j \alpha_k$ باید دانست که در انتگرال‌گیری عددی ضروری نیست که قاعده یکسانی در دو یا سه بعد مورد استفاده قرار گیرد، به عبارت دیگر، می‌توانیم روش‌های انتگرال‌گیری عددی مختلفی را در جهات r و s و t به کار گیریم:

مثال ۵.۴۰: فرض کنید که (i, j) آمین عنصر یک ماتریس سختی \mathbf{K} به صورت $\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} r^2 s^2 dr ds$ می‌باشد. انتگرال مذکور را با استفاده از (۱) قاعده Simpson در هر دو جهت r و s و (۲) روش انتگرال‌گیری گوسی در هر دو جهت r و s و (۳) روش انتگرال‌گیری گوسی در جهت r و قاعده Simpson در جهت s تعیین کنید.

حل:

۱. با استفاده از قاعده Simpson داریم:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} r^2 s^2 dr ds &= \int_{-1}^{+1} \frac{1}{3} [(1)(1) + (4)(0) + (1)(1)] s^2 ds \\ &= \int_{-1}^{+1} \frac{2}{3} s^2 ds = \frac{1}{3} \left[(1) \left(\frac{2}{3} \right) + (4)(0) + (1) \left(\frac{2}{3} \right) \right] = \frac{4}{9} \end{aligned}$$

(۸) این نکته موجب عمومیت بیشتر انتگرال‌گیری می‌شود، ولی برای حالات خاص می‌توان روش‌هایی با هزینه نسبتاً کمی را طراحی نمود (ر.ک. به: (B. M. Irons [C]).

۲. با استفاده از روش انتگرال‌گیری گوسی دو بعدی داریم:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} r^2 s^2 dr ds &= \int_{-1}^{+1} \left[(1) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + (1) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] s^2 ds \\ &= \int_{-1}^{+1} \frac{2}{3} s^2 ds = \frac{2}{3} \left[(1) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + (1) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] = \frac{4}{9}\end{aligned}$$

۳. سرانجام با استفاده از روش انتگرال‌گیری گوسی در جهت r و قاعده Simpson در جهت s داریم:

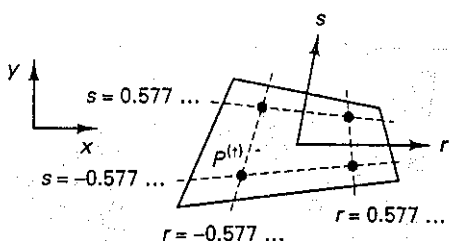
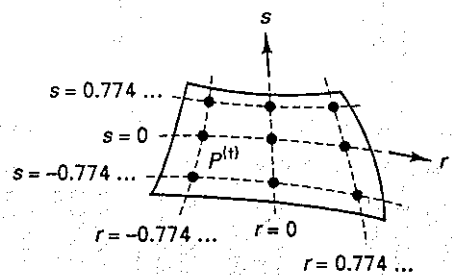
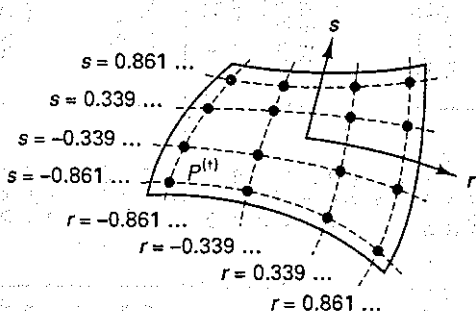
$$\begin{aligned}\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[(1) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + (1) \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] s^2 ds \\ = \int_{-1}^{+1} \frac{2}{3} s^2 ds = \frac{1}{3} \left[(1) \left(\frac{2}{3} \right) + (4)(0) + (1) \left(\frac{2}{3} \right) \right] = \frac{4}{9}\end{aligned}$$

اضافه کنیم که انتگرال‌گیری‌های عددی مذکور کامل می‌باشند، زیرا هر دو روش انتگرال‌گیری یک سهمی را به طور کامل انتگرال‌گیری می‌کنند.

روش مزبور را می‌توان مستقیماً برای تعیین ماتریس‌های عناصر چهارضلعی به کار برد که در آنها همه حدهای انتگرال‌گیری از -1 الی $+1$ می‌باشند. بنابراین در تعیین یک عنصر محدود دوبعدی، انتگرال‌گیری‌ها را می‌توان برای هر عنصری از ماتریس‌های سختی و جرم و بردارهای بار بگونه‌ای که در مثال ۵.۴۰ نشان داده شد انجام داد. براساس اطلاعات داده شده در جدول ۵.۶، برخی قواعد انتگرال‌گیری گوسی برای تحلیل دوبعدی در جدول ۵.۷ به اختصار ارائه گردیده‌اند.

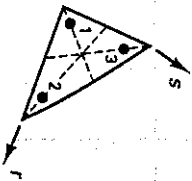
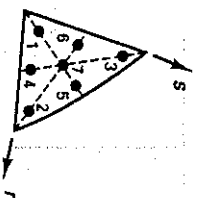
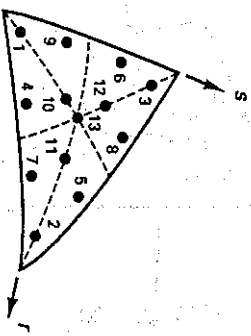
حال اگر تعیین ماتریس‌های عناصر مثلثی و چهاروجهی را در نظر بگیریم، روش داده شده در مثال ۵.۴۰ را نمی‌توان مستقیماً استفاده نمود، زیرا خود حدهای انتگرال‌گیری شامل متغیرهایی می‌باشند. مطالعات پژوهشی فراوانی در مورد ایجاد و بسط فرمول‌های مناسب انتگرال‌گیری برای میدان‌های مثلثی انجام شده است و در این حالات نیز فرمول‌هایی از نوع Newton-Cotes (ر.ک. به: [A] P. Silvester) و از نوع روش انتگرال‌گیری گوسی (ر.ک. به: [A] O. J. Marlowe and A. H. Stroud و [A] P. C. Hammer و [A] G. R. Cowper) بیشتر به کار می‌روند. مانند حالت انتگرال‌گیری میدان‌های چهارضلعی، قواعد انتگرال‌گیری گوسی عموماً کارایی بیشتری دارند، زیرا دقت انتگرال‌گیری بالاتری را می‌توان با تعداد مشابهی از نقاط نمونه‌گیری انتگرال‌گیری به دست آورد. جدول ۵.۸ شامل نقاط و وزن‌های انتگرال‌گیری برای فرمول‌های انتگرال‌گیری گوسی می‌باشد که توسط G. R. Cowper [A] انتشار یافته است.

جدول ۵.۷ انتگرال‌گیری‌های عددی گوسی در میدان‌های چهارضلعی

مربعیت نقاط انتگرال‌گیری	درجه دقت	مرتبه انتگرال‌گیری
	3	2×2
	5	3×3
	7	4×4

(†) موقعیت هر نقطه انتگرال‌گیری در دستگاه مختصات x ، y به صورت زیر داده می‌شود: $x_p = \sum_i h_i(r_p, s_p)x_i$ و $y_p = \sum_i h_i(r_p, s_p)y_i$ ؛ وزن‌های انتگرال‌گیری با استفاده از (۵.۱۵۲) در جدول ۵.۶ داده شده‌اند.

جدول ۵.۸. اینتگرال گیری های عددی گوسی در میدان های مثلثی $\left[\int_{\Delta} F dr ds = \frac{1}{2} \sum w_i F(r_i, s_i) \right]$

مرتبه اینتگرال گیری	درجه دقت	نقاط اینتگرال گیری	مختصات r	مختصات s	وزن ها
3-point	2		$r_1 = 0.166666666666667$ $r_2 = 0.666666666666667$ $r_3 = r_1$	$s_1 = r_1$ $s_2 = r_1$ $s_3 = r_2$	$w_1 = 0.333333333333333$ $w_2 = w_1$ $w_3 = w_1$
7-point	5		$r_1 = 0.1012865073235$ $r_2 = 0.7974269853531$ $r_3 = r_1$ $r_4 = 0.4701420641051$ $r_5 = r_4$ $r_6 = 0.0597158717898$ $r_7 = 0.333333333333333$	$s_1 = r_1$ $s_2 = r_1$ $s_3 = r_2$ $s_4 = r_2$ $s_5 = r_4$ $s_6 = r_4$ $s_7 = r_7$	$w_1 = 0.1259391805448$ $w_2 = w_1$ $w_3 = w_1$ $w_4 = 0.1323941527885$ $w_5 = w_4$ $w_6 = w_4$ $w_7 = 0.225$
13-point	7		$r_1 = 0.0651301029022$ $r_2 = 0.8697397941956$ $r_3 = r_1$ $r_4 = 0.3128654960049$ $r_5 = 0.6384441885698$ $r_6 = 0.0486903154253$ $r_7 = r_5$ $r_8 = r_4$ $r_9 = r_6$ $r_{10} = 0.2603459660790$ $r_{11} = 0.4793080678419$ $r_{12} = r_{10}$ $r_{13} = 0.333333333333333$	$s_1 = r_1$ $s_2 = r_1$ $s_3 = r_2$ $s_4 = r_2$ $s_5 = r_4$ $s_6 = r_5$ $s_7 = r_6$ $s_8 = r_5$ $s_9 = r_4$ $s_{10} = r_{10}$ $s_{11} = r_{10}$ $s_{12} = r_{11}$ $s_{13} = r_{13}$	$w_1 = 0.0533472356088$ $w_2 = w_1$ $w_3 = w_1$ $w_4 = 0.0771137608903$ $w_5 = w_4$ $w_6 = w_4$ $w_7 = w_4$ $w_8 = w_4$ $w_9 = w_4$ $w_{10} = 0.1756152574332$ $w_{11} = w_{10}$ $w_{12} = w_{10}$ $w_{13} = -0.1495700444677$

۵.۵.۵. مرتبه مناسب انتگرال‌گیری عددی

در کاربرد عملی روش‌های انتگرال‌گیری عددی که در بخش قبلی ارائه گردید، اساساً دو سؤال مطرح می‌شود: چه نوع روش انتگرال‌گیری باید مورد استفاده قرار گیرد؟ و چه مرتبه‌ای در انتگرال‌گیری باید انتخاب شود؟ اشاره کردیم که در هنگام استفاده از فرمول‌های Newton-Cotes، در $(n+1)$ نقطه نمونه‌گیری باید مقدار تابع تعیین گردد تا اینکه بدون خطا از یک چندجمله‌ای از مرتبه n انتگرال‌گیری شود. از سوی دیگر اگر از روش انتگرال‌گیری گوسی استفاده شود، مقدار تابع در n نقطه تعیین می‌شود تا اینکه از یک چندجمله‌ای از مرتبه $(2n-1)$ ، انتگرال‌گیری به طور کامل انجام گیرد. البته در هر دو حالت، چندجمله‌ای‌های به ترتیب از مرتبه کمتر از (n) و $(2n-1)$ به طور کامل انتگرال‌گیری می‌شوند.

در تحلیل عناصر محدود، تعیین تابع در نقاط بیشتر، مستقیماً موجب افزایش هزینه تحلیل می‌شود و استفاده از روش انتگرال‌گیری گوسی جالب توجه می‌باشد. با وجود این فرمول‌های Newton-Cotes ممکن است که در تحلیل غیرخطی بنابه دلایلی که در بخش ۶.۸.۴ بحث خواهد گردید، کارا تر باشد.

به محض اینکه یک روش انتگرال‌گیری عددی انتخاب گردید، در این صورت مرتبه انتگرال‌گیری عددی که در تعیین انتگرال‌های عناصر محدود متنوعی به کار می‌روند باید تعیین شود. انتخاب مرتبه انتگرال‌گیری عددی در عمل مهم است زیرا اولاً هنگامی که انتگرال‌گیری از مرتبه بالاتر مورد استفاده قرار می‌گیرد، هزینه تحلیل نیز افزایش پیدا می‌کند و ثانیاً استفاده از مرتبه‌های مختلف انتگرال‌گیری تأثیر بسیار زیادی در نتایج حاصل دارد. این ملاحظات مخصوصاً در تحلیل سه بعدی اهمیت دارند.

ماتریس‌هایی که باید از طریق انتگرال‌گیری عددی تعیین شود، ماتریس سختی K ، ماتریس جرم M ، بردار نیروی جسمی R_B ، بردار تنش اولیه R_I و بردار نیروی سطحی R_s می‌باشند. در حالت کلی مرتبه مناسب انتگرال‌گیری بستگی به ماتریس مورد محاسبه و عنصر محدود خاص مورد نظر دارد. برای اثبات جنبه‌های مهم بحث، مرتبه مورد نیاز انتگرال‌گیری عددی گوسی برای تعیین ماتریس‌های عناصر محیط پیوسته و سازه‌ای را که در بخش‌های ۵.۳ و ۵.۴ مورد بحث واقع شده‌اند در نظر بگیرد.

نکته اول در انتخاب مرتبه انتگرال‌گیری عددی این است که از لحاظ تئوریک اگر از مرتبه‌ای به حد کافی بالا استفاده شود، تمامی ماتریس‌ها به طور بسیار دقیق تعیین خواهند شد. از سوی دیگر با استفاده از مرتبه انتگرال‌گیری بسیار پایین ممکن است که ماتریس‌ها خیلی غیردقیق تعیین شوند و در حقیقت حل مسأله ناممکن می‌گردد. به عنوان مثال یک ماتریس سختی عنصری را در نظر بگیرد. اگر مرتبه انتگرال‌گیری خیلی پایین باشد در این صورت

امکان دارد که تعداد ویژه مقادیر صفر در ماتریس بیشتر از تعداد مدهای صلب جسمی فیزیکی باشد. بنابراین صرفاً برای حل قابل قبول معادلات تعادل، ضروری خواهد بود که مدهای تغییر شکل متناظر با همهٔ ویژه مقادیر صفر عنصر به طور مناسبی در مجموعه همبستهٔ عناصر مقید شوند، زیرا در غیر این صورت ماتریس سختی سازه تکیه خواهد بود. یک مثال ساده، تعیین ماتریس سختی یک عنصر خربایی سه گرهی است. اگر انتگرال‌گیری عددی گوسی یک نقطه‌ای مورد استفاده قرار گیرد، سطر و ستون متناظر با درجه آزادی در نقطه میانی عنصر، بردارهای صفر خواهند بود که ممکن است موجب تکیه شدن ماتریس سختی سازه شود. بنابراین مرتبهٔ انتگرال‌گیری باید به طور کلی بالاتر از یک حد معینی باشد.

مرتبهٔ مورد نیاز انتگرال‌گیری برای تعیین دقیق یک ماتریس عنصر خاصی را می‌توان از طریق مطالعهٔ مرتبهٔ تابعی که انتگرال‌گیری می‌شود، مشخص نمود. در حالت ماتریس سختی ضروری است که رابطهٔ زیر تعیین شود:

$$K = \int_V B^T C B \det J \, dV \quad (۵.۱۵۴)$$

که در آن C ماتریس ثابت خواص مصالح بوده و B ماتریس کرنش - تغییر مکان در دستگاه مختصات طبیعی r و s و t می‌باشد و $\det J$ دترمینان ژاکوبی است که دستگاه مختصات محلی (یا کلی) را به مختصات طبیعی تبدیل می‌کند (ر.ک. به: بخش ۵.۳) و انتگرال‌گیری در روی حجم عنصر در دستگاه مختصات طبیعی انجام می‌گیرد. بنابراین تابع ماتریسی F باید انتگرال‌گیری شود:

$$F = B^T C B \det J \quad (۵.۱۵۵)$$

ماتریس‌های J و B در بخش‌های ۵.۳ و ۵.۴ تعریف شده‌اند.

حالتی که برای آن مرتبهٔ متغیرهای F را می‌توان با سهولت نسبی تعیین نمود، در عنصر دوبعدی چهارگره‌ای مورد مطالعه در مثال ۵.۵ پیش می‌آید، البته هنگامی که به عنوان یک عنصر مستطیلی یا متوازی‌الاضلاع شکل مورد استفاده قرار می‌گیرد. ملاحظهٔ این حالت سودمند و مناسب خواهد بود، زیرا روش تعیین مرتبهٔ مورد نیاز انتگرال‌گیری به روشنی نمایش داده می‌شود.

مثال ۵.۴۱: مرتبهٔ مورد نیاز انتگرال‌گیری عددی گوسی برای محاسبهٔ ماتریس سختی یک عنصر مستطیلی چهارگره‌ای مبتنی بر تغییر مکان را تعیین کنید.

حل:

مرتبهٔ مورد استفادهٔ انتگرال‌گیری بستگی به مرتبه متغیرهای r و s در F تعریف شده در

(۵.۱۵۵) دارد. برای یک عنصر مستطیلی با اضلاع $2a$ و $2b$ می‌توان نوشت:

$$x = ar; y = bs$$

و در نتیجه ماتریس ژاکوبی J عبارت است از:

$$J = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

از آنجا که عناصر ماتریس J ثابت هستند، بنابراین با مراجعه به اطلاعاتی که در مثال ۵.۵ داده شده‌اند، عناصر ماتریس کرنش - تغییر مکان B تنها تابعی از r و s می‌باشند. اما در مینان J نیز ثابت است، از اینرو داریم:

$$F = f(r^2, rs, s^2)$$

که در آن f نشانگر «تابعی از» می‌باشد.

با استفاده از انتگرال‌گیری عددی گوسی دو نقطه‌ای در جهات r و s ، تمامی توابع برحسب r و s که شامل حداکثر عبارات درجه سومی هستند بدون خطا انتگرال‌گیری می‌شوند، به عنوان مثال، برای انتگرال‌گیری از مرتبه n ، مرتبه r و s که به طور کامل انتگرال‌گیری می‌شوند $(2n-1)$ می‌باشد. بنابراین انتگرال‌گیری گوسی دو نقطه‌ای کافی می‌باشد.

توجه شود که ماتریس ژاکوبی J برای عنصر متوازی‌الاضلاع شکل چهارگرمی نیز ثابت است، بنابراین نتایج حاصل برای این عنصر نیز قابل اعمال می‌باشد.

به طریقه‌ای مشابه مرتبه مورد نیاز انتگرال‌گیری برای تعیین به طور کامل (یا به طور خیلی دقیق) ماتریس‌های سختی، ماتریس‌های جرم و بردارهای بار عناصر را می‌توان ارزیابی نمود. در این مورد باید افزود که ماتریس ژاکوبی برای عناصر غیرمستطیلی و غیرمتوازی‌الاضلاع شکل ثابت نمی‌باشد و این بدان معنی است که ممکن است برای تعیین ماتریس‌های عنصری با دقت بیشتر، یک مرتبه انتگرال‌گیری بسیار بالایی مورد نیاز باشد.

در مثال مزبور یک عنصر مبتنی بر تغییر مکان در نظر گرفته شد، ولی باید تأکید کرد که روش‌های انتگرال‌گیری عددی مشابهی نیز در تعیین ماتریس‌های عنصری فرمول‌بندی‌های آمیخته مورد استفاده قرار می‌گیرند. بنابراین در فرمول‌بندی‌های آمیخته نیز مرتبه مورد نیاز انتگرال‌گیری باید با استفاده از روش مورد بحث اخیر مشخص شود (ر.ک. به: تمرین ۵.۵۷).

هنگام مطالعه مرتبه مورد نیاز انتگرال‌گیری در عناصر دارای اعوجاج هندسی ملاحظه می‌کنیم که اغلب ضرورتی ندارد که ماتریس‌ها با دقت بالایی با استفاده از انتگرال‌گیری عددی از مرتبه خیلی بالاتر محاسبه شوند؛ به عنوان مثال تغییر در عناصر ماتریس (و اثرات آنها) به علت استفاده از یک مرتبه l به جای $(l-1)$ ممکن است که ناچیز باشد. بنابراین، ضروری است که این سؤال مطرح شود که کدام مرتبه انتگرال‌گیری عموماً کافی می‌باشد و از اینرو راهنمایی‌های زیر را ارائه می‌کنیم.


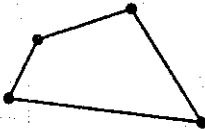
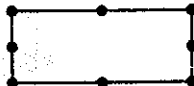


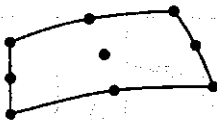
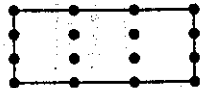
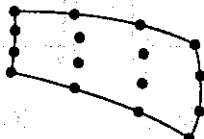
توصیه می‌شود که همواره انتگرال‌گیری عددی تام^(۹) برای فرمول‌بندی عنصر محدود مبتنی بر تغییر مکان یا آمیخته مورد استفاده قرار گیرد و انتگرال‌گیری عددی «تام» را به عنوان مرتبه‌ای در انتگرال‌گیری تعریف می‌کنیم که ماتریس‌ها را به طور کامل به دست دهد (به عبارت دیگر مقادیری که به طور تحلیلی انتگرال‌گیری شده‌اند)، البته هنگامی که عناصر از نظر هندسی دارای اعوجاج نباشند. جدول ۵.۹ مرتبه انتگرال‌گیری برای عناصر مورد استفاده در تحلیل‌های دوبعدی را ارائه می‌دهد.

استفاده از این مرتبه انتگرال‌گیری برای یک عنصر با اعوجاج هندسی موجب نخواهد شد که ماتریس‌های عنصری به طور کامل انتگرال‌گیری شوند. با وجود این، تحلیل قابل اطمینان است، زیرا خطاهای انتگرال‌گیری به طور قابل قبولی کوچک‌اند، البته با این فرض که اعوجاج هندسی عناصر، معقول باشد. در حقیقت همانگونه که توسط P. G. Ciarlet [A] نشان داده شده است، اگر اعوجاجات هندسی در حد معقولی باشند به گونه‌ای در انتگرال‌گیری کامل، مرتبه کاملی از همگرایی باز هم حاصل شود (با شرایط بحث شده در بخش ۵.۳.۳)، در این صورت مرتبه مشابهی از همگرایی با استفاده از انتگرال‌گیری عددی تام توصیه شده به دست می‌آید. بنابراین در آن حالت مرتبه انتگرال‌گیری عددی توصیه شده در جدول ۵.۹ موجب کاهش مرتبه همگرایی نخواهد شد. از سوی دیگر اگر اعوجاجات هندسی عنصر بسیار بزرگ باشند و نیز در تحلیل غیرخطی، مرتبه انتگرال‌گیری بالاتر ممکن است که مناسب باشد (ر.ک. به: بخش ۶.۸.۴).

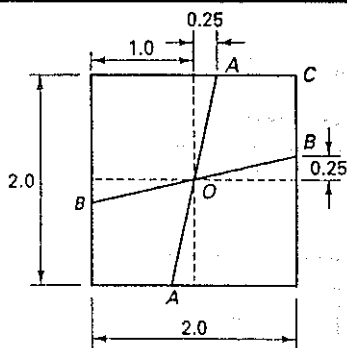
شکل ۵.۳۹ برخی نتایج حاصله در یک مسأله آزمایشی خاص را که در شکل ۴.۱۲ توصیف گردید نشان می‌دهد. این نتایج با استفاده از دنباله‌ای از شبکه‌های اعوجاج‌دار و شبه یکنواخت حاصل شده‌اند. شکل (الف) ۵.۳۹ اعوجاجات هندسی مورد استفاده را توصیه می‌کند و شکل‌های (ب) ۵.۳۹ و (پ) ۵.۳۹ نتایج همگرایی حاصل را با استفاده از عناصر هشت گرهی و نه گرهی نشان می‌دهند که با استفاده از مرتبه انتگرال‌گیری گوسی ارائه شده در جدول ۵.۹ به دست آمده‌اند. این نتایج نشان می‌دهند که مرتبه همگرایی (شیب‌های منحنی‌های رسم شده هنگامی که h کوچک می‌باشد) در تمامی حالات تقریباً ۴ می‌باشد (همانگونه که به طور تئوریک پیش‌بینی شده است). با وجود این مقدار واقعی خطا به ازای مقدار معلوم h ، بزرگتر از حالتی است که در آن عناصر دارای اعوجاج می‌باشند. به عبارت دیگر به میزانی که عناصر دارای اعوجاج بیشتری می‌شوند، مقدار ثابت c در (۴.۱.۲) افزایش می‌یابد. دلیل اصلی برای توصیه مرتبه‌های انتگرال‌گیری عددی در جدول ۵.۹ این است که قابلیت اطمینان روش‌های عناصر محدود اهمیت فراوانی دارد (ر.ک. به: بخش ۱.۳) و اگر یک انتگرال‌گیری مرتبه پایین‌تر از مرتبه «تام» (برای یک فرمول‌بندی مبتنی بر تغییر مکان یا فرمول‌بندی آمیخته) مورد استفاده قرار گیرد، عموماً تحلیل غیر قابل اطمینان خواهد شد.

(۹) در بخش ۵.۵.۶ به طور خلاصه در مورد انتگرال‌گیری عددی «کاهش یافته» بحث خواهیم کرد که روش دیگری در انتگرال‌گیری می‌باشد.

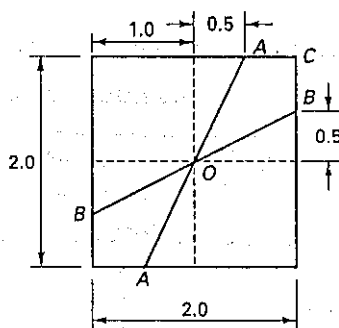
جدول ۵.۹ مرتبه‌های توصیه شده انتگرال‌گیری عددی تام‌گوسی برای تعیین ماتریس‌های عنصر مبهتني بر تغییر مکان تک پارامتری (از جدول ۵.۷ استفاده کنید)

مرتبه انتگرال‌گیری	عناصر دوپمدي (تنش مسطح، کرنش مسطح و شرایط متقارن محوری)	
2×2		چهارگره‌می
2×2		چهارگره‌می اعوجاج‌دار
3×3		۸ گره‌می
3×3		۸ گره‌می اعوجاج‌دار
3×3		۹ گره‌می
3×3		۹ گره‌می اعوجاج‌دار
4×4		۱۶ گره‌می
4×4		۱۶ گره‌می اعوجاج‌دار

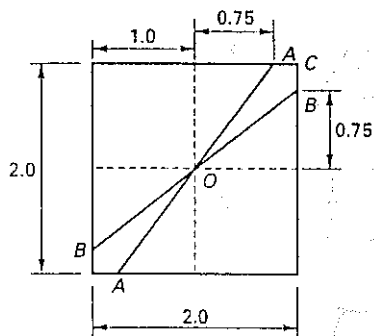
توجه: در تحلیل متقارن محوری، اثر کرنش خلقوی در تمامی حالات به طور کامل انتگرال‌گیری نمی‌شود ولی با دقت کافی تعیین می‌گردد.



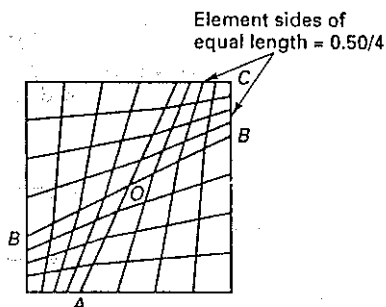
حالت A



حالت B

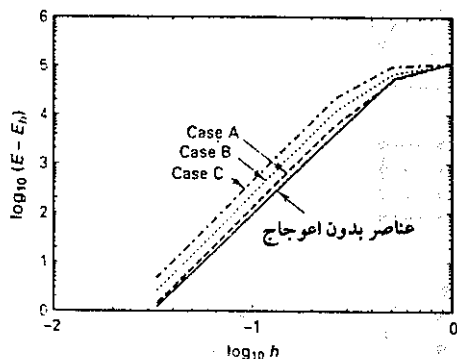


حالت C

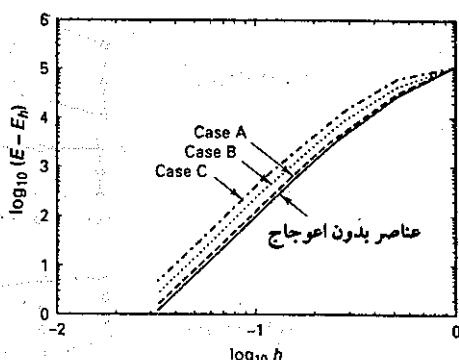
شبكة ۸×۸ حالت B، $h = 2/8$

خطوط AA و BB کشیده شده‌اند و سپس اضلاع AC، CB، BO و OA به طول‌های مساوی تقسیم شده‌اند تا عناصر را در میدان ACBO تشکیل دهند. به طور مشابه برای سه میدان دیگر عمل می‌شود.

(الف) اعوجاجات مورد استفاده



(ب) نتایج حاصله با استفاده از عناصر ۸ گرهی

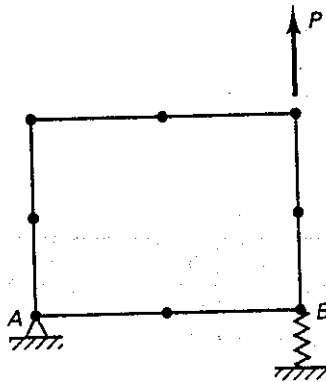


(پ) نتایج حاصله با استفاده از عناصر ۹ گرهی

شکل ۵.۳۹ جواب مسأله آزمایشی شکل ۴.۱۲ با عناصر اعوجاج‌دار هندسی و مرتبه انتگرال‌گیری گوسی جدول ۵.۹.

$$E = a(u, u), E_h = a(u_{hr}, u_h)$$

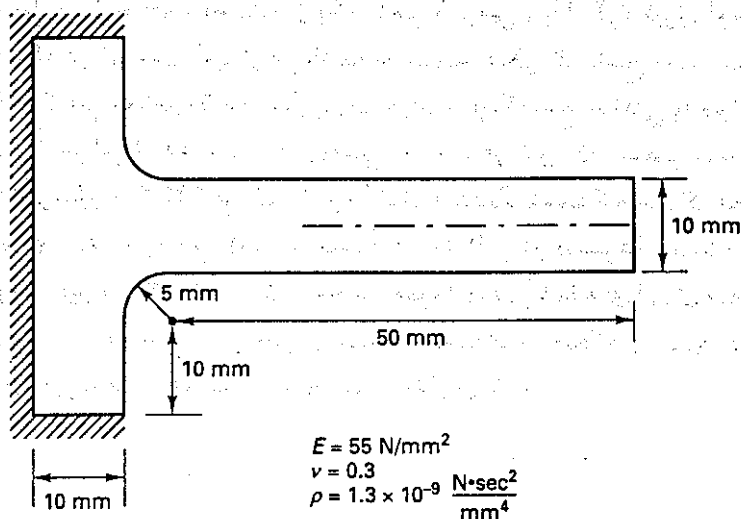
یک حالت جالب توجه، عنصر تک پارامتری مبتنی بر تغییر مکان هشت گرهی تنش مسطح دوبعدی مستطیلی است که از طریق انتگرال‌گیری گوسی 2×2 تعیین شده است. این مرتبه انتگرال‌گیری یک ماتریس سختی عنصری را به دست می‌دهد که دارای یک مد انرژی صفر غیرواقعی می‌باشد (ر.ک. به: تمرین ۵.۵۶)؛ به عبارت دیگر، ماتریس سختی عنصر نه تنها دارای سه ویژه مقدار صفر می‌باشد (متناظر با حرکات صلب جسمی فیزیکی)، بلکه یک ویژه مقدار صفر اضافی نیز دارد که صرفاً ناشی از کاربرد مرتبه بسیار پایین انتگرال‌گیری است. شکل ۵.۴۰ یک تحلیل بسیار ساده با استفاده از یک عنصر ۹ گرهی و با انتگرال‌گیری گوسی 2×2 را نشان می‌دهد که در آن مدل ناپایدار می‌باشد؛ به عبارت دیگر اگر پاسخ به دست آید، تغییر مکان‌های نقاط گرهی محاسبه شده بسیار بزرگ خواهند بود که هیچ شباهتی به جواب درست و دقیق ندارند^(۱۰). در این تحلیل ساده، به روشنی مشاهده می‌شود که عنصر هشت گرهی با استفاده از انتگرال‌گیری 2×2 کافی نیست و می‌توان استدلال نمود که در یک تحلیل بسیار پیچیده مد انرژی صفر غیرواقعی (منفرد) معمولاً به حد کافی در مجموعه همبسته عناصر مقید می‌شود. با وجود این در یک مدل بزرگ و پیچیده عموماً عناصر با مدهای انرژی صفر غیرواقعی به طریقه‌ای کنترل نشده نتایج کلی حل را بهبود بخشیده، یا خطاهای بسیار بزرگی را در محاسبات وارد می‌کنند و یا موجب یک جواب ناپایدار می‌شوند.



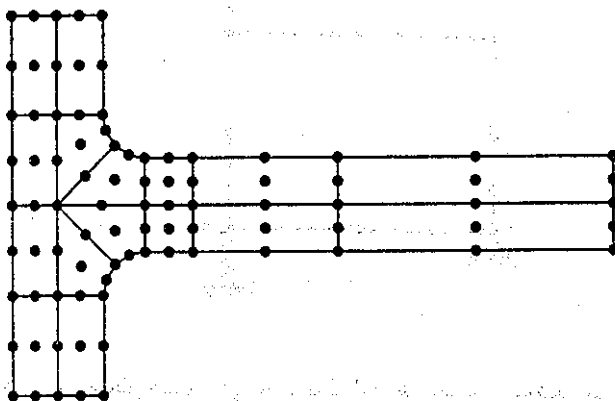
شکل ۵.۴۰ عنصر تنش مسطح هشت گرهی که در نقطه B دارای یک فنر تکیه‌گاهی می‌باشد. تحلیل با استفاده از انتگرال‌گیری گوسی 2×2 ناپایدار می‌باشد.

(۱۰) در عملیات حسابی کامل، ماتریس سختی تکیه است ولی به علت خطاهای ناشی از گرد کردن در محاسبات معمولاً جوابی حاصل می‌شود.

به عنوان یک مثال، تحلیل دینامیکی لچکی طره‌ای را که در شکل ۵.۴۱ نشان داده شده است در نظر بگیرید و از عنصر مبتنی بر تغییر مکان نه گرهی با انتگرال‌گیری گوسی 2×2 استفاده نمایید که در این حالت هر ماتریس سختی عنصر دارای سه مد انرژی صفر غیر واقعی می‌باشد. این لچکی را پیشتر در شکل ۴.۲۰ ملاحظه کرده‌ایم ولی حالا به جای تکیه‌گاه گیردار از دو تکیه‌گاه مفصلی استفاده کرده‌ایم (همانگونه که در آن بحث یادآوری گردید، مدل ۱۶



(الف) داده‌های هندسه و مصالح



(ب) شبکه ۱۶ عنصری متشکل از عناصر نه گرهی

شکل ۵.۴۱. حل فرکانس لچکی طره‌ای گیردار

عنصری لچکی با تکیه‌گاه مفصلی و با استفاده از انتگرال‌گیری گوسی 2×2 برای ماتریس‌های سختی عنصر ناپایدار بود). حل فرکانس شبکه ۱۶ عنصری متشکل از عناصر مبتنی بر تغییر مکان نه گرهی که نمایشگر لچکی طره‌ای گیردار می‌باشد نتایج مندرج در جدول ۵.۱۰ را به دست می‌دهد. این جدول نشان می‌دهد که استفاده از انتگرال‌گیری گوسی 2×2 (که به عنوان انتگرال‌گیری کاهش یافته شناخته می‌شود، ر.ک. به: بخش ۵.۵.۶) موجب یک مد انرژی صفر غیرواقعی در مدل کامل نمی‌شود (زیرا لچکی در انتهای چپ خود گیردار می‌باشد)، ولی در یک مد انرژی غیرصفر غیرواقعی، مد انرژی صفر غیرواقعی بخشی از کوچکترین شش فرکانس پیش‌بینی شده می‌باشد. چنان مدهایی که واقعیت فیزیکی ندارند - و به عنوان مدهای «وهمی» نامیده می‌شوند - می‌توانند خطاهای کنترل نشده‌ای را در حل گام به گام دینامیکی^(۱۱) وارد کنند که ممکن است به آسانی قابل ردیابی نباشد و حتی اگر این خطاها ردیابی و کشف شوند تحلیل‌های اضافی دیگری را ایجاد خواهند کرد که در نهایت نتایج عددی بسیار زیاد و نامطلوبی را به دنبال خواهد داشت.

جدول ۵.۱۰ کوچکترین شش فرکانس (برحسب Hz) شبکه ۱۶ عنصری نشان داده شده در شکل (ب) ۵.۴۱ با استفاده از یک ماتریس جرم سازگار

شماره مد	مدل ۱۶ عنصر		۴ مدل ۱۶×۶۴ عنصری
	انتگرال‌گیری گوسی 3×3	انتگرال‌گیری گوسی 2×2	انتگرال‌گیری گوسی 3×3
1	112.4	110.5	110.6
2	634.5	617.8	606.4
3	906.9	905.5	905.2
4	1548	958.4 [§]	1441
5	2654	1528	2345
6	2691	2602	2664

+ ماتریس‌های جرم سازگار عنصری همواره با استفاده از انتگرال‌گیری گوسی 3×3 تعیین می‌شوند
 + نتایج حاصله از کاربرد یک شبکه ریز (با ۶۴ عنصر که جایگزین هر عنصر نه‌گره‌ای می‌شود) را جهت مقایسه با نتایج تحلیل‌های دیگر ارائه نموده‌ایم
 § غیرواقعی، به عبارت دیگر مدوهمی

(۱۱) شکل‌های مد فرکانس‌های وهمی ممکن است که دلالت بر فیزیکی نبودن پاسخ باشد، ولی در یک حل دینامیکی گام به گام، فرکانس‌ها و شکل‌های مد معمولاً محاسبه نمی‌شوند.

به دلیل همین ملاحظات، عناصر با مد انرژی صفر غیرواقعی نباید در تحلیل مهندسی خطی و یا غیرخطی مورد استفاده قرار گیرند، و از اینرو در مورد چنان عناصر در این کتاب بحث نخواهیم نمود. باید اشاره شود که جهت ممانعت از اثرات زیان‌بار مدهای غیرواقعی، کوشش‌های تحقیقاتی قابل توجهی جهت کنترل رفتار آنها به عمل آمده است (به عنوان مثال ر.ک. به: [A] T. Belytschko, W. K. Liu, J. S-J. ong and D. Lam [A] و (T. J. R. Hughes [A]).

در بحث مزبور توجه خود را به تعیین ماتریس‌های سختی معطوف نمودیم. حال اگر بردارهای نیرویی عناصر را در نظر بگیریم، معمولاً مناسب و سودمند خواهد بود که از روش انتگرال‌گیری و مرتبه انتگرال‌گیری مشابه آنچه که در تعیین ماتریس‌های سختی به کار برده شدند، استفاده نماییم. در تعیین ماتریس جرم عناصر باید این نکته در نظر گرفته شود که برای ماتریس جرم متمرکز تنها ضروری است که حجم عنصر به طور صحیح تعیین گردد و برای ماتریس جرم سازگار، مرتبه داده شده در جدول ۵.۹ معمولاً مناسب خواهد بود. با وجود این حالات خاصی وجود دارد که در آنها برای اینکه ماتریس جرم سازگار به حد کافی دقیق تعیین شود ممکن است که در انتگرال‌گیری از مرتبه بالاتری نسبت به مرتبه‌های مورد استفاده در محاسبه ماتریس سختی استفاده شود.

مثال ۵.۴۲: ماتریس‌های سختی و جرم و بردار نیروی جسمی عنصر شماره ۲ در مثال ۴.۵ را با استفاده از انتگرال‌گیری گوسی تعیین کنید.

حل:

عباراتی که باید انتگرال‌گیری شوند در مثال ۴.۵ به صورت زیر استخراج شده‌اند:

$$\mathbf{K} = E \int_0^{80} \left(1 + \frac{x}{40}\right)^2 \begin{bmatrix} -\frac{1}{80} \\ \frac{1}{80} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{80} & \frac{1}{80} \end{bmatrix} dx \quad (\text{الف})$$

$$\mathbf{M} = \rho \int_0^{80} \left(1 + \frac{x}{40}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{80} \\ \frac{x}{80} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(1 - \frac{x}{80}\right) & \frac{x}{80} \end{bmatrix} dx \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{R}_B = \frac{1}{10} \int_0^{80} \left(1 + \frac{x}{40}\right)^2 \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{80} \\ \frac{x}{80} \end{bmatrix} dx \quad (\text{پ})$$

عبارات (الف) و (پ) با استفاده از انتگرال‌گیری دو نقطه‌ای به طور کامل انتگرال‌گیری می‌شوند در حالی که انتگرال (ب)، انتگرال‌گیری سه نقطه‌ای را ایجاب می‌کند. یک انتگرال‌گیری از مرتبه بالاتر در تعیین ماتریس جرم مورد نیاز می‌باشد، زیرا این ماتریس از توابع درونیابی تغییر مکان به دست می‌آیند، در حالی که ماتریس سختی با استفاده از مشتقات توابع تغییر مکان محاسبه می‌شود.

با استفاده از انتگرال‌گیری گوسی یک نقطه‌ای و دو نقطه‌ای و سه نقطه‌ای برای تعیین (الف) و (ب) و (پ) نتایج زیر حاصل می‌شوند:

انتگرال‌گیری یک نقطه‌ای:

$$K = \frac{12E}{240} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad M = \frac{\rho}{6} \begin{bmatrix} 480 & 480 \\ 480 & 480 \end{bmatrix}; \quad R_B = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 96 \\ 96 \end{bmatrix}$$

انتگرال‌گیری دو نقطه‌ای:

$$K = \frac{13E}{240} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad M = \frac{\rho}{6} \begin{bmatrix} 373.3 & 346.7 \\ 346.7 & 1013.3 \end{bmatrix}; \quad R_B = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 72 \\ 136 \end{bmatrix}$$

انتگرال‌گیری سه نقطه‌ای:

$$K = \frac{13E}{240} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad M = \frac{\rho}{6} \begin{bmatrix} 384 & 336 \\ 336 & 1024 \end{bmatrix}; \quad R_B = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 72 \\ 136 \end{bmatrix}$$

جالب توجه است که با مرتبه‌های بسیار پایین انتگرال‌گیری، کل جرم عنصر و کل باری که عنصر تحت اثر آن می‌باشد به طور کامل در نظر گرفته نمی‌شود.

جدول ۵.۹ نتایج حاصله از تحلیل برای مرتبه‌های مناسب انتگرال‌گیری در تعیین ماتریس‌های سختی عناصر دوبعدی را به اختصار ارائه می‌دهد. البته اطلاعاتی که در جدول داده شده‌اند، نقش ارزشمندی در تعیین مرتبه‌های مناسب انتگرال‌گیری برای محاسبه ماتریس‌های سایر عناصر دارند.

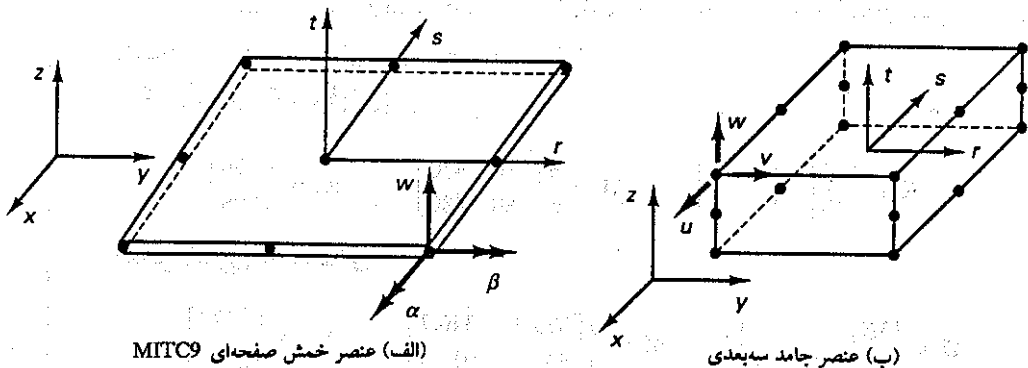
مثال ۵.۴۳: در مورد مرتبه نیاز انتگرال‌گیری برای تعیین عناصر صفحه‌ای MITC9 و سه بعدی تک پارامتری که در شکل ۵.۴۳ E نشان داده شده بحث کنید.

حل:

نخست عنصر صفحه‌ای را در نظر بگیرید. انتگرال‌گیری در صفحه ۲ و ۳ در اساس متناظر با تعیین عنصر نه گرهی در جدول ۵.۹ می‌باشد. در حالت کلی این مرتبه انتگرال‌گیری ۳×۳، هنگامی که عنصر به صورت اعوجاج یافته نیز مورد استفاده قرار گیرد، مؤثر خواهد بود.

مرتبه مورد نیاز انتگرال‌گیری برای تعیین ماتریس سختی عنصر جامد سه بعدی را می‌توان از اطلاعاتی که در جدول ۵.۹ داده شده‌اند، استنباط کرد. تغییر مکان‌ها در جهت ۲ به طور

خطی تغییر می‌کنند، بنابراین انتگرال‌گیری دو نقطه‌ای کافی می‌باشد. در صفحات t و s ، به عبارت دیگر در حالتی که r مساوی مقادیر ثابتی می‌باشد، تغییر مکان‌های عنصر متناظر با درجات آزادی عنصر هشت گرهی در جدول ۵.۹ می‌باشد. بنابراین انتگرال‌گیری گوسی $2 \times 3 \times 3$ برای اینکه ماتریس سختی عنصر به طور کامل تعیین شود ضروری است.



شکل ۵.۴۳ E عناصر مورد نظر در شکل ۵.۴۳

۵.۵.۶ انتگرال‌گیری کاهش یافته و گزینشی

جدول ۵.۹ مرتبه‌های توصیه شده انتگرال‌گیری عددی گوسی را برای عناصر تک پارامتری دو بعدی مبتنی بر تغییر مکان ارائه می‌دهد و مرتبه‌های توصیه شده برای سایر عناصر را می‌توان استنباط کرد (ر.ک. به: مثال ۵.۴۳). با این مرتبه‌های انتگرال‌گیری که به عنوان انتگرال‌گیری «تام» نامیده می‌شوند، ماتریس‌های عناصری که دارای اعوجاج هندسی نیستند به طور کامل تعیین می‌شوند، در حالی که برای عناصر با اعوجاج هندسی یک تقریب‌سازی به حد کافی دقیق حاصل می‌شود (مگر اینکه اعوجاجات هندسی خیلی بزرگ باشند، که در این حالت مرتبه انتگرال‌گیری بالاتری توصیه می‌شود).

با ملاحظه بحث انجام شده در بخش ۴.۳.۴، یادآوری می‌کنیم که فرمول‌بندی تغییر مکان تحلیل عناصر محدود موجب یک انرژی کرنشی کوچکتر از انرژی کرنشی کامل مدل ریاضی / مکانیکی مورد بحث می‌شود؛ و بطور فیزیکی یک فرمول‌بندی تغییر مکان موجب تخمین بیش از حد سختی سیستم می‌گردد. بنابراین اگر ماتریس‌های سختی عناصر مبتنی بر تغییر مکان را از طریق انتگرال‌گیری عددی به طور غیردقیق تعیین کنیم، در این صورت انتظار داریم که در مجموع نتایج حل بهتری را بتوانیم به دست آوریم. البته این نکته هنگامی

امکان‌پذیر است که خطا در انتگرال‌گیری عددی به صورت مناسبی با تخمین بیش از حد سختی سازه که به علت گسسته‌سازی عناصر محدود می‌باشد، جبران شود. به عبارت دیگر اگر در انتگرال‌گیری عددی از مرتبه‌ای کمتر از مرتبه مورد نیاز برای تعیین ماتریس‌های سختی عناصر به طور کامل (برای عناصر بدون اعوجاج هندسی) استفاده شود، در این صورت می‌توان انتظار داشت که نتایج حاصل بهتر شوند. در این مورد که از مرتبه انتگرال‌گیری عددی کاسته می‌شود، به روش به کار برده شده *انتگرال‌گیری کاهش یافته* اطلاق می‌شود. به عنوان مثال استفاده از انتگرال‌گیری گوسی 2×2 (گرچه معمولاً در عمل توصیه نمی‌شود، ر.ک. به: بخش ۵.۵.۵) برای تعیین ماتریس سختی عنصر تک پارامتری نه گرهی، متناظر با یک انتگرال‌گیری کاهش یافته می‌باشد. علاوه بر استفاده صرف از مرتبه انتگرال‌گیری کاهش یافته، انتگرال‌گیری گزینشی نیز ممکن است مورد نظر باشد که در این حالت، عبارات مختلف کرنش با استفاده از مرتبه‌های متفاوت، انتگرال‌گیری می‌شوند. در حالات انتگرال‌گیری عددی کاهش یافته و گزینشی روش‌های خاص انتگرال‌گیری را باید به عنوان بخش مکمل فرمول‌بندی عنصر تلقی نمود.

در مورد اینکه آیا عنصری که به صورت کاهش یافته و / یا گزینشی انتگرال‌گیری می‌شوند، برای استفاده عملی توصیه می‌شوند یا نه، سؤال مهمی که مطرح می‌شود این است که: آیا فرمول‌بندی عنصر (با استفاده از روش خاص انتگرال‌گیری) به حد کافی مورد آزمون قرار گرفته و برای خواص پایداری و همگرایی تحلیل شده است یا نه؟ البته یک تحلیل پایداری و همگرایی در صورت عملی بودن بسیار مطلوب خواهد بود.

مرحله طبیعی نخست در چنان تحلیلی تلقی عنصری که به صورت کاهش یافته و / یا گزینشی انتگرال‌گیری شده است به عنوان یک عنصر آمیخته می‌باشد (ر.ک. به: [A] D. S. Malkus and T.J. R. Hughes). (یک مثال نمونه، همان عنصر تیری دوگره‌ای با درون‌یابی آمیخته می‌باشد که بخش ۵.۴.۱ مورد بحث قرار گرفت و در زیر نیز بیشتر به آن خواهیم پرداخت). به محض اینکه هم‌ارزی کامل بین عنصر با انتگرال‌گیری کاهش یافته و / یا گزینشی و یک فرمول‌بندی آمیخته مشخص گردید، در مرحله دوم، تحلیل فرمول‌بندی آمیخته برای پایداری و همگرایی انجام می‌شود و در این صورت فهم عمیقی در مورد عنصر مبتنی بر انتگرال‌گیری کاهش یافته / گزینشی حاصل می‌شود.

از آنجا که امکان‌های زیادی برای فرض‌های مورد نظر در فرمول‌بندی‌های آمیخته وجود دارد، طبیعی است فرض شود که یک فرمول‌بندی آمیخته وجود دارد که هم‌ارز با عنصر مبتنی بر انتگرال‌گیری کاهش یافته / گزینشی می‌باشد و آن فرمول‌بندی برای اهداف تحلیلی جستجو شود و مورد تحقیق قرار گیرد. با این حال، این واقعیت صرف که عموماً عناصر مبتنی بر انتگرال‌گیری کاهش یافته / گزینشی را می‌توان به عنوان یک فرمول‌بندی آمیخته تلقی نمود، استفاده از انتگرال‌گیری کاهش یافته را توجیه نمی‌کند، زیرا مشخص است که هر فرمول‌بندی

آمیخته‌ای نمایشگر یک روش عناصر محدود قابل اطمینان و کارا نمی‌باشد. بلکه این هم‌ارزی (با جزییات مربوطه که در هر حالت خاص باید مشخص گردند) صرفاً اشاره‌ای بر روش تحلیل عناصر مبتنی بر انتگرال‌گیری کاهش یافته / گزینشی دارد.

همچنین نتیجه می‌شود که به محض اینکه هم‌ارزی کاملی مشخص گردید، در این صورت می‌توان انتگرال‌گیری کاهش یافته / گزینشی را صرفاً به عنوان روشی برای محاسبه دقیق ماتریس‌های عناصر محدود فرمول‌بندی آمیخته در نظر گرفت؛ و ما در اینجا این دیدگاه و نحوه تفسیر انتگرال‌گیری کاهش یافته و گزینشی را اختیار خواهیم کرد.

یک مثال نسبتاً ساده، عنصر تیری دو گرهی تک پارامتری مبتنی بر انتگرال‌گیری گوسی یک نقطه‌ای (در جهت z) می‌باشد. در مثال ۴.۳۰ و بخش ۵.۴.۱ نشان دادیم که این عنصر کاملاً هم‌ارز عنصر تیری حاصله از اصل وردشی Hu-Washizu می‌باشد که در آن تغییر مکان جانبی w و دوران مقطع β به طور خطی تغییر می‌کنند و کرنش برشی γ ثابت فرض می‌شود. پایداری و همگرایی عنصر در بخش ۴.۵.۷ مورد ملاحظه قرار گرفت که در آنجا نشان دادیم که شرایط بیضوی بودن و $\inf\text{-sup}$ تأمین می‌شوند.

برای تأکید بر آنچه که گفته شد، مثال زیر را در نظر می‌گیریم.

مثال ۵.۴۴: یک عنصر خمش صفحه‌ای مثلثی ساده را می‌توان با استفاده از فرمول‌بندی تغییر مکان تک پارامتری که در بخش ۵.۴.۲ ارائه شد استخراج نمود ولی در تعیین ماتریس سختی عنصر مذکور، از انتگرال‌گیری یک نقطه‌ای استفاده خواهد شد. این نوع انتگرال‌گیری عبارات مربوط به خمش را در ماتریس سختی به طور کامل انتگرال‌گیری خواهد کرد، در حالی که عبارات مربوط به برش جانبی به طور تقریبی انتگرال‌گیری می‌شوند. بنابراین ماتریس سختی عنصر براساس انتگرال‌گیری کاهش یافته استوار است (و یا می‌توان گفت که براساس انتگرال‌گیری گزینشی می‌باشد، زیرا تنها عبارات برشی به طور کامل انتگرال‌گیری نشده‌اند).

فرمول‌بندی وردشی و ماتریس سختی مربوط به این عنصر را استخراج کنید.

حل:

این عنصر و فرمول‌بندی وردشی آن به وسیله J.-L. Batoz, K.J. Bathe and L.W. Ho [A] ارائه شده است. یادآوری می‌کنیم که ایجاد و بسط این عنصر به طور طبیعی ناشی از ملاحظه موفقیت عنصر تیری تک پارامتری مبتنی بر انتگرال‌گیری یک نقطه‌ای می‌باشد (ر.ک. به: مثال ۴.۳۰ و بخش‌های ۴.۵.۷ و ۵.۴.۱). این عنصر تیری یک پایه وردشی قوی دارد و تحلیل ریاضی آن خواص همگرایی مطلوبی را تضمین می‌کند و نیز از نکته نظر محاسباتی ساده و مؤثر می‌باشد.

برای ایجاد و بسط پایه وردشی این عنصر صفحه‌ای، یادآوری می‌کنیم که انتگرال‌گیری یک نقطه‌ای به طور ضمنی یک کرنش برشی جانبی ثابتی را فرض می‌کند (همچون حالت عنصر

تیری دوگرهی تک پارامتری مبتنی بر انتگرال‌گیری یک نقطه‌ای). بنابراین با مراجعه به مثال ۴.۳۰، می‌توان مستقیماً نشانگر وردشی عنصر صفحه‌ای را به صورت زیر استخراج نمود:

$$\tilde{\Pi}_{HR}^* = \int_A \left(\frac{1}{2} \kappa^T C_b \kappa + \gamma^T C_s \gamma^{AS} - \frac{1}{2} \gamma^{AS T} C_s \gamma^{AS} \right) dA - \int_A w p dA + \text{boundary } t \quad (\text{الف})$$

که در آن κ , C_b , γ , C_s در (۵.۹۵) الی (۵.۹۷) تعریف شده‌اند و γ^{AS} شامل کرنش‌های برشی جانبی فرضی می‌باشد:

$$\gamma^{AS} = \begin{bmatrix} \gamma_{xz}^{AS} \\ \gamma_{yz}^{AS} \end{bmatrix} = \text{constant}$$

رابطه (الف) یک تابعک اصلاح شده Hellinger-Reissner می‌باشد. از جایگذاری درون‌یابی‌های w , β_x و β_y در κ و γ و انتگرال‌گیری روی مساحت میان - سطح A عنصر و با استفاده از مانا بودن $\tilde{\Pi}_{HR}^*$ نسبت به γ^{AS} و متغیرهای نقاط‌گرهی \hat{u} نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$\hat{u} = \begin{bmatrix} w_1 \\ \theta_x^1 \\ \theta_y^1 \\ \vdots \\ \theta_x^3 \\ \theta_y^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K_b & G^T \\ G & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{u} \\ \gamma^{AS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix}$$

که در آن داریم:

$$K_b = \int_A B_b^T C_b B_b dA$$

$$D = \int_A C_s dA = A C_s$$

$$G = C_s \int_A B_s dA$$

و B_b و B_s ماتریس‌های کرنش - تغییر مکان هستند:

$$\kappa = B_b \hat{u}$$

$$\gamma = B_s \hat{u}$$

با استفاده از چگالش ایستایی، ماتریس سختی عنصر را نسبت به متغیرهای نقاط گرهی به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$K = K_b + G^T D^{-1} G$$

همانگونه که در بخش ۵.۴.۲ گفته شد، عنصر تک پارامتری مبتنی بر تغییر مکان (به عبارت دیگر با استفاده از انتگرال‌گیری عددی تام برای عبارات خمشی و برشی جانبی در ماتریس سختی مبتنی بر تغییر مکان) بیش از اندازه سخت می‌باشد (و پدیده قفل شوندگی برشی را به نمایش می‌گذارد). مباحث طرح شده در مثال ۵.۴۴ نشان می‌دهند که عنصر مبتنی بر تغییر مکان دارای یک پایه وردشی است که کاملاً مشابه پایه وردشی عنصر تیری تک پارامتری مبتنی بر انتگرال‌گیری یک نقطه‌ای می‌باشد. عنصر تیری قابل اطمینان و مؤثر می‌باشد، ولی ماتریس سختی عنصر صفحه‌ای که در مثال ۵.۴۴ ارائه شده است دارای یک ویژه مقدار صفر غیر واقعی است؛ از اینرو عنصر قابل اطمینانی نیست و نباید در عمل مورد استفاده قرار گیرد (همانگونه که توسط J-L. Batoz, K. J. Bathe and L. W. Ho [A] اشاره شده است).

نکته مهم این مثال این است که پایه وردشی یک عنصر ممکن است که کاملاً موجود باشد ولی اینکه آیا عنصر مذکور سودمند و قابل اطمینان است یا نه، تنها از طریق تحلیل عمیق‌تر فرمول‌بندی می‌تواند تعیین شود.

همچنین هم‌ارزی بین یک عنصر مبتنی بر تغییر مکان تک پارامتری خاص که به طور کاهش یافته یا گزینشی انتگرال‌گیری شده است و یک فرمول‌بندی آمیخته ممکن است که تنها برای عناصری با شکل‌های خاص هندسی صادق باشد؛ و نیز ممکن است که این هم‌ارزی هنگامی که قوانین مصالح غیرایزوتروپیک (یا غیرخطی‌های هندسی) اعمال می‌شوند دیگر معتبر نباشد. در این صورت باید به تحلیلی از اثرات هر یک از این شرایط پرداخت.

۵.۵.۷ تمرین‌ها

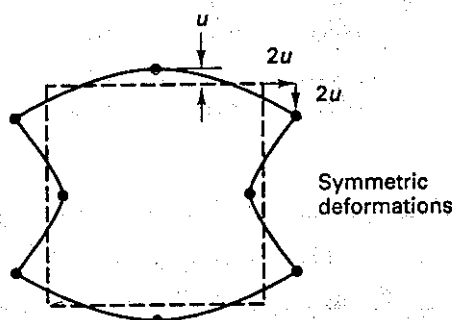
۵.۵۳ مقادیر ثابت Newton-Cotes را هنگامی که چند جمله‌ای درونیابی از مرتبه ۳ می‌باشد، به عبارت دیگر $\psi(2)$ درجه سومی است، تعیین کنید.

۵.۵۴ نقاط نمونه‌گیری و وزن‌های مربوط به انتگرال‌گیری گوسی سه نقطه‌ای را استخراج کنید.

۵.۵۵ نشان دهید که انتگرال‌گیری عددی گوسی 3×3 برای محاسبه ماتریس‌های سختی و جرم یک عنصر مبتنی بر تغییر مکان نه گرهی بدون اعوجاج هندسی برای تحلیل با تقارن محوری کافی می‌باشد.

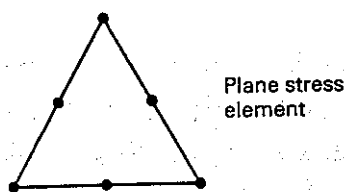
۵.۵۶ نشان دهید که انتگرال‌گیری گوسی 2×2 ماتریس سختی عنصر مربعی مبتنی بر تغییر

مکان هشت گرهی تنش مسطح موجب ایجاد مد انرژی صفر غیر واقعی که در زیر نشان داده شده است می شود. (راهنمایی: برای تغییر مکان های داده شده باید نشان دهید که $B\hat{u} = 0$ می باشد).



۵.۵۷ عنصر $9/3$ یا u/p را در نظر بگیرید و نشان دهید که انتگرال گیری گوسی 3×3 یک عنصر بدون اعوجاج هندسی، ماتریس سختی را به طور کامل به دست می دهد. همچنین نشان دهید که انتگرال گیری گوسی 2×2 کافی نیست.

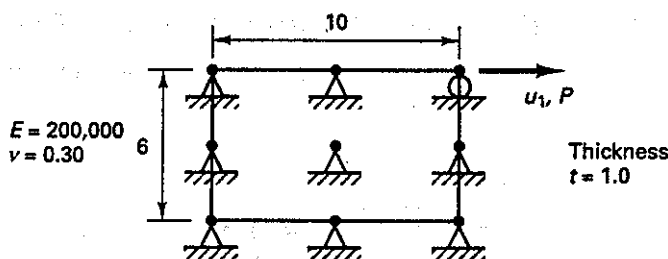
۵.۵۸ مرتبه مورد نیاز انتگرال گیری برای انتگرال گیری تام ماتریس سختی عنصر مثلثی شش گرهی مبتنی بر تغییر مکان را با استفاده از انتگرال گیری گوسی ارائه شده در جدول ۵.۸ مشخص نمایید.



۵.۵۹ عنصر تنش مسطح نه گرهی را که در شکل زیر نشان داده شده است در نظر بگیرید. تمامی تغییر مکان های نقاط گرهی به جز u_1 که آزاد می باشد گیردار هستند. تغییر مکان u_1 ناشی از بار P را محاسبه کنید.

(الف) از انتگرال گیری تحلیلی برای تعیین ضریب سختی استفاده نمایید.

(ب) از انتگرال گیری عددی گوسی 1×1 ، 2×2 و 3×3 برای تعیین ضریب سختی استفاده کنید. نتایج حاصله را مقایسه نمایید.



۵.۶۰ تعیین ماتریس‌های جرم متمرکز عناصر نشان داده شده در جدول ۵.۹ را در نظر بگیرید.

مرتبه‌های مناسب انتگرال‌گیری گوسی برای محاسبه این ماتریس‌ها را تعیین کنید.

۵.۶۱ فرمول‌بندی عنصر خمش صفحه‌ای مثال ۵.۲۹ را در نظر بگیرید. فرض کنید که ماتریس

سختی عنصر با استفاده از انتگرال‌گیری گوسی یک نقطه‌ای تعیین شده است؛ نشان

دهید که این عنصر دارای مدهای انرژی صفر غیر واقعی می‌باشد^(۱۲).

۵.۶۲ فرمول‌بندی عنصر خمش صفحه‌ای مثال ۵.۲۹ را در نظر بگیرید و فرض کنید که انرژی

کرنشی خمشی با استفاده از انتگرال‌گیری گوسی 2×2 و انرژی کرنشی برشی نیز با

استفاده از انتگرال‌گیری گوسی یک نقطه‌ای تعیین شده‌اند؛ نشان دهید که این عنصر

دارای مدهای انرژی صفر غیر واقعی می‌باشد^(۱۲).

۵.۶ پیاده‌سازی عناصر محدود تک پارامتری در برنامه کامپیوتری

در بخش ۵.۳ در مورد فرمول‌بندی عناصر محدود تک پارامتری بحث کردیم و عبارات مورد نیاز

خاص در محاسبه عناصر چهارگره‌ای تنش مسطح (یا کرنش مسطح) را ارائه نمودیم (ر.ک. به:

مثال ۵.۵). امتیاز مهم محاسبات عنصر تک پارامتری وجود تشابه بین محاسبات عناصر مختلف

می‌باشد. برای مثال محاسبه عناصر سه بعدی بسط نسبتاً ساده‌ای از محاسبه عناصر دوبعدی

است. همچنین اگر یک الگوریتم برای انتخاب توابع مناسب درون‌یابی مورد استفاده قرار گیرد،

در این صورت می‌توان در یک سابروتین، عناصر با بافتارهای متنوع نقاط گرهی را محاسبه نمود

(ر.ک. به: بخش ۵.۳).

هدف از این بخش تهیه نمودن یک برنامه کامپیوتری واقعی برای محاسبه ماتریس

سختی عناصر تک پارامتری چهارگره‌ای می‌باشد. در اساس SUBROUTINE QUADS،

پیاده‌سازی روش‌های ارائه شده در مثال ۵.۵ در یک برنامه کامپیوتری است. علاوه بر شرایط

(۱۲) توجه شود که این عناصر نباید در عمل مورد استفاده قرار گیرند (ر.ک. به: بخش ۵.۵.۵).

SUBROUTINE QUADS (NEL, ITYPE, NINT, THIC, YM, PR, XX, S, IOUT)

QUA00001
QUA00002
QUA00003
QUA00004
QUA00005
QUA00006
QUA00007
QUA00008
QUA00009
QUA00010
QUA00011
QUA00012
QUA00013
QUA00014
QUA00015
QUA00016
QUA00017
QUA00018
QUA00019
QUA00020
QUA00021
QUA00022
QUA00023

PROGRAM
TO CALCULATE ISOPARAMETRIC QUADRILATERAL ELEMENT STIFFNESS
MATRIX FOR AXISYMMETRIC, PLANE STRESS, AND PLANE STRAIN
CONDITIONS

- - INPUT VARIABLES - -

```

INPUT VARIABLES = -
NEL           = NUMBER OF ELEMENT
ITYPE        = ELEMENT TYPE
              EQ.0 = AXISYMMETRIC
              EQ.1 = PLANE STRAIN
              EQ.2 = PLANE STRESS
NINT         = GAUSS NUMERICAL INTEGRATION ORDER
THIC        = THICKNESS OF ELEMENT
YM          = YOUNG'S MODULUS
PR          = POISSON'S RATIO
XX(2,4)     = ELEMENT NODE COORDINATES
S(8,8)      = STORAGE FOR STIFFNESS MATRIX
IOUT        = UNIT NUMBER USED FOR OUTPUT

```

¹²Note that these elements should therefore not be used in practice (see Section 5.5.5).

```

C . - - OUTPUT - -
C . S(8,8) - CALCULATED STIFFNESS MATRIX
C .
C .
C . . . . .
C . IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
C .
C . THIS PROGRAM IS USED IN SINGLE PRECISION ARITHMETIC ON CRAY
C . EQUIPMENT AND DOUBLE PRECISION ARITHMETIC ON IBM MACHINES,
C . ENGINEERING WORKSTATIONS AND PCS. DEACTIVATE ABOVE LINE FOR
C . SINGLE PRECISION ARITHMETIC.
C .
C . DIMENSION D(4,4),B(4,8),XX(2,4),S(8,8),XG(4,4),WGT(4,4),DB(4)
C .
C . MATRIX XG STORES GAUSS - LEGENDRE SAMPLING POINTS
C .
C . DATA XG/ 0.D0, 0.D0, 0.D0, 0.D0, -.5773502691896D0,
1 .5773502691896D0, 0.D0, 0.D0, -.7745966692415D0, 0.D0,
2 .7745966692415D0, 0.D0, -.8611363115941D0,
3 -.3399810435849D0, .3399810435849D0, .8611363115941D0 /
C .
C . MATRIX WGT STORES GAUSS - LEGENDRE WEIGHTING FACTORS
C .
C . DATA WGT / 2.D0, 0.D0, 0.D0, 0.D0, 1.D0, 1.D0,
1 0.D0, 0.D0, .55555555555556D0, .88888888888889D0,
2 .55555555555556D0, 0.D0, .3478548451375D0, .6521451548625D0,
3 .6521451548625D0, .3478548451375D0 /
C .
C . O B T A I N S T R E S S - S T R A I N L A W
C .
C . F=YM/(1.+PR)
C . G=F*PR/(1.-2.*PR)
C . H=F + G
C .
C . PLANE STRAIN ANALYSIS
C .
C . D(1,1)=H
C . D(1,2)=G
C . D(1,3)=0.
C . D(2,1)=G
C . D(2,2)=H
C . D(2,3)=0.
C . D(3,1)=0.
C . D(3,2)=0.
C . D(3,3)=F/2.
C . IF (ITYPE.EQ.1) THEN
C . THIC=1.
C . GO TO 20
C . ENDIF
C .
C . AXISYMMETRIC ANALYSIS
C .
C . D(1,4)=G
C . D(2,4)=G
C . D(3,4)=0.
C . D(4,1)=G
C . D(4,2)=G
C . D(4,3)=0.
C . D(4,4)=H
C . IF (ITYPE.EQ.0) GO TO 20
C .
C . FOR PLANE STRESS ANALYSIS CONDENSE STRESS-STRAIN MATRIX
C .
C . DO 10 I=1,3
C . A=D(I,4)/D(4,4)
C . DO 10 J=1,3
C . D(I,J)=D(I,J) - D(4,J)*A
10 D(J,I)=D(I,J)
C .

```

QUA00024
 QUA00025
 QUA00026
 QUA00027
 QUA00028
 QUA00029
 QUA00030
 QUA00031
 QUA00032
 QUA00033
 QUA00034
 QUA00035
 QUA00036
 QUA00037
 QUA00038
 QUA00039
 QUA00040
 QUA00041
 QUA00042
 QUA00043
 QUA00044
 QUA00045
 QUA00046
 QUA00047
 QUA00048
 QUA00049
 QUA00050
 QUA00051
 QUA00052
 QUA00053
 QUA00054
 QUA00055
 QUA00056
 QUA00057
 QUA00058
 QUA00059
 QUA00060
 QUA00061
 QUA00062
 QUA00063
 QUA00064
 QUA00065
 QUA00066
 QUA00067
 QUA00068
 QUA00069
 QUA00070
 QUA00071
 QUA00072
 QUA00073
 QUA00074
 QUA00075
 QUA00076
 QUA00077
 QUA00078
 QUA00079
 QUA00080
 QUA00081
 QUA00082
 QUA00083
 QUA00084
 QUA00085
 QUA00086
 QUA00087
 QUA00088
 QUA00089
 QUA00090
 QUA00091

```

C      CALCULATE ELEMENT STIFFNESS
C
20 DO 30 I=1,8
   DO 30 J=1,8
30 S(I,J)=0.
   IST=3
   IF (ITYPE.EQ.0) IST=4
   DO 80 LX=1,NINT
   RI=XG(LX,NINT)
   DO 80 LY=1,NINT
   SI=XG(LY,NINT)
C
C      EVALUATE DERIVATIVE OPERATOR B AND THE JACOBIAN DETERMINANT DET
C
CALL STDM (XX,B,DET,RI,SI,XBAR,NEL,ITYPE,IOUT)
C
C      ADD CONTRIBUTION TO ELEMENT STIFFNESS
C
IF (ITYPE.GT.0) XBAR=THIC
WT=WGT(LX,NINT)*WGT(LY,NINT)*XBAR*DET
DO 70 J=1,8
DO 40 K=1,IST
DB(K)=0.0
DO 40 L=1,IST
40 DB(K)=DB(K) + D(K,L)*B(L,J)
DO 60 I=J,8
STIFF=0.0
DO 50 L=1,IST
50 STIFF=STIFF + B(L,I)*DB(L)
60 S(I,J)=S(I,J) + STIFF*WT
70 CONTINUE
80 CONTINUE
C
DO 90 J=1,8
DO 90 I=J,8
90 S(J,I)=S(I,J)
C
RETURN
C
END
SUBROUTINE STDM (XX,B,DET,R,S,XBAR,NEL,ITYPE,IOUT)
C
C      . . . . .
C      . . . . .
C      P R O G R A M
C      TO EVALUATE THE STRAIN-DISPLACEMENT TRANSFORMATION MATRIX B
C      AT POINT (R,S) FOR A QUADRILATERAL ELEMENT
C      . . . . .
C      . . . . .
C      IMPLICIT DOUBLE PRECISION (A-H,O-Z)
C      DIMENSION XX(2,4),B(4,8),H(4),P(2,4),XJ(2,2),XJI(2,2)
C
RP = 1.0 + R
SP = 1.0 + S
RM = 1.0 - R
SM = 1.0 - S
C
C      INTERPOLATION FUNCTIONS
C
H(1) = 0.25* RP* SP
H(2) = 0.25* RM* SP
H(3) = 0.25* RM* SM
H(4) = 0.25* RP* SM
C
C      NATURAL COORDINATE DERIVATIVES OF THE INTERPOLATION FUNCTIONS
C
1. WITH RESPECT TO R
P(1,1) = 0.25* SP
P(1,2) = - P(1,1)
P(1,3) = - 0.25* SM
P(1,4) = - P(1,3)

```

```

C      2. WITH RESPECT TO S
C
C      P(2,1) = 0.25* RP
C      P(2,2) = 0.25* RM
C      P(2,3) = - P(2,2)
C      P(2,4) = - P(2,1)
C
C      EVALUATE THE JACOBIAN MATRIX AT POINT (R,S)
C
10 DO 30 I=1,2
   DO 30 J=1,2
     DUM = 0.0
     DO 20 K=1,4
       20 DUM=DUM + P(I,K)*XX(J,K)
       30 XJ(I,J)=DUM
C
C      COMPUTE THE DETERMINANT OF THE JACOBIAN MATRIX AT POINT (R,S)
C
DET = XJ(1,1)* XJ(2,2) - XJ(2,1)* XJ(1,2)
IF (DET.GT.0.00000001) GO TO 40
WRITE (IOUT,2000) NEL
GO TO 800
C
C      COMPUTE INVERSE OF THE JACOBIAN MATRIX
C
40 DUM=1./DET
   XJI(1,1) = XJ(2,2)* DUM
   XJI(1,2) =-XJ(1,2)* DUM
   XJI(2,1) =-XJ(2,1)* DUM
   XJI(2,2) = XJ(1,1)* DUM
C
C      EVALUATE GLOBAL DERIVATIVE OPERATOR B
C
K2=0
DO 60 K=1,4
  K2=K2 + 2
  B(1,K2-1) = 0.
  B(1,K2 ) = 0.
  B(2,K2-1) = 0.
  B(2,K2 ) = 0.
  DO 50 I=1,2
    B(1,K2-1) = B(1,K2-1) + XJI(1,I) * P(I,K)
    50 B(2,K2 ) = B(2,K2 ) + XJI(2,I) * P(I,K)
    B(3,K2 ) = B(1,K2-1)
    60 B(3,K2-1) = B(2,K2 )
C
C      IN CASE OF PLANE STRAIN OR PLANE STRESS ANALYSIS DO NOT INCLUDE
C      THE NORMAL STRAIN COMPONENT
C
IF (ITYPE.GT.0) GO TO 900
C
C      COMPUTE THE RADIUS AT POINT (R,S)
C
XBAR=0.0
DO 70 K=1,4
  70 XBAR=XBAR + H(K)*XX(1,K)
C
C      EVALUATE THE HOOP STRAIN-DISPLACEMENT RELATION
C
IF (XBAR.GT.0.00000001) GO TO 90
C
C      FOR THE CASE OF ZERO RADIUS EQUATE RADIAL TO HOOP STRAIN
C
DO 80 K=1,8
  80 B(4,K)=B(1,K)
  GO TO 900
C
C      NON-ZERO RADIUS
C

```

QUA00164
 QUA00165
 QUA00166
 QUA00167
 QUA00168
 QUA00169
 QUA00170
 QUA00171
 QUA00172
 QUA00173
 QUA00174
 QUA00175
 QUA00176
 QUA00177
 QUA00178
 QUA00179
 QUA00180
 QUA00181
 QUA00182
 QUA00183
 QUA00184
 QUA00185
 QUA00186
 QUA00187
 QUA00188
 QUA00189
 QUA00190
 QUA00191
 QUA00192
 QUA00193
 QUA00194
 QUA00195
 QUA00196
 QUA00197
 QUA00198
 QUA00199
 QUA00200
 QUA00201
 QUA00202
 QUA00203
 QUA00204
 QUA00205
 QUA00206
 QUA00207
 QUA00208
 QUA00209
 QUA00210
 QUA00211
 QUA00212
 QUA00213
 QUA00214
 QUA00215
 QUA00216
 QUA00217
 QUA00218
 QUA00219
 QUA00220
 QUA00221
 QUA00222
 QUA00223
 QUA00224
 QUA00225
 QUA00226
 QUA00227
 QUA00228
 QUA00229
 QUA00230
 QUA00231
 QUA00232
 QUA00233

90	DUM=1./XBAR	QUA00234
	K2=0	QUA00235
	DO 100 K=1,4	QUA00236
	K2=K2 + 2	QUA00237
	B(4,K2) = 0.	QUA00238
100	B(4,K2-1) = H(K)*DUM	QUA00239
	GO TO 900	QUA00240
C		QUA00241
	800 STOP	QUA00242
	900 RETURN	QUA00243
C		QUA00244
2000	FORMAT (//,' *** ERROR *** ',	QUA00245
1	' ZERO OR NEGATIVE JACOBIAN DETERMINANT FOR ELEMENT (' ,I8,')')	QUA00246
C		QUA00247
	END	QUA00248